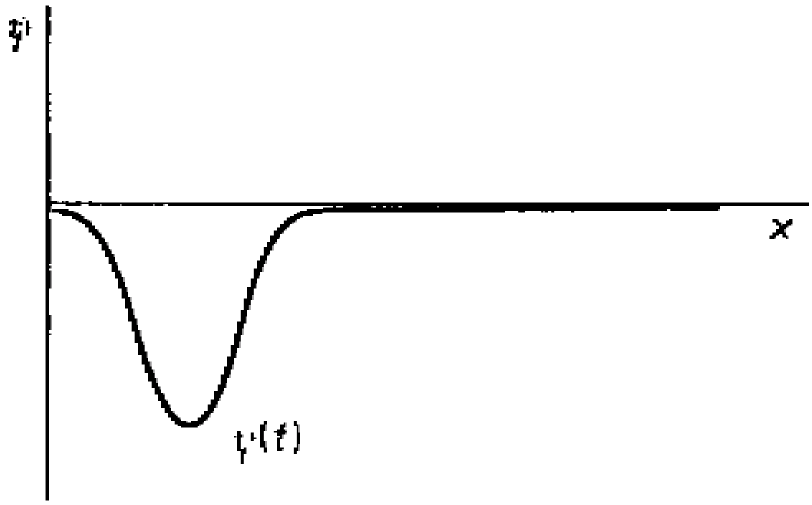
Ruch falowy:

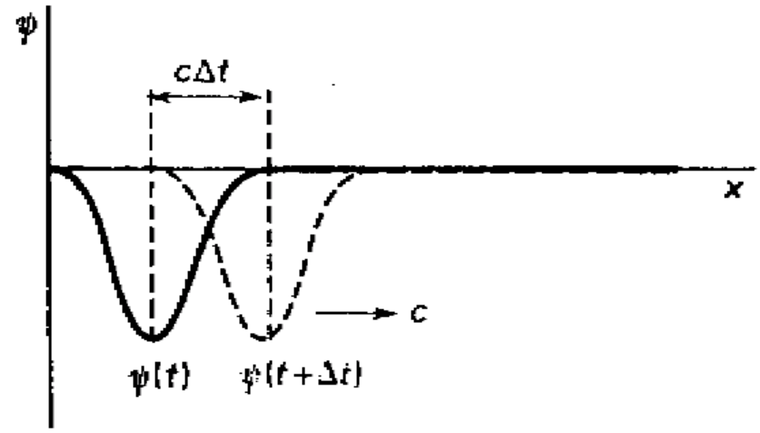
Fala – rozchodzące się w przestrzeni zaburzenie lub odkształcenie (pole).

- impuls lub drgania



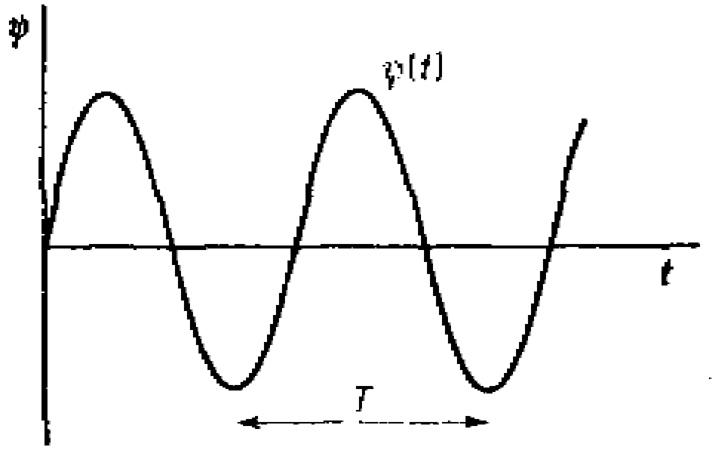
.

Jeśli rozchodzi się z prędkością c to po czasie Δt:

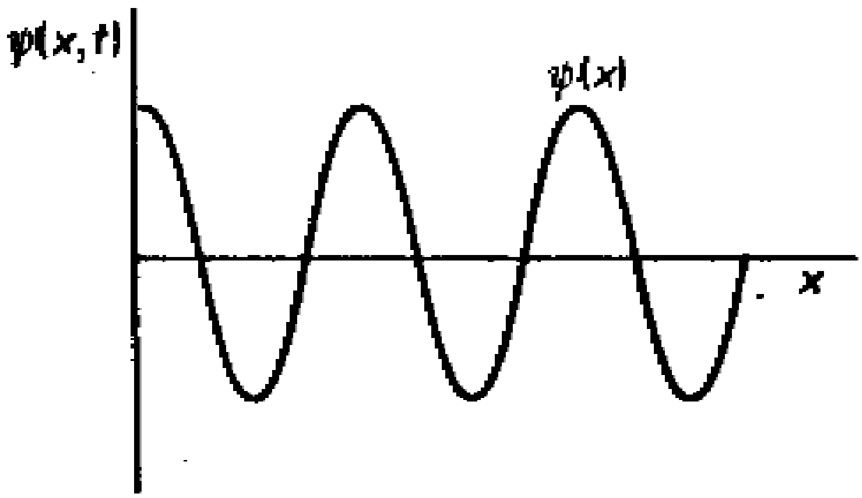


$\Psi = \Psi(\bar{r}, t)$ - funkcja falowa, równanie fali

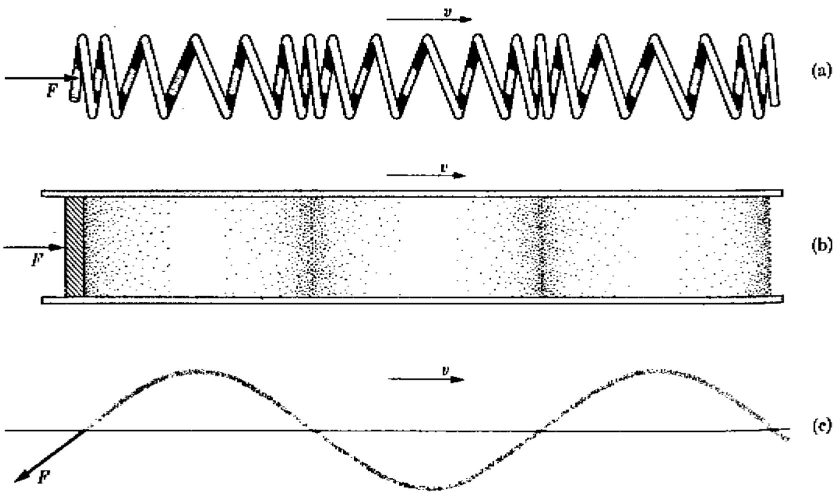
Dla ustalonego $\bar{r} = \bar{r}_0 \Rightarrow \Psi = \Psi(\bar{r}_0, t)$ - drgania w punkcie $\bar{r}_0$:



Dla ustalonego $t = t_0 \Rightarrow \Psi = \Psi(\bar{r}, t_0)$ - przestrzenny rozkład wychyleń:



Ogólniej: zaburzenie pola opisującego własność fizyczną – pole elektromagnetyczne, deformacja, ciśnienie, temperatura, pole grawitacyjne



W zależności od geometrii wzbudzenia – fale skalarne lub wektorowe.

Dla fali skalarnej:

$$\Psi = \Psi(\bar{r}, t)$$

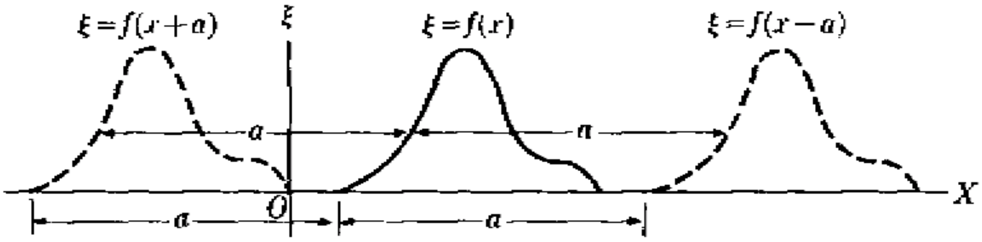
(np. fale dźwiękowe).

Dla fali wektorowej:

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}(\bar{r}, t)$$

(np. fale elastyczne, fale elektromagnetyczne).

Fala $\rightarrow$ „powtarzanie z opóźnieniem”.



W układzie poruszającym się wzdłuż osi x wraz z zaburzeniem kształt jest dany przez $\Psi = \Psi(x')$ i nie zmienia się (przy <u>braku dyspersji</u>).

$$x' = x - ct \qquad (x \text{ - w laboratoryjnym})$$

$$\underline{\Psi = \Psi(x - ct)}$$

Po czasie Δt:

$\Psi[x + c\Delta t - c(t + \Delta t)] = \Psi(x - ct)$ - kształt jest zachowany!

Dla ruchu w lewo $(-x)$: $\Rightarrow \Psi = \Psi(x + ct)$

$$\underline{\Psi = \Psi(x \mp ct)}$$

<u>Równanie falowe:</u>

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = \mp c \frac{\partial \Psi}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{d}{dx'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{d^2\Psi}{dx'^2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{d}{dx'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial x'}{\partial t}=c^2\,\frac{d^2\Psi}{dx'^2}$$

$$\underline{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}}$$

Równanie dla fali jednowymiarowej

Fale liniowe:

Zasada superpozycji: – jeżeli funkcje $\Psi_1(x,t),\Psi_2(x,t)\ldots\Psi_n(x,t)$ są rozwiązaniami równania falowego, to ich kombinacja liniowa:

$\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{n}C_i\Psi_i(x,t)$ spełnia to równanie.

Jeśli dwie fale Ψ_1 i Ψ_2 $\left\{\begin{array}{ll} & \dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}\\ + & \dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2}\end{array}\right.$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_1+\Psi_2)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Psi_1+\Psi_2)$$

Rozchodzenie się liniowych wzbudzeń lub pól wektorowych nie jest zakłócane przez inne wzbudzenia i pola wektorowe.

Fala harmoniczna:

$\Rightarrow$ funkcja falowa ma postać $\Psi(x,t) = A\sin k(x \mp ct)$

lub $\Psi(x,t) = A\cos k(x \mp ct)$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 A\sin k(x \mp ct) =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[-k^2c^2 A\sin k(x \mp ct)\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Dla $x = 0 \Rightarrow \Psi(t) = A\sin(\mp kct) = \mp A\sin kct$

- drgania harmoniczne $\rightarrow kc = \omega \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT}$

Dla $t = 0 \Rightarrow \Psi(x) = A\sin kx = A\sin\frac{2\pi}{cT}x$

- zaburzenie ma w przestrzeni kształt harmonicznej funkcji x - okresowość przestrzenna!

$$\Psi(x \mp ncT) = A\sin\frac{2\pi}{cT}(x \mp ncT) =$$

$$= A\sin\left(\frac{2\pi x}{cT} \mp n \cdot 2\pi\right) = A\sin\frac{2\pi}{cT}x = \Psi(x)$$

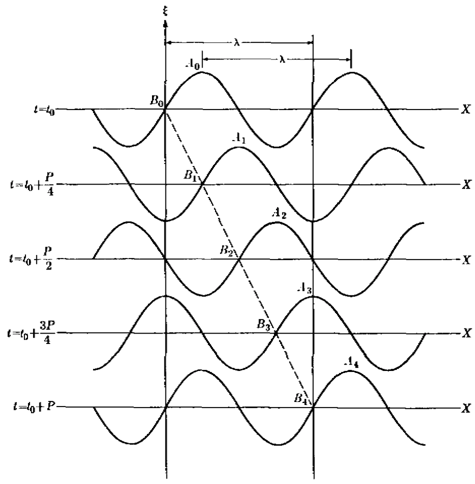
$\underline{cT = \lambda}$ - długość fali

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - liczba długości fali w długości 2π

k - liczba falowa

Maksima i minima przesuwają się z prędkością c

- λ pozostaje ta sama.



Fala harmoniczna przesuwa się o λ w ciągu okresu.

<u>Prędkość fazowa:</u>

Faza $\varphi = kx \mp \omega t \rightarrow \varphi = f(x,t)$

Dla $x = 0, t \neq 0 \rightarrow \varphi = \mp\omega t$

Dla $x = 0,\ t = 0 \rightarrow \varphi = 0$

Dla $x \neq 0, t = 0 \rightarrow \varphi = kx$

Ogólnie $\varphi = kx \mp \omega t + \varphi_0$

$$\underline{\Psi = A\sin(kx \mp \omega t + \varphi_0)}$$

Dla $x = 0$ i $t = 0 \rightarrow \Psi = A\sin\varphi_0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mp\omega \; ; \; \frac{\partial\varphi}{\partial x} = k \qquad \frac{\partial\varphi / \partial t}{\partial\varphi / \partial x} = \frac{\partial x}{\partial t} = \pm\frac{\omega}{k}$$

$\underline{c = \pm\frac{\omega}{k}}$ prędkość fazowa $\quad c = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\cos(kx - \omega t), \\ A\cos k(x - ct), \\ A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right), \\ A\cos\omega\left(\frac{x}{c} - t\right) \\ B_p\cos(kx - \omega t) + B_q\sin(kx - \omega t) \\ C\exp[i(kx - \omega t)] + C^*\exp[-i(kx - \omega t)] \\ \mathrm{Re}\{D\exp[i(kx - \omega t)]\} \end{cases} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Fala nieharmoniczna:

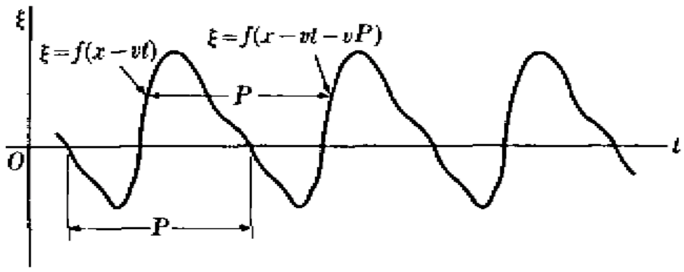


Fig. 18–6. Nonharmonic periodic wave at a given point.

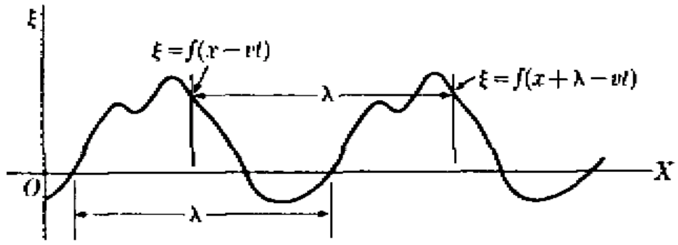


Fig. 18–7. Nonharmonic periodic wave at a given time.

Było: dowolny ruch periodyczny można przedstawić jako superpozycję ruchów harmonicznych o częstościach $0,\ \omega,\ 2\omega,\ 3\omega...$

Niech $\Psi = f(x - ct)$ - ruch falowy periodyczny - w danym punkcie powtarza się dla $T,\ 2T...nT$

$$\Psi = f(x - ct) = f[x - c(t \pm T)] = f(x - ct \mp cT)$$

Dla danego $t \rightarrow \Psi$ powtarza się, gdy x rośnie lub maleje o $ncT(n\lambda)$

Ruch falowy periodyczny w czasie jest periodyczny w przestrzeni.

Niech $\Psi = f(x)$ - funkcja periodyczna w przestrzeni z okresem λ, $f(x) = f(x+\lambda)$

Z twierdzenia Fouriera:

$$\Psi(x) = a_0 + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \ldots + a_n \cos nkx + \ldots + \\ + b_1 \sin kx + b_2 \sin 2kx + \ldots + b_n \sin nkx + \ldots$$

gdzie $\underline{k = \dfrac{2\pi}{\lambda}}$ (odpowiada ω, gdy pisaliśmy dla drgań)

$$\Psi = f(x-ct) = a_0 + a_1 \cos k(x-ct) + a_2 \cos 2k(x-ct) + \\ + \ldots + b_1 \sin k(x-ct) + b_2 \sin 2k(x-ct) + \ldots$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

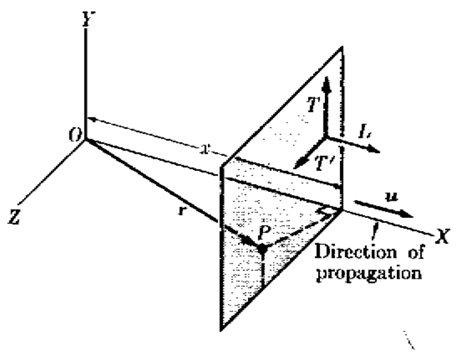
$$\underline{\omega = k \cdot c}$$

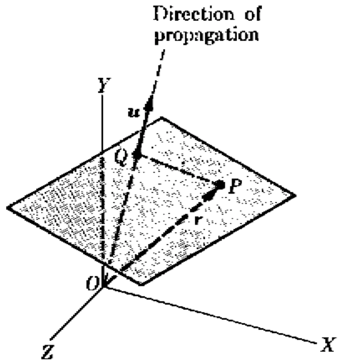
$$\lambda = \upsilon \cdot T = \frac{\upsilon}{f}$$

$$\Psi = a_0 + a_1 \cos(kx - \omega t) + a_2 \cos 2(kx - \omega t) + \ldots + \\ + a_n \cos n(kx - \omega t) + \ldots + b_1 \sin(kx - \omega t) + \\ + b_2 \sin 2(kx - \omega t) + \ldots + b_n \sin n(kx - \omega t) + \ldots$$

Każdy periodyczny ruch falowy może być przedstawiony jako superpozycja harmonicznych ruchów falowych o częstościach ω, 2ω... i długościach fali λ, $\frac{\lambda}{2}$,...

Fala płaska:





Równanie powierzchni stałej fazy:

$\varphi = kx \pm \omega t + \varphi = const$ - jeśli płaszczyzna – fala płaska.

Fala płaska charakteryzuje się jednym kierunkiem propagacji

opisanym przez wersor $\overline{u}$; $\left|\overline{u}\right| = 1$.

skalarna: $\Psi = \Psi\left(\overline{r}, t\right) = \Psi\left(\overline{r} \cdot \overline{u}, t\right)$

wektorowa: $\overline{\Psi} = \overline{\Psi}\left(\overline{r}, t\right) = \overline{\Psi}\left(\overline{r} \cdot \overline{u}, t\right)$

Powierzchnia falowa fali płaskiej:

$$\overline{r} \cdot \overline{u} = C = const$$

Niech kierunek propagacji z:

skalarna: $\Psi = \Psi\left(\overline{r}, t\right) = \Psi(z, t)$

wektorowa: $\overline{\Psi} = \overline{\Psi}\left(\overline{r}, t\right) = \overline{\Psi}(z, t) =$

$$= \left[\Psi_x(z,t), \Psi_y(z,t), \Psi_z(z,t)\right]$$

bo $\overline{u} = [0,0,1] \Rightarrow \overline{r} \cdot \overline{u} = z$

powierzchnie falowe równoległe do płaszczyzny xy.

Fala podłużna:

$$\overline{\Psi}_L = \overline{\Psi}_L(\overline{r},t) = \overline{\Psi}_L(z,t) = [0,0,\Psi_z(z,t)]$$

$$\underline{rot\,\overline{\Psi}_L(\overline{r},t) = 0}$$

Fala poprzeczna:

$$\overline{\Psi}_T = \overline{\Psi}_T(\overline{r},t) = \overline{\Psi}_T(z,t) = [\Psi_x(z,t),\Psi_y(z,t),0]$$

$$\underline{div\,\overline{\Psi}_T(\overline{r},t) = 0}$$

Polaryzacja liniowa fali poprzecznej – stała orientacja $\overline{\Psi}_T$ nie zależy od czasu t i położenia z.

Można opisać jednostkowym wektorem polaryzacji $\overline{p}$; $|\overline{p}| = 1$

$$\overline{\Psi}_T = \overline{\Psi}_T(\overline{r},t) = \overline{\Psi}_T(z,t) = \Psi_T(z,t)\overline{p}$$

$$\overline{p} = [\cos\gamma, \sin\gamma, 0] = const$$

γ - kąt w płaszczyźnie fazowej względem pionu (x).

Równoważność fal skalarnych i wektorowych:

Fala skalarna $\Psi(\overline{r},t)$ jest równoważna podłużnej fali wektorowej $\overline{\Psi}_L(\overline{r},t)$:

$$\overline{\Psi}_L(\overline{r},t) = -grad\,\Psi(\overline{r},t)$$

fala skalarna $\Leftrightarrow$ potencjał fali wektorowej

$$rot\,\overline{\Psi}_L(\overline{r},t) = -rot\{grad\,\Psi(\overline{r},t)\}$$

$$\Psi(\overline{r},t) = -\int_{r_0}^{r_1} \overline{\Psi}_L(\overline{r},t)\,d\overline{r}$$

wektorowa podłużna $\Rightarrow$ skalarna

Przykład:

Dźwięk w gazie lub cieczy: falę skalarną ciśnienia (gęstości) można przedstawić jako wektorową falę podłużną wychylenia.

Dla $\Psi = A\sin k(\overline{u}\cdot\overline{r} - ct)$ - harmoniczna fala płaska

$\overline{k} \equiv k\cdot\overline{u}$ - wektor propagacji

$$\underline{\Psi = A\sin(\overline{k}\,\overline{r} - \omega t)}$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= A\sin(\overline{k}\cdot\overline{r} \mp \omega t) \\ \Psi &= Ae^{i(\overline{k}\,\overline{r} \pm \omega t)} \end{aligned}\right\}\text{harmoniczna fala płaska}$$

<u>Czoło fali</u> – powierzchnia fazowa oddzielająca obszar przestrzeni zaburzony przez rozchodzącą się falę od obszaru, który jeszcze nie został zaburzony.

Czoło fali jest powierzchnią stałej fazy.

Czoło fali płaskiej jest płaszczyzną $\overline{k}\cdot\overline{r} = const.$

Fala trójwymiarowa:

$$\bar{k} = k_x \bar{x}^0 + k_y \bar{y}^0 + k_z \bar{z}^0 \qquad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\Psi(x, y, z, t) = Ae^{i\left(k_x x + k_y y + k_z z \pm \omega t\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

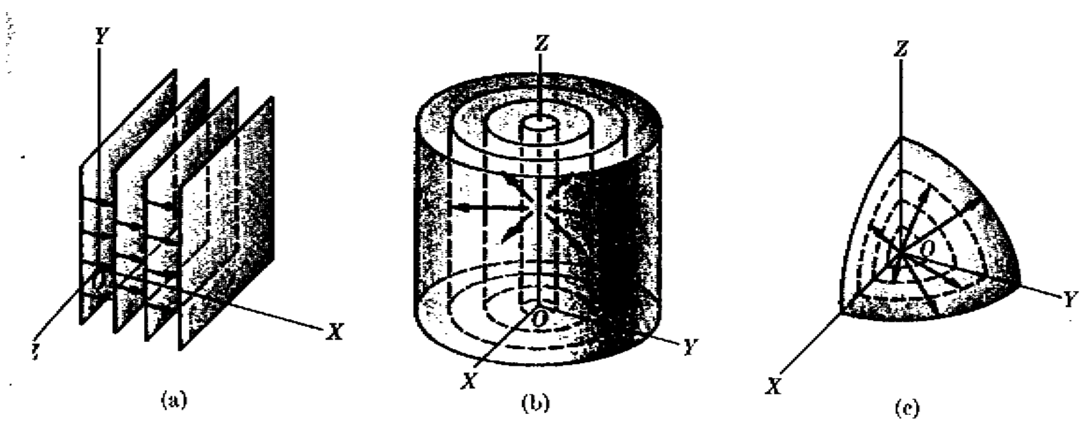
$$\nabla^2\Psi \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

$$\underline{\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}} \qquad c = \frac{\omega}{k}$$ - prędkość fazowa

Rozwiązanie harmoniczne:

$$\underline{\Psi(\bar{r}, t) = Ae^{i\left(\bar{k}\bar{r} \pm \omega t\right)}}$$

$$\Psi = \frac{1}{r}Ae^{i(kr \pm \omega t)} \qquad \Psi = \frac{A}{r}\sin(kr \mp \omega t)$$



(a) (b) (c)