

II zestaw zadań z fizyki atomowej
(Izolowany atom wodoropodobny z bezspinowym elektronem)

1. Unormować do jedności radialne funkcje falowe stanów związanych atomu wodoropodobnego; funkcje te mają postać

$$\Psi_{nlm_l}(\mathbf{r}) = N_{nl} r^l e^{-Zr/na_0} L_{n-l-1}^{(2l+1)} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right) Y_{lm_l}(\mathbf{n}_r).$$

2. Bezpośrednio z definicji, dla atomu wodoropodobnego znajdującego się w stanie stacjonarnym scharakteryzowanym liczbami kwantowymi n, l, m_l znaleźć średnie wartości r^N dla $N \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

3. Pokazać, że dla atomu wodoropodobnego w stanie o energii E_n zachodzi

$$\langle \hat{T} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \hat{V} \rangle = -E_n.$$

4. Korzystając z twierdzenia Hellmanna–Feynmana, dla atomu wodoropodobnego znajdującego się w stanie stacjonarnym scharakteryzowanym liczbami kwantowymi n, l, m_l znaleźć średnie wartości r^{-1} i r^{-2} .
5. Znaleźć potencjał skalarny pola elektrostatycznego wytwarzanego przez atom wodoropodobny znajdujący się w stanie podstawowym.
6. Znaleźć gęstość prądu w atomie wodoropodobnym w stanie stacjonarnym scharakteryzowanym liczbami kwantowymi n, l, m_l .
7. Znaleźć magnetyczny moment dipolowy atomu wodoropodobnego w stanie stacjonarnym scharakteryzowanym liczbami kwantowymi n, l, m_l .
8. Znaleźć elektryczny moment dipolowy atomu wodoropodobnego znajdującego się w stanie stacjonarnym opisywanym funkcją falową

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{200}(\mathbf{r}) \pm \Psi_{210}(\mathbf{r})].$$

9. Stosując metodę wariacyjną, oszacować energię stanu podstawowego atomu wodoropodobnego. Jako funkcje próbne przyjąć kolejno

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r}) = A \exp(-\alpha r) Y_{00}(\mathbf{n}_r),$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r}) = B \exp(-\beta r^2) Y_{00}(\mathbf{n}_r),$$

gdzie: A, B — stałe normalizacyjne, α, β — parametry wariacyjne. Podać postaci unormowanych optymalnych funkcji próbných.

10. Hamiltonian atomu wodoropodobnego o ładunku jądra $+Ze$ można przedstawić w postaci

$$\hat{H}_Z = \hat{H}_{Z-N} + \hat{V}_N,$$

gdzie

$$\hat{H}_X = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{Xe^2}{(4\pi\epsilon_0)r}, \quad \hat{V}_N = -\frac{Ne^2}{(4\pi\epsilon_0)r}.$$

Traktując operator $\hat{V}_N$ jako małe zaburzenie operatora $\hat{H}_{Z-N}$, zastosować pierwszy rząd rachunku zaburzeń w celu znalezienia przybliżonych wartości własnych hamiltonianu $\hat{H}_Z$. Porównać otrzymane wyniki z wynikami ścisłymi.

11. Stosując rachunek zaburzeń pierwszego rzędu, znaleźć poprawki do poziomów energetycznych atomu wodoropodobnego wywołane skończonymi rozmiarami jądra, jeżeli przyjmiemy, że

(a) energia potencjalna oddziaływania elektronu z jądrem ma postać

$$V_n(r) = -\frac{Ze^2}{r} + A\delta(r - R),$$

(b) jądro jest jednorodnie naładowaną kulą o promieniu R ,

(c) jądro jest jednorodnie naładowaną sferą o promieniu R .

Wskazówka: W przypadkach (b) i (c) rachunki upraszczają się, jeżeli skorzysta się z faktu, że w obszarze jądra $Zr \ll a_0$.