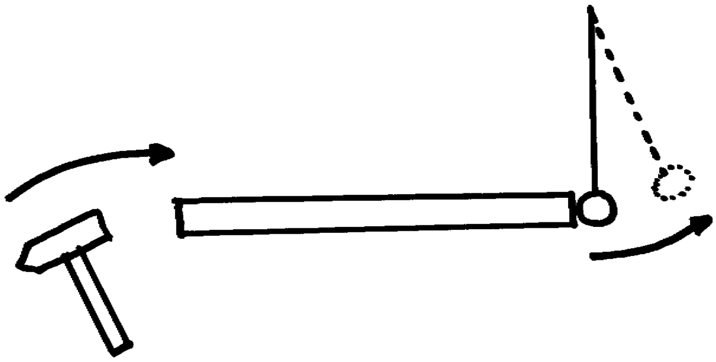
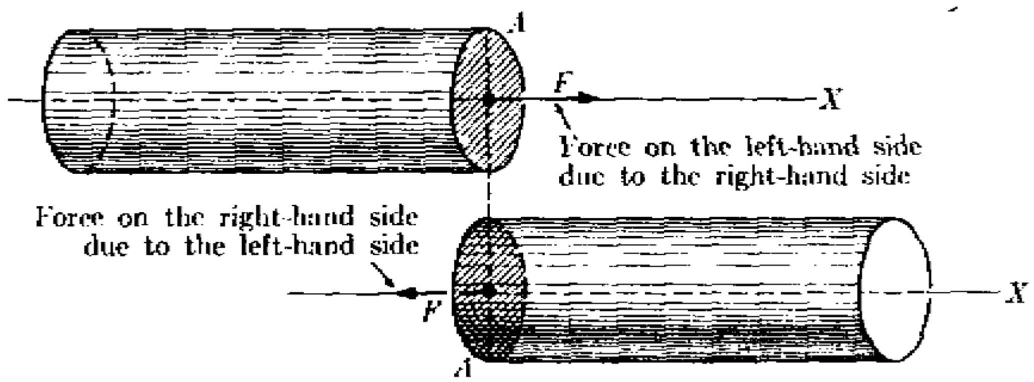
Fale sprężyste:

Propagacja fali w pręcie:



Jak się rozchodzi?

Od czego zależy prędkość?



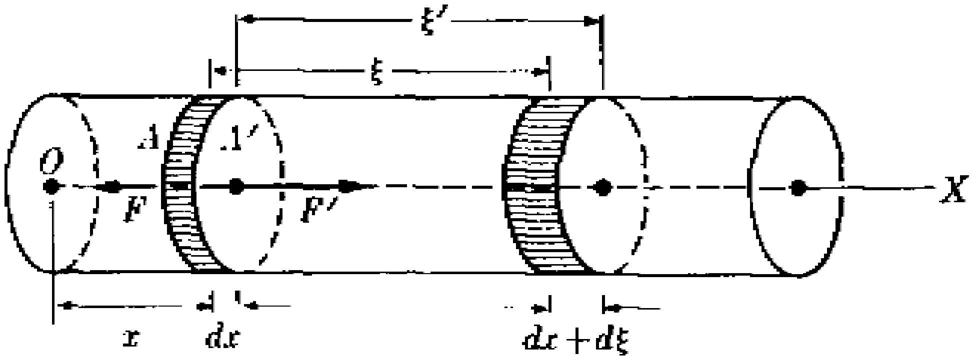
Naprężenie $s = \frac{F}{A}$ (A – pole przekroju) $[s] = N/m^2$

Pod działaniem naprężenia – przesunięcie ξ

Jeśli $\xi \neq f(x) \Rightarrow$ przesunięcie całości

Jeśli $\xi = f(x) \Rightarrow$ deformacja

Weźmy dwa przekroje *A* i *A'* odległe o *dx*:



Po przyłożeniu sił:

A przesunięte o ξ

A' przesunięte o ξ'

Odległość $A - A'$ w stanie zdeformowanym:

$$dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi$$

↑ deformacja

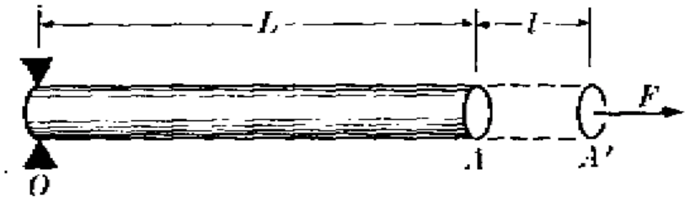
$\varepsilon = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ - odkształcenie (deformacja na jednostkę długości)

Naprężenie normalne $(s) \propto$ odkształcenia:

$s = E \cdot \varepsilon$ (prawo Hooke'a; E-moduł Younga)

$(s = F/A) \Rightarrow \underline{\underline{F = E \cdot A \dfrac{\partial \xi}{\partial x}}}$ (cząstkowa bo ew. *f(t)*)

Pręt (w równowadze) zamocowany na jednym końcu:



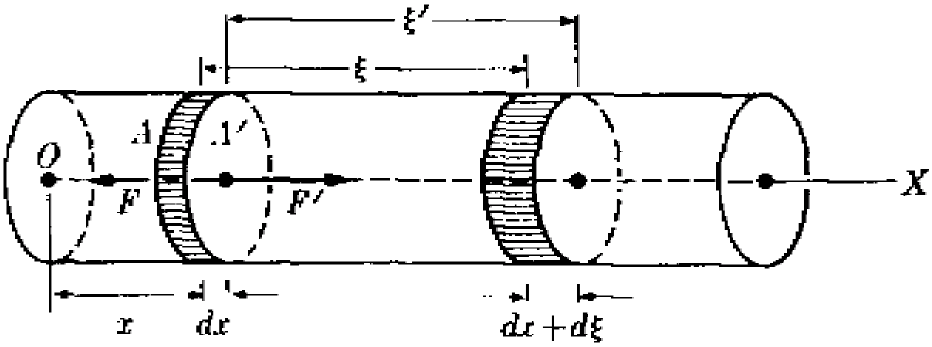
Siła dla każdego przekroju taka sama!

Deformacja dla przekroju w x:

$$\int_0^{\xi} d\xi = \frac{F}{EA}\int_0^{x} dx \quad \Rightarrow \xi = \frac{F}{EA}x$$

Deformacja ℓ (na końcu) $x = L \Rightarrow \underline{\ell = FL/EA}$

<u>Fala podłużna:</u>



Siła wypadkowa działająca na „plasterek":

$$dF = F' - F = \frac{\partial F}{\partial x}dx$$

ρ-gęstość, A-pole przekroju $\Rightarrow dm = \rho dV = \rho A dx$

Przyspieszenie: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$\underline{\frac{\partial F}{\partial x} = \rho\, A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}} \qquad (*)$$

Związek pomiędzy polem wychyleń $\xi = \xi(x,t)$, i polem siły $F = F(x,t)$

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = E\, A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} \qquad (**)$$

$c = \sqrt{E/\rho}$ - prędkość propagacji pola deformacji (stal-5*10^3 m/s).

Analogicznie:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad (***)$$

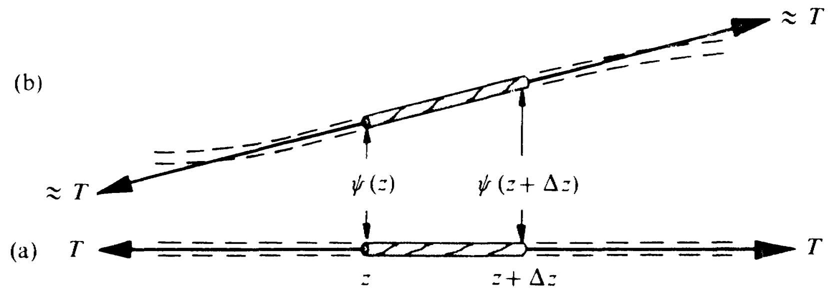
- pole siły propaguje się z tą samą prędkością co pole deformacji

Wynikanie tylko (*) $\Rightarrow$ (**) i (***).

Równania falowe mogą wynikać z innych r. pola.

Fala poprzeczna:

- rozpatrujemy poprzeczny ruch punktów na strunie w płaszczyźnie zawierającej oś z.



Z równania Newtona dla odcinka struny pomiędzy $z,\ z+\Delta z$:

$$\mu\,\Delta z\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\approx -T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_z+T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_{z+\Delta z}$$

- $\mu \Rightarrow$ masa jednostki długości struny.

Prawa strona – siła – różna od zera, gdy $\partial\Psi/\partial z$ zmienia się wzdłuż struny. Siła naprężenia występuje, gdy struna jest zakrzywiona.

$$\Delta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)\Delta z$$

$$\mu\,\Delta z\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)\cong T\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)\Delta z$$

$$\underline{\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\cong\frac{T}{\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)} \qquad\qquad c=\sqrt{T/\mu}$$

Uwzględniliśmy tylko wychylenie prostopadłe do kierunku propagacji, ale:

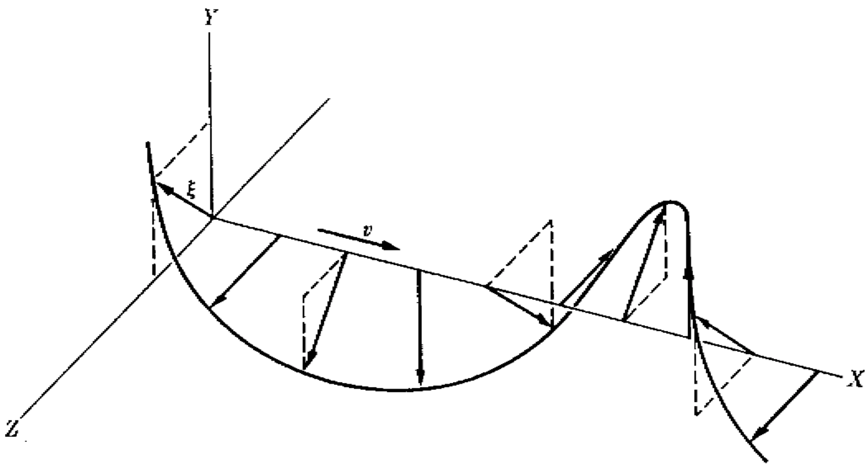
$$F_x = T\cos\alpha' - T\cos\alpha = T\left(\cos\alpha' - \cos\alpha\right) \approx 0$$

~1 ~1

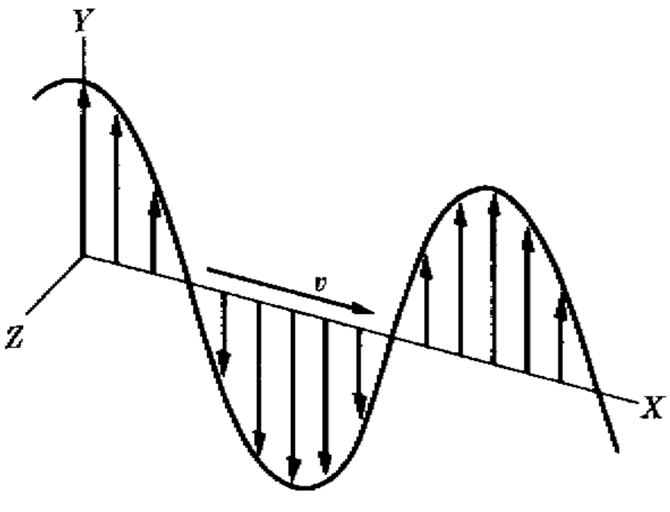
– fala poprzeczna, bo siła poprzeczna.

Polaryzacja fali poprzecznej:

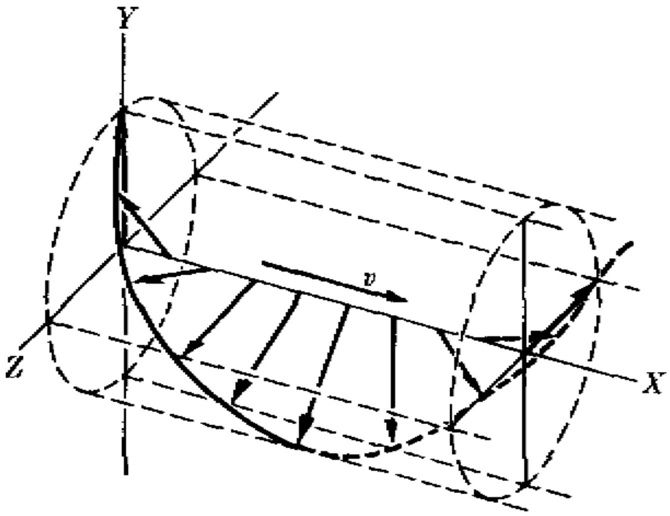
Brak polaryzacji:



Spolaryzowana liniowo:



Fala poprzeczna spolaryzowana kołowo:

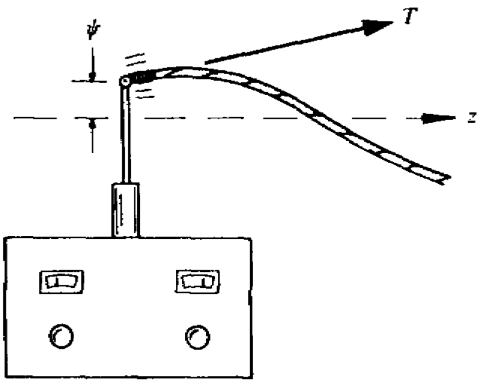


Odbicie fali:

Zakładaliśmy, że ośrodek, w którym rozchodzi się fala, jest nieskończony w obu kierunkach. Weźmy przypadek fali poprzecznej w strunie. Niech jeden koniec struny w $z = 0$, drugi w nieskończoności.

Niech zaburzenie $\Psi(t, z) = \Psi(ct - z)$ porusza się z prędkością c w kierunku $(+z)$.

Jaka siła musi działać na koniec struny w $z = 0$, aby wywołać falę poprzeczną?



W dowolnym momencie siła musi równoważyć poprzeczną składową napięcia struny:

$$F_{wzb} = -T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{T}{c}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{z=0} = (T\mu)^{1/2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_{z=0}$$

Siła działa od $\Psi = 0$, gdy dodatnia, do $\Psi = 0$, gdy ujemna.

$$\underline{F \propto \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_{z=0}}$$

$$\Psi(ct - z) \equiv \Psi(Z)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t} = c\frac{\partial\Psi}{\partial Z} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} &= \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{\partial\Psi}{\partial Z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -c\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

Siła zawsze proporcjonalna do chwilowej wartości prędkości końca struny

$$\Downarrow$$

W przypadku fali sinusoidalnej siła cały czas wyprzedza wychylenie o $\pi/2$, tak jak siła potrzebna do zrównoważenia siły oporu w przypadku drgań.
Ruch końca sprężyny nie odpowiada przyspieszaniu masy czy ściskaniu sprężyny, ale pokonywaniu oporu.
Rozpraszaniu energii odpowiada jej unoszenie przez falę.

<u>Impedancja charakterystyczna:</u>

$$Z_0 \equiv \left|(T\mu)^{1/2}\right|$$

- zależy od sprężyny i naprężenia.

$$F_{wym} = Z_0\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{z=0}$$

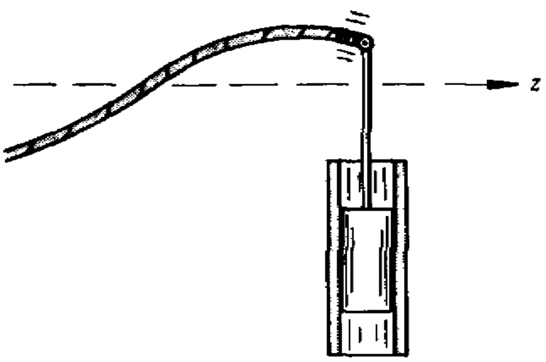
$$\left(T = Z_0 c; \qquad \mu = \frac{Z_0}{c}\right)$$

Co się dzieje na drugim końcu sprężyny?
Niech będzie on teraz w $z = 0$, a drganie wzbudzane w $z = -\infty$.
Dołączamy do wolnego końca w $z = 0$ identyczną sprężynę rozciągającą się do $+\infty$. Drgania nie ulegają zakłóceniu.
Aby tak było – koniec musi być dołączony do urządzenia dającego siłę równą prędkości chwilowej pomnożonej

przez $\left(-Z_0\right)$; minus, bo siła działa na strunę ze strony urządzenia wymuszającego drgania.

Zamiast dołączać „dalszy ciąg" struny, można dołączyć tłumik o odpowiednim tłumieniu (impedancji).

$$\left(Z = b + i\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \qquad Z = b \text{ dla } \omega = \omega_0\right)$$



Niech impedancja struny Z_1, impedancja tłumika Z_2.

Siła działająca na tłumik:

$$-T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_{z=0} = Z_1\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{z=0}$$

(Fala w kierunku $+z$).

Siła działania tłumika: $-Z_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{z=0}$.

Jeśli $Z_1 \neq Z_2$, niezrównoważona siła w $z=0$:

$$\left(Z_1 - Z_2\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{z=0} \neq 0$$

Problem:

$\Rightarrow$ przyspieszenie $\rightarrow \infty$ jeśli $m \rightarrow 0$?

Było: ogólne rozwiązanie równania falowego $\Rightarrow$

kombinacja zaburzeń biegnących w prawo i w lewo.

Niech $\Psi_i(t,z), \quad \Psi_r(t,z)$

$$\Psi(t,z) = \Psi_i(t,z) + \Psi_r(t,z)$$

Szukamy dodatkowych warunków, aby siła ze strony tłumika była równa sile od struny:

$$-T\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial z}\right)_{z=0} - T\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial z}\right)_{z=0} = Z_1\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial t} - \frac{\partial\Psi_r}{\partial t}\right)_{z=0}$$

(Dla $\Psi_i(+c), \quad \Psi_r(-c)$)

Przyrównując do siły oporu:

$$Z_1\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial t} - \frac{\partial\Psi_r}{\partial t}\right)_{z=0} = Z_2\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial t} + \frac{\partial\Psi_r}{\partial t}\right)_{z=0}$$

$$\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial t}\right)_{z=0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}\right)_{z=0}$$

$$\int dt \rightarrow \qquad \Psi_r(t,0) = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\Psi_i(t,0)$$

Relacja obu fal prawdziwa dla dowolnego *t*.

Dla $z = -\ell$:

$$\Psi_i\left(t - \frac{\ell}{c}, -\ell\right) = \Psi_i(t,0)$$

(Ruch w prawo, wartość Ψ_i w $z = 0$ taka, jak w $z = -\ell$ w chwili o ℓ/c wcześniejszej.)

$$\Psi_r\left(t+\frac{\ell}{c},-\ell\right)=\Psi_r(t,0)$$

(Ruch w lewo, wartość Ψ_r w $z=0$ taka, jak w $z=-\ell$ w chwili o ℓ/c później.)

$$\Psi_r\left(t+\frac{\ell}{c},-\ell\right)=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\Psi_i\left(t-\frac{\ell}{c},-\ell\right)$$

- wychylenie w $z=-\ell$ przy przejściu Ψ_r jest proporcjonalne do wychylenia wywołanego przez przejście Ψ_i w chwili o $2\ell/c$ wcześniejszej.

$\Rightarrow$ Prawdziwe dla wszystkich ℓ, jeżeli kształt Ψ_r taki jak Ψ_i, ale w przeciwnym kierunku, a amplituda zmieniona w stosunku

$$R=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$2\ell/c$–czas dojścia Ψ_i do końca struny (w odległości ℓ) i powrotu: Ψ_r - przeskalowane odbicie zwierciadlane Ψ_i

$$\Downarrow$$

Częściowe odbicie na końcu struny.

Ψ_i - zaburzenie padające,

Ψ_r - zaburzenie odbite,

R - współczynnik odbicia.

Jeśli koniec struny swobodny w kierunku Ψ:

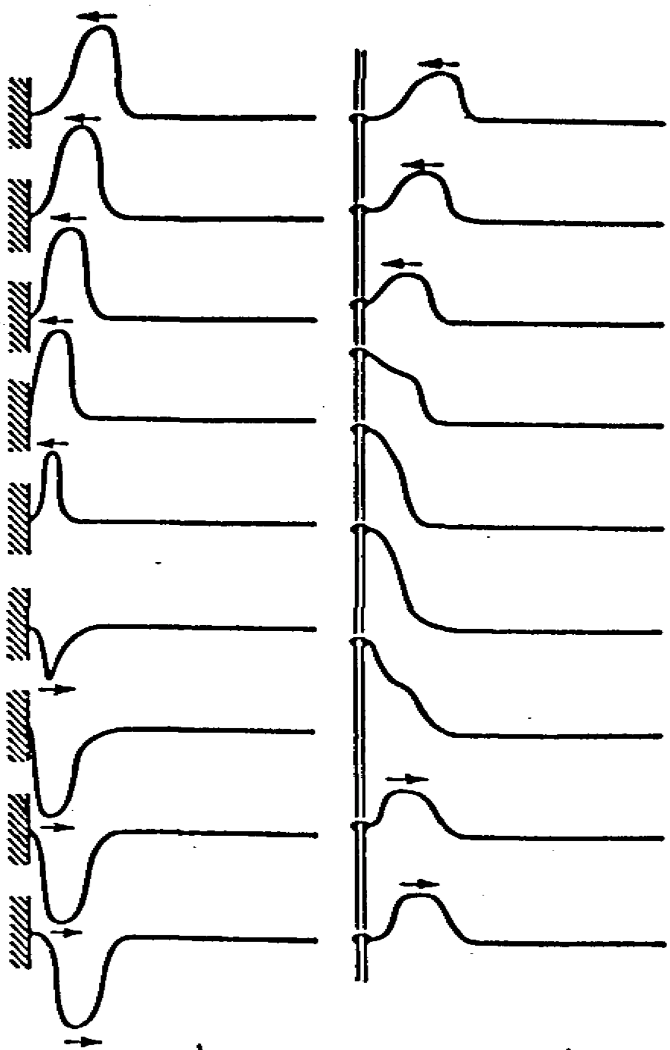
$Z_2 = 0 \Rightarrow R = 1$ - całkowite odbicie.

W ogólności: $-1 \leq R \leq 1$

$R < 0$ oznacza, że fala przesunięta o π - obrócona i przeskalowana przy odbiciu.

Jeśli koniec zamocowany: $Z_2 = \infty \Rightarrow R = -1$.

Jeśli $Z_1 = Z_2 \Rightarrow R = 0$ - nie ma odbicia – dopasowanie.



a) b)

Transmisja przez granicę dwu ośrodków:

Sprężyna $Z_1; c_1$ dołączona do drugiej (Z_2) nieskończonej, w której rozchodzi się zaburzenie Ψ_t z prędkością c_2.

Dla $x = 0$: $\Psi_i(t,0) + \Psi_r(t,0) = \Psi_t(t,0)$

$\Psi_r(t,0) = R\Psi_i(t,0)$

$$\Downarrow$$

$\Psi_t(t,0) = (1+R)\Psi_i(t,0)$

$\mathrm{T}_{1,2} \equiv 1 + R = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ - współczynnik transmisji

Wystąpi także różnica w długości fal – padającej i przechodzącej – ściśnięcie lub rozciągnięcie w stosunku c_2/c_1.

$$0 \le \mathrm{T}_{1,2} \le 2$$

$\mathrm{T}_{1,2}$ zawsze dodatnie – nie ma „odwrócenia".

$Z_2 > Z_1$–amplituda fali przechodzącej mniejsza od padającej, $Z_2 < Z_1$– większa.

Co z zasadą zachowania energii?

Jeśli naciąg struny jednakowy – $Z_2 < Z_1$ oznacza, że druga struna jest lżejsza.

Maksimum transmisji dla $Z_2 = 0$ (w praktyce – druga bardzo lekka)

Jeżeli naciąg strun jednakowy:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{c_2}{c_1}; \qquad Z_0 \equiv \left|(T\mu)^{1/2}\right|; \; c = \sqrt{T/\mu}$$

$$R = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}; \qquad \mathrm{T}_{1,2} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}$$