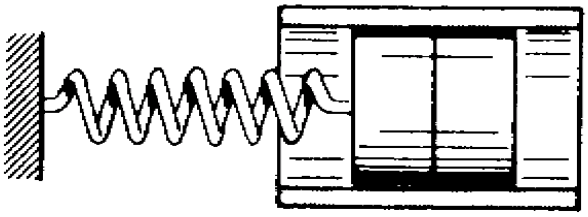
Drgania tłumione (gasnące, zanikające).



$$F_r = -b\dot{\Psi}$$

F_r – siła tłumienia; b – współczynnik tłumienia $\left[Nm^{-1}s\right]$

$$m\ddot{\Psi} = F + F_r$$

$$m\ddot{\Psi} = -k\Psi - b\Psi$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{\Psi} + \gamma\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = 0 \\ \omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}} \qquad \gamma \equiv \dfrac{b}{m} \end{array}\right\} \text{opis różnych zjawisk fizycznych}$$

Niech $\Psi = Ce^{pt}$

$$p^2 + \gamma p + {\omega_0}^2 = 0$$

$$p = -\frac{1}{2}\gamma \pm \left(\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2\right)^{1/2}$$

<u>Trzy przypadki</u>: słabe tłumienie: $\gamma < 2\omega_0$

silne tłumienie: $\gamma > 2\omega_0$

tłumienie krytyczne: $\gamma = 2\omega_0$

Słabe tłumienie:

$$p = -\frac{1}{2}\gamma \pm i\omega_f$$

$$\omega_f \equiv \left(\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)^{1/2} = \omega_0\left[1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\Psi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)\left[C\exp\left(i\omega_f t\right) + C^*\exp\left(-i\omega_f t\right)\right]$$

Inne formy zapisu:

amplituda początkowa

$$\Psi(t) = \underbrace{A\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)}_{\text{amplituda}}\cos\left(\omega_f t + \varphi\right)$$

$$\Psi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)\left(B_p\cos\omega_f t + B_q\sin\omega_f t\right)$$

$$\Psi(t) = \mathrm{Re}\left[D\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t + i\omega_f t\right)\right]$$

- Drgania tłumione – drgania „harmoniczne" o amplitudzie zanikającej z czasem
- Amplituda maleje o czynnik ***e*** gdy czas wzrasta o $2/\gamma$ - czas relaksacji

Częstość drgań: $\omega_f = \omega_0 \left[1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}$

$\underline{\omega_f < \omega_0}$ $\left(\gamma = \frac{\omega_0}{10} \to \omega_f = 99{,}9\% \, \omega_0 \right)$

Dla $\gamma << \omega_0$ (tzw. bardzo słabe tłumienie):

$\omega_f \approx \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2\omega_0} \right)^2 \right]$ (ω_f można zastąpić ω_0).

Warunki początkowe

R.R drugiego rzędu – dwie stałe dowolne, określone przez warunki brzegowe.

Np. masa wyprowadzona z położenia równowagi na odległość A_1 w prawo i zwolniona dla t=0.

1. Dla drgań swobodnych: $\Psi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\Psi(0) = A\cos\varphi = A_1, \quad \dot{\Psi}(0) = -\omega_0 A \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

$$\cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\Psi(t) = A_1 \cos\omega_0 t$$

2. Dla drgań tłumionych:

$$\Psi(0) = A\cos\varphi = A_1,\ \dot{\Psi}(0) = -\frac{1}{2}\gamma A\cos\varphi - \omega_f A\sin\varphi = 0$$

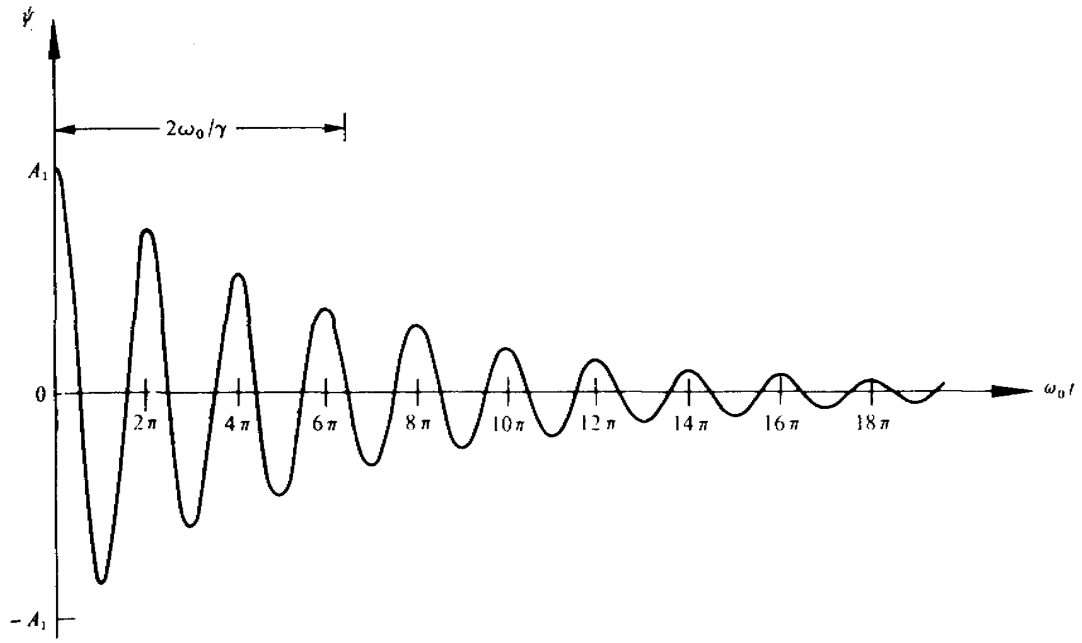
$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\gamma}{2\omega_f}$$

$$A = \frac{A_1}{\cos\varphi} = A_1\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)^{1/2}$$

$$A = A_1\left[1+\left(\frac{\gamma}{2\omega_f}\right)^2\right]^{1/2} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_f}\right)A_1$$

amp. początkowa

$$\omega_f = \left(\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)^{1/2} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega_f} .."okres"$$



Dekrement logarytmiczny drgań

$\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)$ - czynnik tłumienia

$$\ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)}{A_0\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma(t+T)\right)} =$$

$$= \ln\left[\exp\left(\frac{1}{2}\gamma T\right)\right] = \frac{1}{2}\gamma T$$

$\underline{\delta \equiv \frac{1}{2}\gamma T}$ dekrement logarytmiczny

$\delta \sim b$ - współczynnik tłumienia

$$\gamma \equiv \frac{b}{m}, \qquad \delta = \frac{1}{2}\frac{b}{m}T, \qquad b = \frac{2m}{T}\delta$$

$$b = \frac{2m}{T}\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}$$

$$\delta = \ln\frac{A+\Delta A}{A} = \ln\left(1+\frac{\Delta A}{A}\right) = \frac{\Delta A}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \ldots$$

Dla słabego tłumienia:

$$\Delta A << A, \qquad \delta \approx \frac{\Delta A}{A}$$

Straty energii:

$W \neq$ const
$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{d\dot{\Psi}} \cdot \frac{d\dot{\Psi}}{dt} + \frac{dW}{d\Psi} \cdot \frac{d\Psi}{dt}$$

$$\frac{dW}{dt} = \left(m\ddot{\Psi} + k\Psi\right)\dot{\Psi} \qquad \left(W = \frac{1}{2}m\dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}k\Psi^2\right)$$

prawdziwe dla wszystkich przypadków drgań tłumionych (słabo, silnie, krytycznie)

Z równania ruchu:
$$\frac{dW}{dt} = -b\dot{\Psi}^2 \leq 0$$

Dla przypadku drgań mechanicznych:

$$\frac{dW}{dt} = \underbrace{\left(m\ddot{x} + kx\right)}_{-b\dot{x}}\dot{x}$$ - *z równań ruchu*

$$\frac{dW}{dt} = -b\,\dot{x}\,\dot{x}; \qquad \frac{dW}{dt} = F_r \cdot \upsilon$$

Pochodna energii jest równa mocy traconej na opory ruchu.

Szybkość zaniku energii średniej (średnia po wielu okresach):

$$\Psi(t) = A\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)\cos\left(\omega_t t + \varphi\right)$$

$$W = T + V = \frac{1}{2}m\dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}k\Psi^2$$

Dla słabego tłumienia:

$$W = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left\{ \omega_0^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega_f \sin\left[2\left(\omega_f t + \varphi\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos\left[2\left(\omega_f t + \varphi\right)\right] \right\}$$

Energia średniowana po wielu cyklach:

$$< W > \cong \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t}$$

Średnia energia maleje o czynnik 1/*e* gdy czas wzrasta o $1/\gamma$.

Względna strata energii na jednostkę czasu:

$$-\frac{1}{< W >} \cdot \frac{d < W >}{dt} \cong \gamma$$

Znając charakterystykę zaniku energii można znaleźć γ.

Zanik energii dla drgań słabo tłumionych:

Dobroć (Q):

Stosunek $\gamma/2\omega_0$ określa wielkość tłumienia.

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma} \text{ - dobroć}$$

Dla układu słabo tłumionego: $Q > \frac{1}{2}$

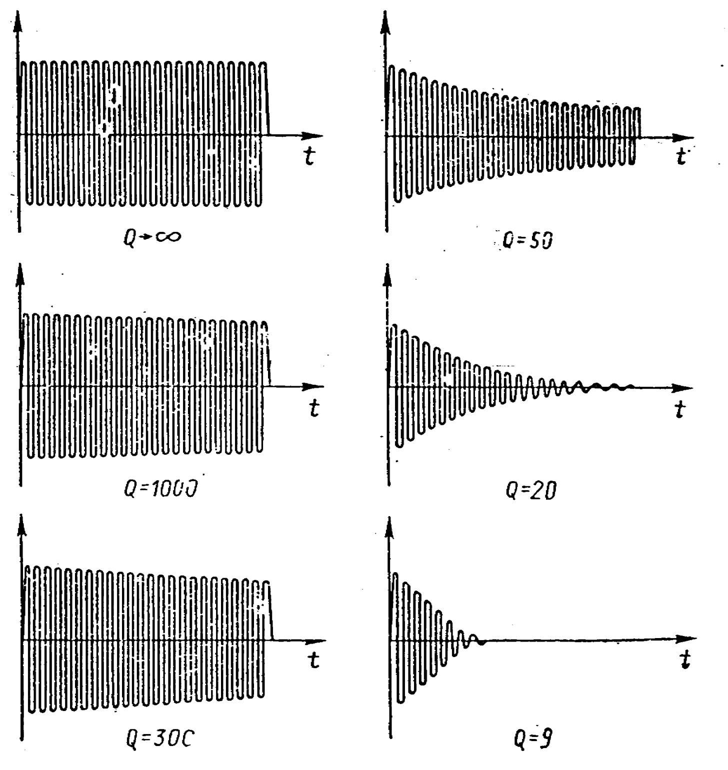
Dla układu bardzo słabo tłumionego: $Q \cong \frac{\omega_f}{\gamma} >> 1$

Po Q cyklach, tzn. po czasie $Q \cdot \tau = 2\pi \frac{Q}{\omega_f}$ amplituda maleje o czynnik:

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\gamma\left(2\pi\frac{Q}{\omega_f}\right)\right] \cong \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma\left(2\pi\frac{Q}{\omega_0}\right)\right] = e^{-\pi} = 0.043$$

- Z czasu po jakim amplituda spada do 4% $\rightarrow$ Q.

Zanik amplitudy dla układów o różnej dobroci Q:



Dobroć a straty energii

Dla $x = A(t)$ (maksymalne wychylenie):

$$W(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) \quad \Rightarrow \quad W(t+T) = \frac{1}{2}kA^2(t+T)$$

Niech $A(t) = A, \qquad A(t+T) = A - \Delta A$

$$\Delta W = W(t) - W(t+T) = kA\Delta A - \frac{1}{2}k(\Delta A)^2$$

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\frac{\Delta A}{A} - \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2$$

Dla słabego tłumienia:

$$\frac{\Delta W}{W} \cong 2\frac{\Delta A}{A} \cong 2\delta$$

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma T; \quad Q = \frac{\omega_f}{\gamma} = 2\frac{\pi}{\gamma T} \quad \left(= \frac{\pi}{\delta}\right)$$

$$\omega_f = \omega_0\left[1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2\right]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \omega_0\left[1 - (2Q)^{-2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\pi}{Q} \Rightarrow Q = 2\pi\frac{W}{\Delta W}$$

Silne tłumienie

Niech $\gamma > 2\omega_0 \Rightarrow p_{1,2}$ - rzeczywiste, ujemne

$$\mu_1 \equiv -p_1 = \frac{1}{2}\gamma + \left(\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2\right)^{1/2}$$

$$\mu_2 \equiv -p_2 = \frac{1}{2}\gamma - \left(\frac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2\right)^{1/2}$$

$$\mu_1 > \frac{1}{2}\gamma > \omega_0 \quad \mu_1 \cdot \mu_2 = \omega_0^2 \Rightarrow \mu_2 < \omega_0$$

$$\Psi(t) = C_1 \exp(-\mu_1 t) + C_2 \exp(-\mu_2 t)$$

C_1, C_2 rzeczywiste, bo $\Psi(t)$ rzeczywiste.

C_1, C_2 – z warunków początkowych

μ_1, μ_2 – dane przez własności układu

C_1, C_2 – mogą być dodatnie, ujemne, mogą różnić się znakiem.

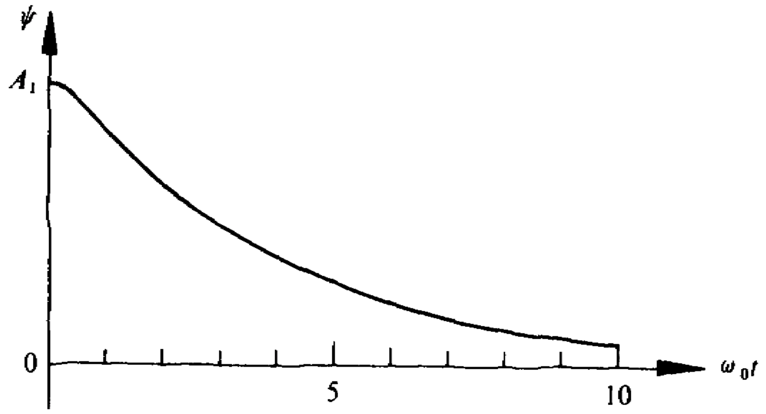
<u>Jeśli ten sam znak</u> $\Rightarrow \Psi$ nigdy nie zmieni znaku (np. masa nigdy nie przejdzie przez położenie równowagi)

<u>Jeśli różny znak</u> $\Rightarrow \Psi$ zmienia znak gdy oba człony są równe co do wartości (np. masa przechodzi raz przez położenie równowagi – tylko raz!).

To nie są prawdziwe drgania! $\Rightarrow$Ruch <u>aperiodyczny</u>

Niech $\begin{cases} \Psi(0) = C_1 + C_2 = A_1 \\ \dot{\Psi}(0) = -(\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2) = 0 \end{cases}$ *Masa wychylona i puszczona*

$$\Psi(t) = \frac{A_1[\mu_1 \exp(-\mu_2 t) - \mu_2 \exp(-\mu_1 t)]}{\mu_1 - \mu_2}$$



$$\Psi(t) \quad dla \quad \gamma = 4\omega_0; \;\; \mu_1 = 3.73\omega_0; \;\; \mu_2 = 0.268\omega_0:$$

Dla dużych czasów można zaniedbać drugi człon i mamy wykładniczy zanik ruchu:

$$\Psi(t) \cong \left(\frac{A_1\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\right)\exp(-\mu_2 t)$$

<u>Bardzo silne tłumienie</u>

$$\gamma >> \omega_0 \;\; \Rightarrow \;\; \mu_1 \cong \gamma$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma\left(1 - 4\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right)^{1/2}$$

$$\mu_2 \cong \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma\left(1 - 2\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right) = \frac{\omega_0^2}{\gamma}$$

Jeśli $\begin{cases} \Psi(0) = C_1 + C_2 = A_1 \\ \dot{\Psi}(0) = 0 \end{cases}$

$$\Psi(t) = \frac{A_1\left[\gamma^2 \exp\left(-\frac{\omega_0^2 t}{\gamma}\right) - \omega_0^2 \exp(-\gamma t)\right]}{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$(\gamma >> \omega_0) \Rightarrow \Psi(t) \cong A_1 \exp\left(-\frac{\omega_0^2 t}{\gamma}\right)$$

- zanik „prawie wykładniczy".

Czas relaksacji (wychylenie zmniejsza się *e*-krotnie)

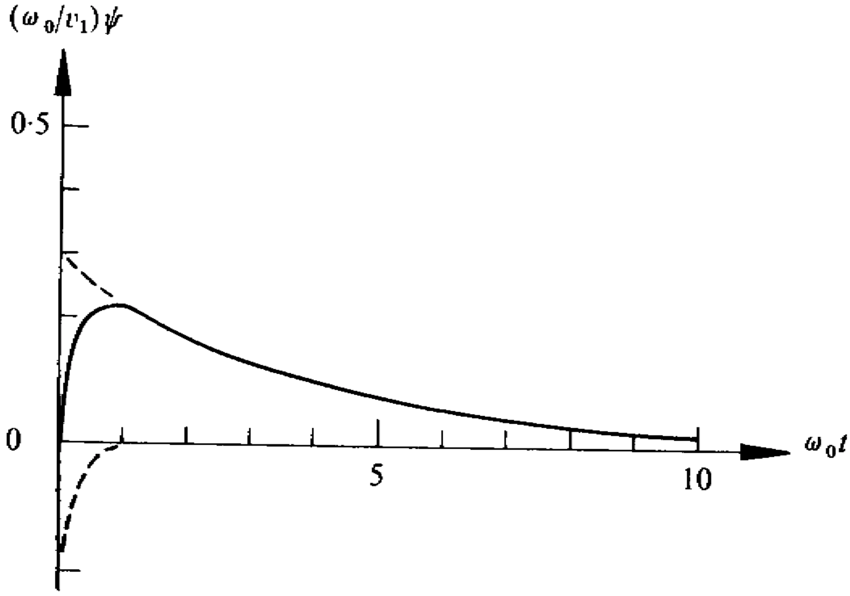
$\tau_r = \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{b}{k}$ $\quad \tau_r \neq f(m)$! (bo $F_r \cong k\Psi = -F_s$)

$$\left[-b\dot{\Psi} = \frac{b\omega_0^2}{\gamma}\Psi(t) = k\Psi\right]$$

- układ „prawie" zrównoważony

Inne warunki początkowe:

Niech $\begin{cases} \Psi(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ \dot{\Psi}(0) = -(\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2) = \upsilon_1 \end{cases}$ - masa pchnięta z lewa na prawo tak, że ma prędkość υ_1 przy przejściu przez 0.



$$\Psi(t) = \frac{v_1[\exp(-\mu_2 t) - \exp(-\mu_1 t)]}{\mu_1 - \mu_2}$$

Tłumienie krytyczne

$$\underline{\gamma = 2\omega_0} \qquad \Rightarrow p = -\frac{1}{2}\gamma = -\omega_0$$

Rozwiązanie $\Psi = Ce^{pt}$ nie jest dobre – jedna stała!

- za mało dla ogólnego rozwiązania r.r. II-go stopnia.

Dla układu słabo tłumionego było:

$$\Psi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)\left[C\exp(i\omega_f t) + C^*\exp(-i\omega_f t)\right]$$

$$\omega_f \equiv \omega_0\left[1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

Jeśli $\gamma \to 2\omega_0$ - szybsze tłumienie, dąży do zera częstość $\to$ znikają oscylacje.

Można spróbować rozwiązania w postaci iloczynu zaniku wykładniczego i linii prostej.

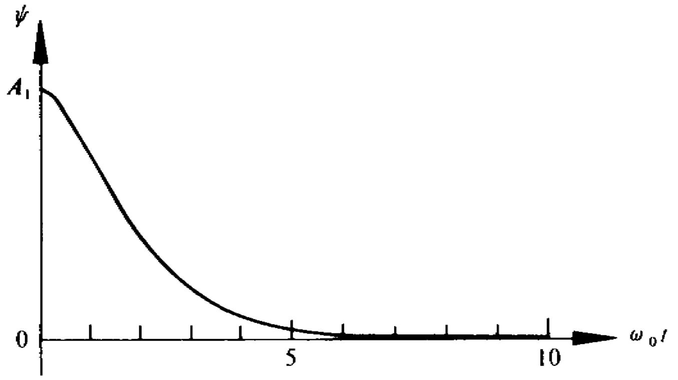
$$\Psi(t) = (C_1 + C_2\omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$$

(nie $C_2 t$, a $C_2\omega_0 t$ aby wymiar obu stałych był taki sam.)

Niech $\left.\begin{array}{l} \Psi(0) = C_1 = A_1 \\ \dot{\Psi}(0) = -\omega_0 C_1 + \omega_0 C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = A$

$$\Psi(t) = A_1(1 + \omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$$

Tłumienie krytyczne – wychylenie w funkcji czasu:



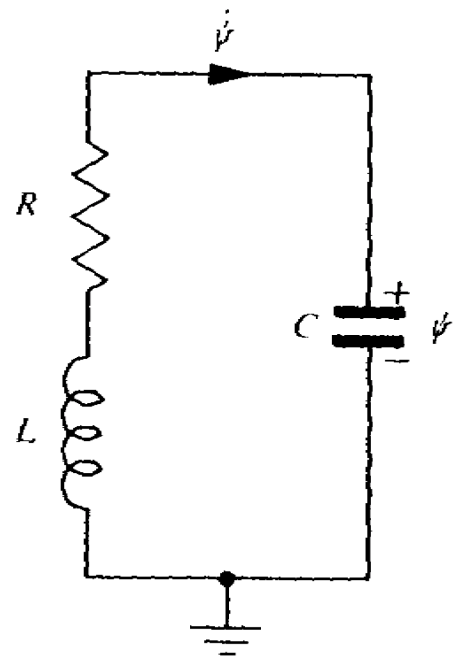
Dla tłumienia krytycznego zanik długoczasowy jest szybszy niż dla silnego, bo - ω_0 - stała zaniku amplitudy dla tłumienia krytycznego jest większa od μ_2 - stałej zaniku dla tłumienia silnego.

Analogicznie dla słabego: - $\omega_0 \rangle \frac{1}{2}\gamma$.

System o danej ω_0 „uspokaja się" najszybciej jeśli jest tłumiony krytycznie (znaczenie praktyczne).

Dobroć: $Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}; \quad \gamma = 2\omega_0 \qquad \underline{Q = \dfrac{1}{2}}$

<u>Dla obwodu *RLC*:</u>



$$L\left(\frac{d\dot{\Psi}}{dt}\right) + R\dot{\Psi} + \left(\frac{1}{C}\right)\Psi = 0 \qquad \Psi \Rightarrow \text{ładunek.}$$

$$\Psi + \left(\frac{R}{L}\right)\Psi + \left(\frac{1}{LC}\right)\Psi = 0 \quad \Rightarrow \omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$

$$\gamma = \frac{R}{L} \qquad \text{dobroć } Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

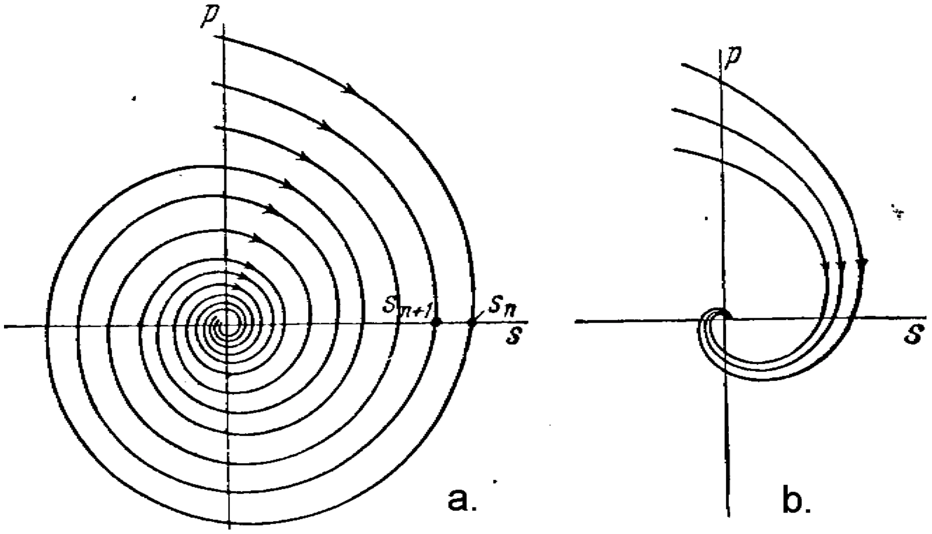
Tłumienie krytyczne: $R = 2\omega_0 L$

Straty energii:

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{\Psi}^2}{2} + \frac{\Psi^2}{2C}\right) = -\dot{\Psi}\left(L\ddot{\Psi} + \frac{\Psi}{C}\right) = R\dot{\Psi}^2$$

$$-dE = \underbrace{R\dot{\Psi}^2 dt}_{\text{Ciepło Joule'a}}$$

Drgania tłumione na płaszczyźnie fazowej:



W przypadku *b* tłumienie jest znacznie większe, niż w przypadku *a.*