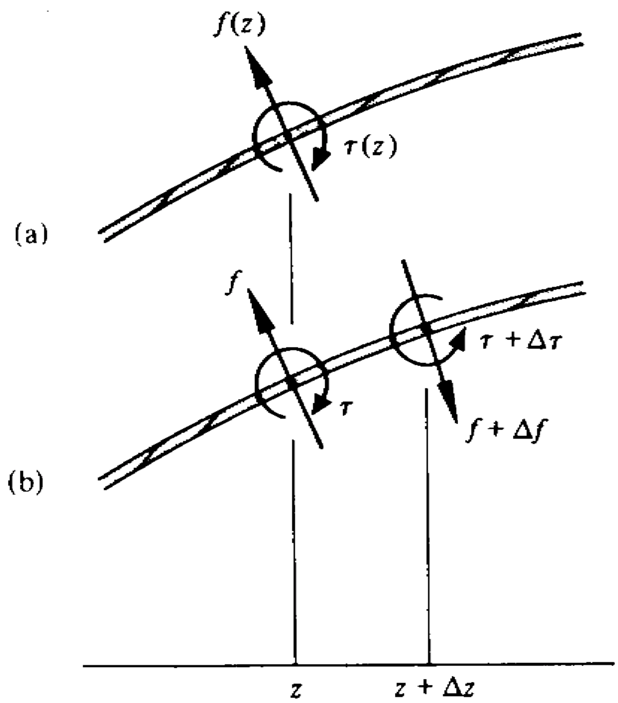
Dyspersja:

- Zakładaliśmy idealną elastyczność struny.
- Struna rzeczywista jest „sztywna” – dąży do wyprostowania się, nawet gdy nie jest naprężona.
- Pojawiają się siły prostopadłe, stąd dyspersja – zależność prędkości od długości fali.
- Siły zwrotne są skutkiem naprężeń w zgiętych częściach struny.

Każdy zbiór sił można zastąpić jedną siła i jednym momentem siły.

Dla składowych równoległych do struny: (a) siła napięcia i (b) moment zginający,
dla składowych prostopadłych: (c) siła ścinająca i (d) moment skrętny.

Siłę zwrotną od napięcia rozważaliśmy. Zakładając, że nie ma momentów skrętnych – trzeba uwzględnić wpływ (b) i (c).



$f(z)$ - siła ścinająca; $\tau(z)$ - moment zginający.

Szukamy sił działających na odcinek struny Δz.

Wypadkowa siła: Δf

Wypadkowy moment: $f\Delta z - \Delta\tau$

Przybliżenie małych odkształceń $\Rightarrow$ obrót segmentu dużo mniejszy od przesunięcia poprzecznego:

$$\left(f\Delta z - \Delta\tau\right) \cong 0 \quad \Rightarrow \quad f \cong \frac{\partial\tau}{\partial z}$$

Dla małych odkształceń Δf praktycznie pionowe – daje poprzeczną siłę zwrotną:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \cong \left(\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}\right)\Delta z$$

Dla małych $\Psi \Rightarrow \tau \sim \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Rightarrow \Delta f \sim \dfrac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4}$

- dodatkowa składowa siły zwrotnej w stosunku do przypadku struny idealnie elastycznej.

Z równania ruchu: $\mu \Delta z \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cong T \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Delta z - \alpha T \dfrac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} \Delta z$

$$\underline{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cong c^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} \right)}$$

$c^2 = \dfrac{T}{\mu}$; α - stała dodatnia.

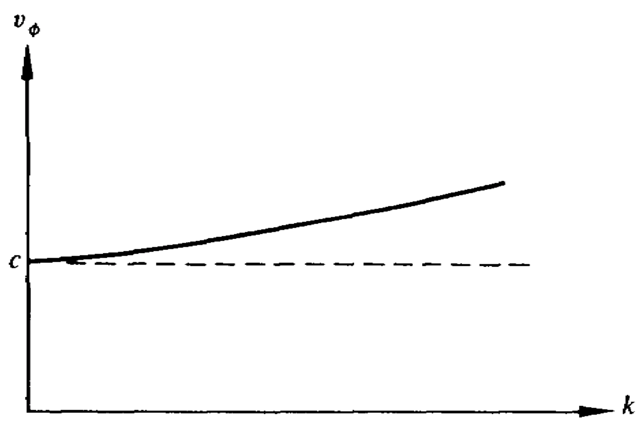
Podstawiając $\Psi = D \exp[i(\omega t - kz)]$ dostajemy warunek:

$$\underline{\omega = \pm ck \left(1 + \alpha k^2\right)^{1/2}}$$

(dla struny elastycznej $\alpha = 0$ i j.w.)

Prędkość fazowa:

$\underline{\left| c_f \right| = c\left(1 + \alpha k^2\right)^{1/2}}$ <u>zależy od długości fali</u>.



Zależność prędkości fazowej od długości fali (częstości) – oznaka dyspersji.

Ośrodek, w którym występuje – dyspersyjny.

Zależność $\omega = \omega(k)$ - związek dyspersyjny układu (ośrodka).

W układzie dyspersyjnym niesinusoidalne zaburzenie nie może rozchodzić się bez zmiany kształtu.

Jeśli dopuścić dyspersję – nie każda funkcja $(ct \mp z)$ spełnia równanie falowe.

Układ słabo dyspersyjny:

$\alpha k << 1$

$$\omega = \pm ck\left(1 + \alpha k^2\right)^{1/2} \cong ck\left(1 + \frac{1}{2}\alpha k^2\right)$$

$$\underline{\omega = ck - dk^3} \qquad \text{(fala w prawo)}$$

- związek dyspersyjny dla układu o słabej dyspersji (d - stała, znak *d* umowny).

Wstawiając do Ψ i różniczkując:

$\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = i\omega\Psi$; $\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = -ik\Psi$; $\dfrac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} = ik^3\Psi$ dostajemy:

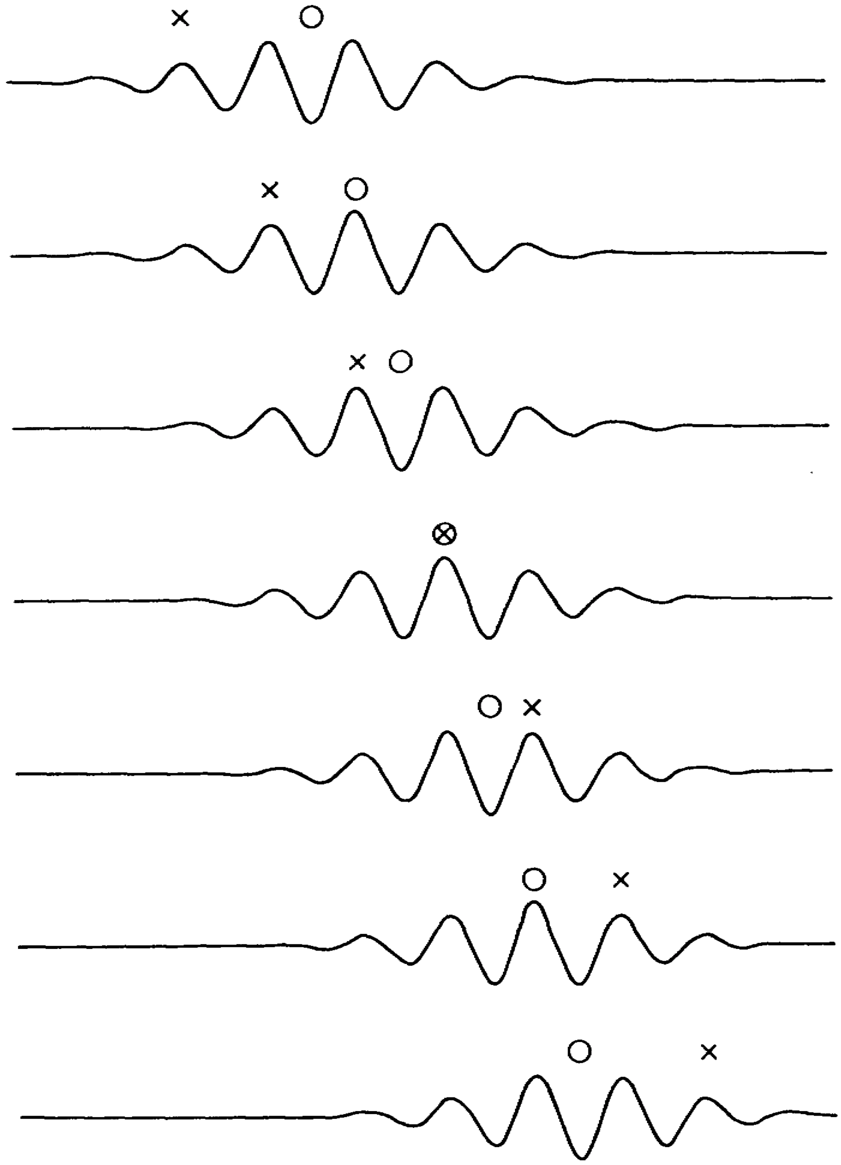
$$\underline{\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c\frac{\partial \Psi}{\partial z} + d\frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} = 0}$$

- równanie fali biegnącej dla ośrodka o słabej dyspersji.

Paczka falowa:

- superpozycja wielu fal sinusoidalnych o wektorach falowych z zakresu tym większego, im paczka węższa,
- różne fale poruszają się z różną prędkością $\Rightarrow$ paczka ulega rozmyciu.

Jak szybko porusza się paczka?



Maksimum paczki dla chwili t w punkcie z, w którym składowe nakładają się konstruktywnie.

Warunek: taka sama faza $(\omega t - kz + \varphi)$, chociaż różne ω, k, φ.

$\rightarrow$ Maksimum w punkcie, dla którego $(\omega t - kz + \varphi)$ dla fal o wszystkich częstościach takie samo.

$$\left[\frac{d}{d\omega}(\omega t - kz + \varphi)\right]_{\varpi} = 0$$

ϖ - częstość fali „prawie sinusoidalnej”.

$$t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\varpi} z = 0$$

- prawdziwe dla $\dfrac{z}{t} = c_g(\varpi)$

$$\underline{c_g(\varpi) \equiv \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\varpi}}$$

- prędkość grupowa dla częstości ϖ.

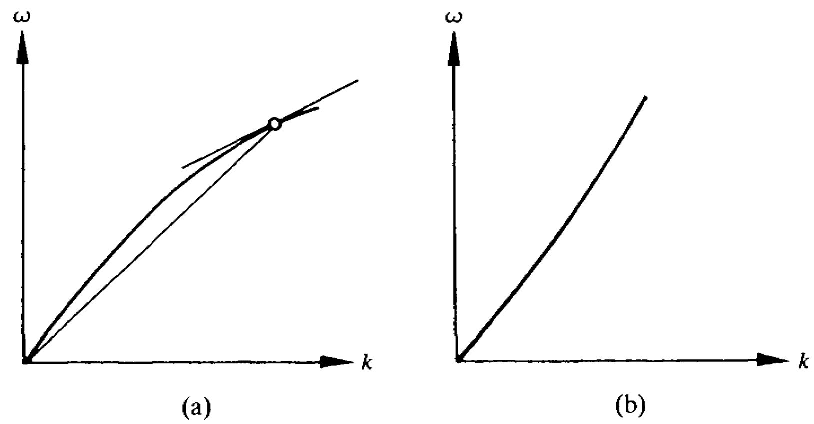
Prędkość fazowa – prędkość punktów stałej fazy.

Prędkość grupowa – prędkość punktów stałej amplitudy.

Dla struny elastycznej:

$c_g = c_f = c$

Prędkość grupowa może być większa, równa lub mniejsza w stosunku do fazowej.



Dyspersja normalna $(c_g < c)$, Dyspersja anomalna $(c_g > c)$.

Fale stojące:

Niech struna będzie zamocowana na obu końcach i charakteryzuje się dyspersją $\omega = ck - dk^3$.

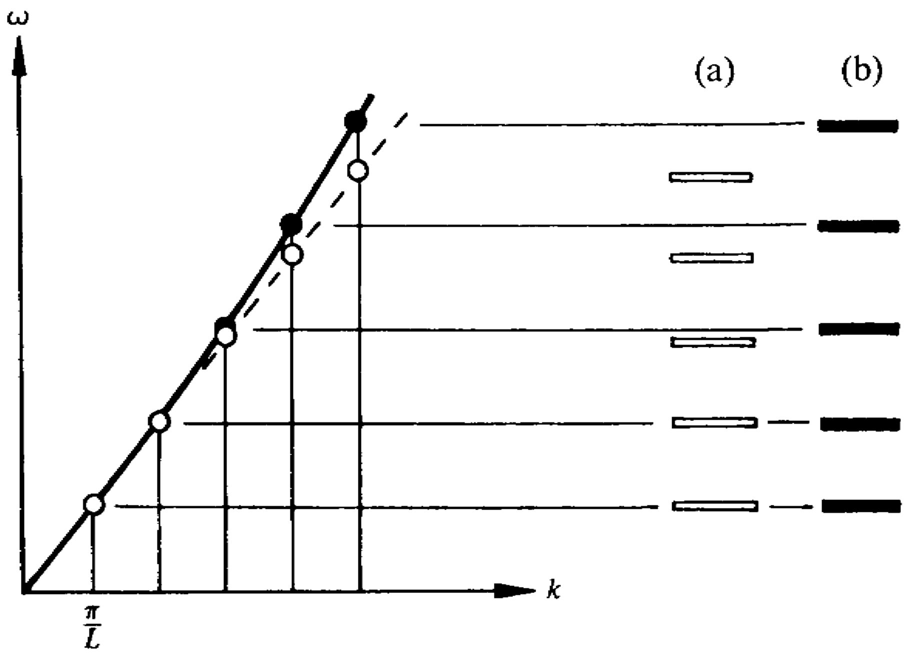
Do fali stojącej można stosować związki dyspersyjne, bo ma ona taką samą długość jak fale padająca i odbita.

Dozwolone k takie jak bez dyspersji, bo analogiczne warunki brzegowe.

Funkcje własne są takie same, ale inne częstości własne.

$$\omega_n = ck_n - dk_n^3 \qquad \Rightarrow \nu_n = \frac{nc}{2L} - \frac{n^3 d\pi^2}{2L^3}$$

$$\nu_n = \frac{nc}{2L} - \frac{n^3 d\pi^2}{2L^3}$$



W przypadku z dyspersją nie ma harmonik.