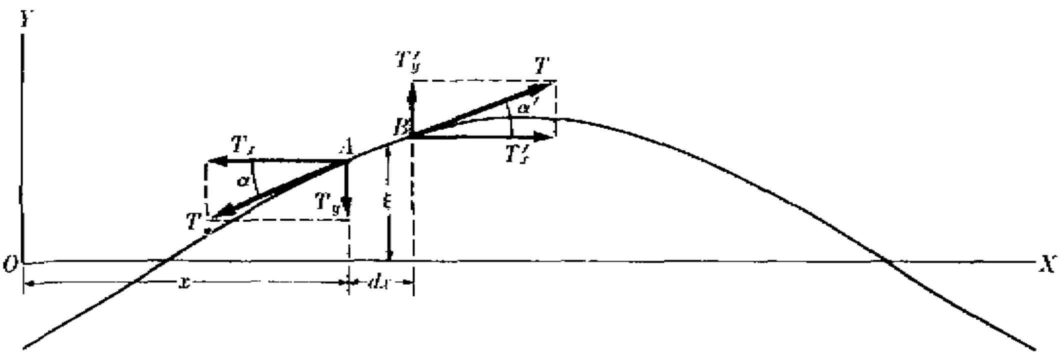
Propagacja energii:

W odcinku struny może być zgromadzona energia kinetyczna (ruch) i potencjalna (rozciąganie).

Chwilowa wartość energii kinetycznej na jednostkę długości: $\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2$ - gęstość energii kinetycznej.

Energia potencjalna, wynik rozciągania, zależy od lokalnego naprężenia struny.



Długość wychylonego odcinka, który w równowadze miał długość Δz (małe odkształcenie):

$$\Delta z\left[1+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2} \cong \Delta z\left[1+\frac{1}{z}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]$$

Zmiana długości – efekt pracy przeciw naprężeniu T $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ zgromadzona energia potencjalna: $\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2$.

Całkowita gęstość energii

$$w(z,t)=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2=$$

$$=\frac{Z_0}{2c}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right] \qquad (1)$$

Dla fali biegnącej: $\frac{\partial\Psi}{\partial t}\pm c\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0$

W (1) człony po prawej stronie równe – chwilowe wartości gęstości energii kinetycznej i potencjalnej są równe w każdym punkcie struny w której biegnie fala.

<u>Strumień energii</u>

Jak szybko energia przepływa z lewa na prawo przez punkt z struny?

Bezpośrednio na prawo od z działa na strunę siła od części struny na lewo od z: $-T\frac{\partial\Psi}{\partial z}$, która wykonuje pracę, gdy punkt z porusza się od $\Psi=0$, tzn. $\frac{\partial\Psi}{\partial t}>0$.

Szybkość wykonywania pracy:

$$P(z,t)=-T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)=-Z_0c\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)$$

- przechodząca z lewa na prawo przez z moc.

Dla fali biegnącej:

$$P(z,t) = \pm \frac{T}{c}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = \pm Z_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2$$

$P(z,t) = \pm c w(z,t)$ (patrz 1)

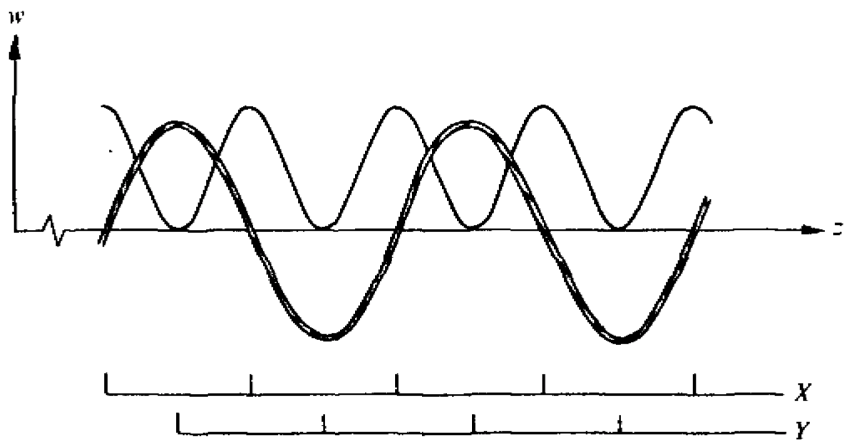
$P(z,t) > 0$ dla fali biegnącej w prawo $\rightarrow$ energia jest przekazywana w kierunku ruchu fali.

W ogólności:

$P(z,t) = \pm a c w(z,t)$ - a - przekrój

Dla biegnącej fali sinusoidalnej:

Z (1) $\Rightarrow$ $w(z,t) = (Z_0/2c)(\omega^2 + c^2 k^2) A^2 \sin^2(\omega t - kz + \phi)$



W punktach:

X - maksimum prędkości poprzecznej i nachylenia

Y – struna stacjonarna, nachylenie zero.

$I(z,t) \equiv \langle P(z,t) \rangle / a$ - natężenie fali $[I] = 1\,W/m^2$

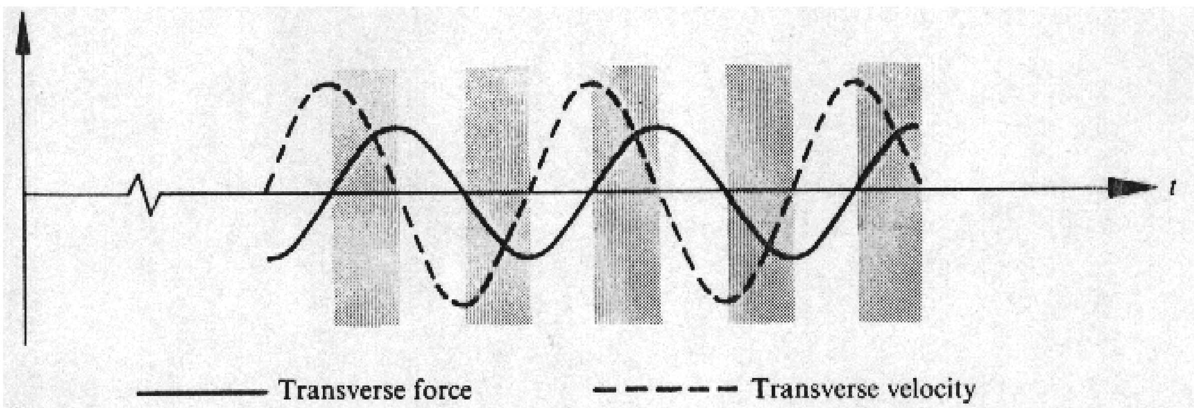
$$\underline{I = c\langle w \rangle} \qquad I \propto \omega^2, A^2$$

<u>Fala stojąca:</u>

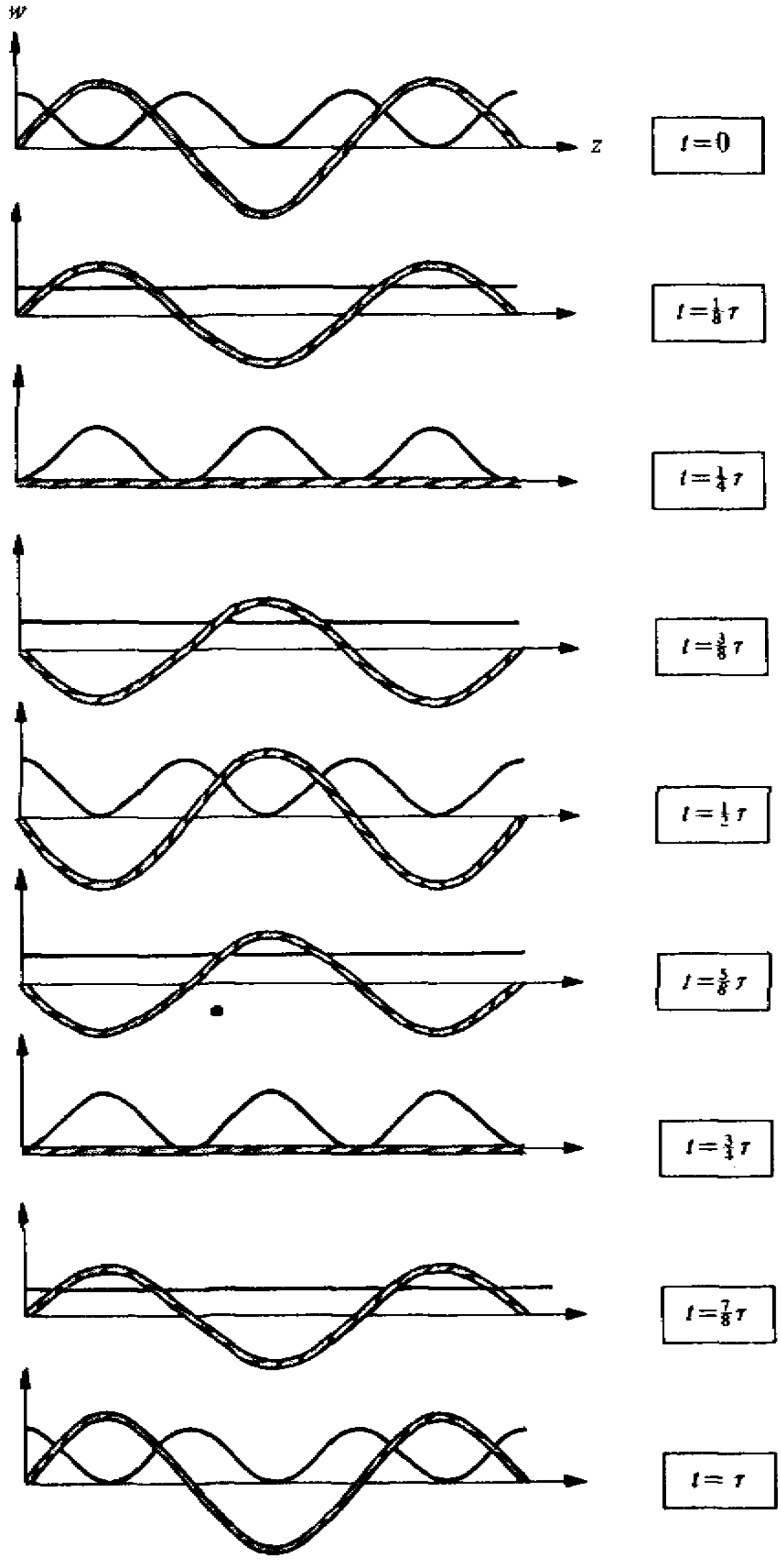
Zmienne z,t rozseparowane.

Siła poprzeczna -$-T\dfrac{\partial \Psi}{\partial z}$ w fazie z wychyleniem,

prędkość poprzeczna przesunięta o 90^0.



Iloczyn znika – nie ma przepływu energii wzdłuż struny. Jest jej przemieszczanie się pomiędzy węzłami i strzałkami.


w
z
t=0
t=1/8 T
t=1/4 T
t=3/8 T
t=1/2 T
t=5/8 T
t=3/4 T
t=7/8 T
t= T

Fale tłumione:

Jeżeli ruch falowy w ośrodku z oporem – dodatkowa siła działająca na odcinek struny Δz: $-\beta\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\Delta z$

β - opór na jednostkę długości.

Z równania ruchu:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cong \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

(*) $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \Gamma\frac{\partial \Psi}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}; \qquad \Gamma \equiv \frac{\beta}{\mu}$$

Czy to jest równanie falowe, tzn. czy jest spełnione przez funkcję $f(\omega t - kz)$?

Załóżmy $\Psi = \mathrm{Re}\{D\exp[i(\omega t - kz)]\}$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathrm{Re}\{-\omega^2 D\exp[i(\omega t - kz)]\}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \mathrm{Re}\{-k^2 D\exp[i(\omega t - kz)]\}$$

Równanie (*) jest spełnione dla:

$$\omega^2 - i\Gamma\omega = c^2 k^2$$

- pojawił się dodatkowy człon.

ω - rzeczywiste $\Rightarrow$ k^2, k - zespolone

Niech $k = k_1 - ik_2$, k_1, k_2 - rzeczywiste

$$\Psi = \mathrm{Re}\{D\exp[i(\omega t - k_1 z + ik_2 z)]\} =$$
$$= \exp(-k_2 z)\mathrm{Re}\{D\exp[i(\omega t - k_1 z)]\}$$

$\frac{\Gamma}{\omega}$ - dla danej ω jest miarą tłumienia.

1. Bardzo słabe tłumienie $\Rightarrow$ $\left[\frac{\Gamma}{\omega} << 1\right]$.

$$\omega^2\left(1 - i\frac{\Gamma}{\omega}\right) = c^2 k^2$$

$$\omega\left(1 - i\frac{\Gamma}{2\omega}\right) \cong \pm c(k_1 - ik_2)$$

$$k_1 \approx \pm\frac{\omega}{c}; \quad k_2 = \pm\frac{\Gamma}{2c}$$

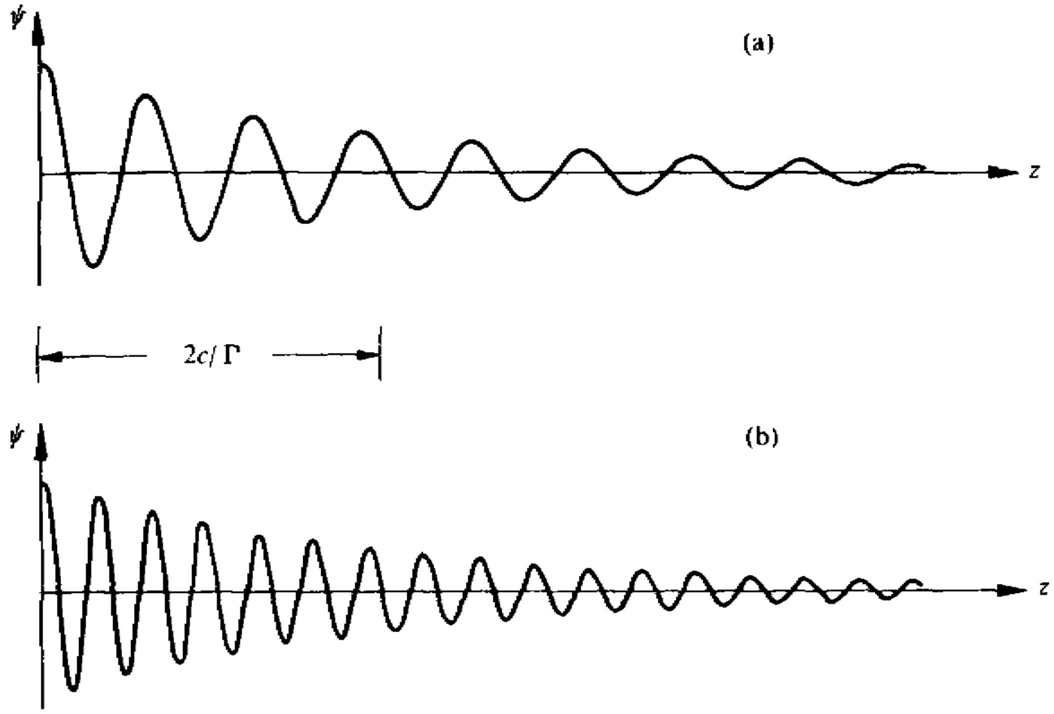
$$\Psi = \exp\left((\mp\Gamma / 2c)z\right)\mathrm{Re}\left\{D\exp\left[i\left(\omega(t \mp z/c)\right)\right]\right\}$$

Fala sinusoidalna tłumiona czynnikiem $\exp(-k_2 z)$, k_2 - stałe.

Punkty struny drgają harmonicznie. Punkty odległe o $\frac{2\pi c}{\omega}$ drgają w fazie. Punkt stałej fazy porusza się z prędkością c, niezależną od częstości.

Amplituda w z_2 e-krotnie mniejsza niż w $z_1 = z_2 - \frac{2c}{\Gamma}$

k_2/k_1 małe $\rightarrow$ w jednej długości zaniku $1/k_2$ mieści się wiele długości fali.



Bardzo silne tłumienie $\Rightarrow \left(\frac{\Gamma}{\omega} >> 1\right)$.

$$-i\Gamma\omega \cong c^2 (k_1 - ik_2)^2$$

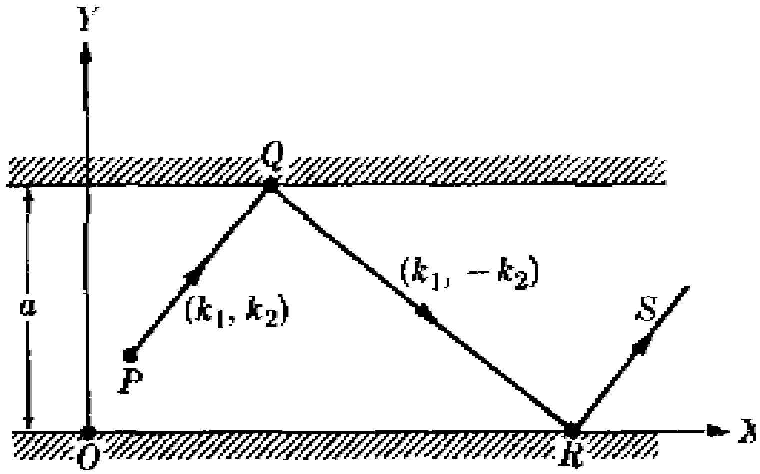
$$(-i)^{1/2} = \pm\frac{(1-i)}{2^{1/2}} \Rightarrow \qquad k_1 - ik_2 \cong \pm(1-i)\left|\left(\frac{\Gamma\omega}{2c^2}\right)^{1/2}\right|$$

- prawie nie ma fali
- kształt prawie nie zależy od ω
- długość tłumienia proporcjonalna do $\frac{1}{\omega^{1/2}}$, t.zn. dla danego Γ coraz krótszy jest odcinek struny w którym występuje ruch falowy.

W elektrodynamice – tłumienie prądów zmiennych o dużej częstości na niewielkiej głębokości od powierzchni – efekt naskórkowy.

$\left(\frac{2c^2}{\Gamma\omega}\right)^{1/2}$ - głębokość wnikania.

Falowód:



$$k_1 \| x, \qquad k_2 \| y$$

- dwie fale (k_1, k_2) i $(k_1, -k_2)$

$$\xi = \xi_0 \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + \xi_0' \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)]$$

Warunki:

(1) $\xi(y=0) = 0$;

(2) $\xi(y=a) = 0$

z (1) $\xi = (\xi_0 + \xi_0')\sin(\omega t - k_1 x) = 0$

$$\Downarrow$$

$$(\xi_0 + \xi_0') = 0 \Rightarrow \xi_0 = -\xi_0'$$

$$\xi = \xi_0 \{\sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)]\}$$

$$\xi = -2\xi_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x)$$

z (2) $\sin k_2 a = 0 \Rightarrow k_2 = \dfrac{n\pi}{a}$

Nie ma rozdzielenia zmiennych czasowej i przestrzennych – fala biegnąca w kierunku x z prędkością $\upsilon_p = \dfrac{\omega}{k_1} = \left(\dfrac{k}{k_1}\right) c$

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \Rightarrow k_1 \le k$$

- prędkość propagacji w falowodzie większa od prędkości fazowej w nieograniczonej przestrzeni.

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

$$k^2 = k_1^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$$

k_1 - rzeczywiste $\Rightarrow \dfrac{\omega^2}{c^2} \ge \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$

Tylko fale o częstości $\omega \ge \dfrac{n\pi c}{a}$; $(\nu \ge \dfrac{nc}{2a})$ mogą rozchodzić się w falowodzie.

W kierunku x rozchodzi się fala o amplitudzie zmodulowanej w kierunku y.