

**IV zestaw zadań z fizyki atomowej
(Macierze Pauliego)**

1. Macierze Pauliego σ_i , ($i = 1, 2, 3$), zdefiniowane są jako hermitowskie macierze 2×2 spełniające warunki

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}I \quad (1)$$

(I — macierz jednostkowa 2×2). Udowodnić, że:

- (a) $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$,
- (b) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = iI$,
- (c) $\text{Tr } \sigma_i = 0$,
- (d) $\det \sigma_i = -1$,
- (e) wartości własne macierzy Pauliego są równe ± 1 .

2. Pokazać, że hermitowskie macierze

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

spełniają relacje definiujące macierze Pauliego oraz zależności (a)–(e) z zadania 7.

3. Znaleźć wartości własne i unormowane wektory własne macierzy (2).
4. (Twierdzenie spektralne dla macierzy Pauliego.) Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że jeżeli $\lambda_k^{(i)}$ i $x_k^{(i)}$, ($k = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$), są, odpowiednio, wartościami własnymi i unormowanymi wektorami własnymi macierzy σ_i , wówczas

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^2 \lambda_k^{(i)} x_k^{(i)} (x_k^{(i)})^\dagger, \quad (3)$$

gdzie $\dagger$ oznacza macierzowe sprzężenie hermitowskie.

5. Niech $\mathbf{n}$ będzie jednostkowym wektorem o kierunku zadany w sferycznym układzie współrzędnych przez kąty biegunowy θ i azymutalny φ . Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Wskazówka: współrzędnymi kartezjańskimi wektora $\mathbf{n}$ są

$$(n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (4)$$

6. Pokazać, że dowolną macierz zespoloną A o wymiarach 2×2 można przedstawić jako kombinację liniową macierzy jednostkowej i trzech macierzy Pauliego

$$A = c_0 I + c_i \sigma_i. \quad (5)$$

Wyrazić współczynniki c_k , ($k = 0, 1, 2, 3$), przez wyrazy macierzy A .

7. Dowieść, że jeżeli $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$ są dwoma dowolnymi operatorami wektorowymi komutującymi z $\boldsymbol{\sigma}$, wówczas

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{A}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}) = (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}})I + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}}). \quad (6)$$

8. Pokazać, że jeżeli operatory $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$ komutują ze sobą i z macierzami $\boldsymbol{\sigma}$, wówczas

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{A}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}}) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{B}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{A}}) = 2(\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}})I. \quad (7)$$

9. Pokazać, że operator spinu $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ jest operatorem momentu pędu.

10. Pokazać, że jeżeli $\hat{\mathbf{L}}$ i $\hat{\mathbf{S}}$ są komutującymi operatorami momentu pędu, tzn. $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{S}}] = 0$, to operator $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ jest także operatorem momentu pędu.