Elementy analizy fourierowskiej:

W przypadku drgań było:

$$\Psi(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_f t + \phi_1) + A_2 \cos(2\omega_f t + \phi_2) + \ldots$$
$$+ A_n \cos(n\omega_f t + \phi_n) + \ldots$$

gdzie $\omega_f \equiv \dfrac{2\pi}{\tau}$

Można zapisać jako:

$$\Psi(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \exp(in\omega_f t) + C_n^* \exp(-in\omega_f t) \right]$$

gdzie C_n zawierają fazy i amplitudy.

$$(A\cos\varphi = 2\,\mathrm{Re}\,C; \quad A\sin\varphi = 2\,\mathrm{Im}\,C)$$

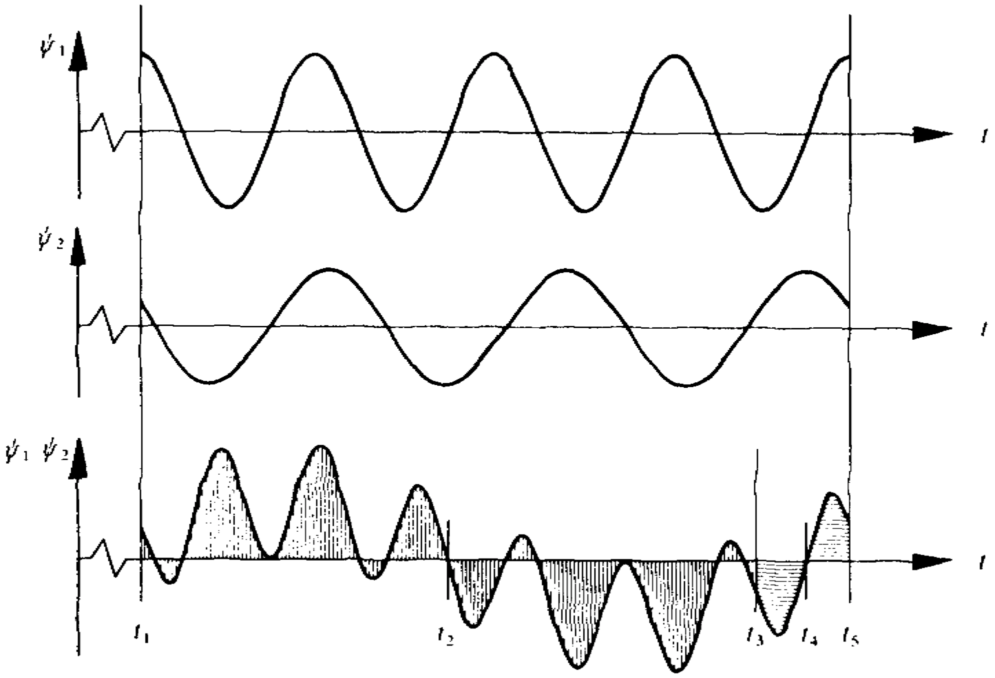
Niech $c_0 \equiv A_0; \qquad c_n \equiv C_n; \qquad c_{-n} \equiv C_n^*$

$$\Psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\omega_f t)$$

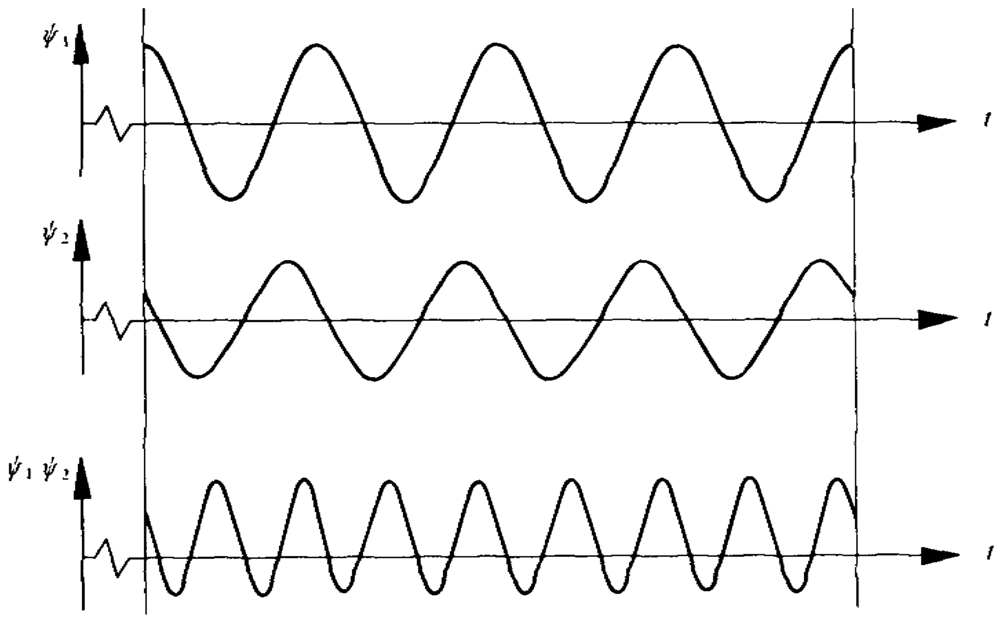
Analiza harmoniczna – poszukiwanie c_n.

Dla funkcji harmonicznej średnia po wielu kompletnych okresach równa zeru.

Dla dwu funkcji o różnych okresach średnia z ich iloczynu po wielu kompletnych okresach równa zero. Dla okresów równych $\neq 0$.



(a)



(b)

Niech $\Psi(t)$ funkcja o okresie τ, $\Psi'(t)$ funkcja o okresie τ/n.

$\int_\tau \Psi(t)\cdot\Psi'(t)=0$ dla wszystkich harmonik poza n-tą.

$$I=\int_\tau \Psi(t)\left[C\exp\left(in\omega_f t\right)+C^*\exp\left(-in\omega_f t\right)\right]dt$$

$$\frac{2\pi}{n\omega_f}\equiv\frac{\tau}{n}$$

Niech $I=I_n+I_{-n}$

$$I_n\equiv C\int_\tau \Psi(t)\exp\left(in\omega_f t\right)dt$$

$$I_{-n}\equiv C^*\int_\tau \Psi(t)\exp\left(-in\omega_f t\right)dt$$

Po podstawieniu $\Psi(t)$w postaci szeregu Fouriera pozostaną tylko wkłady do I_n, I_{-n} od n-tej harmonicznej (współczynniki c_n, c_{-n}).

$$I_{-n} \equiv C^* \int_\tau \left[c_{-n} \exp\left(-in\omega_f t\right) + c_n \exp\left(in\omega_f t\right)\right] \exp\left(-in\omega_f t\right) dt =$$

$$= c_n C^* \int_\tau dt =$$

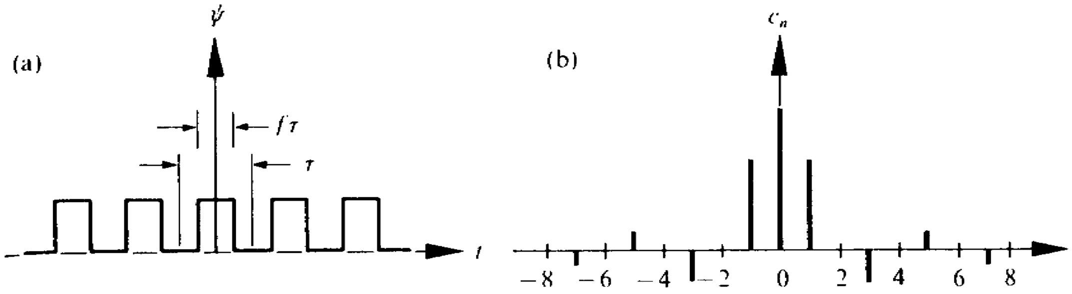
$$= c_n C^* \tau$$

$$c_n = \frac{I_{-n}}{C^* \tau}$$

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_\tau \Psi(t) \exp\left(-in\omega_f t\right) dt$$

Jeśli znamy $\Psi(t) \Rightarrow c_n$.

$$c_0 = \frac{1}{\tau} \int_\tau \Psi(t) dt$$



Nie zawsze widmo jest symetryczne względem $n = 0$.

Dla $\Psi(t)$ parzystej: $c_n = c_{-n} \quad \left(C_n^* = C_n\right)$

Dla $\Psi(t)$ nieparzystej: $c_n = -c_{-n}$

W ogólności: $\left|c_n\right| \neq \left|c_{-n}\right|$ - współczynniki Fouriera zespolone.

Twierdzenie Fouriera prawdziwe dla dowolnej funkcji, nie tylko funkcji czasu.

Dla fali stojącej w strunie było:

$$\Psi_n(z,t) = A_n u_n(z)\cos(\omega_n t + \phi_n)$$

$u_n(z)$ - sinusoidalne funkcje własne (od zmiennej przestrzennej).

Ich argument $k_n z$, dla struny zamocowanej obustronnie $k_1,\ 2k_1,\ 3k_1\ldots$

$$\Psi_n(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(z)\cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Dla określonego t:

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n u_n(z)$$

gdzie $A'_n \equiv A_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$ stałe.

$u_n(z)$ harmoniczne w z, stąd:

$$\Psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(ink_1 z)$$

Jak dla t, ale $t \to z$, $\omega_f \to k_1$

Biorąc $\tau \to \dfrac{2\pi}{k_1}$

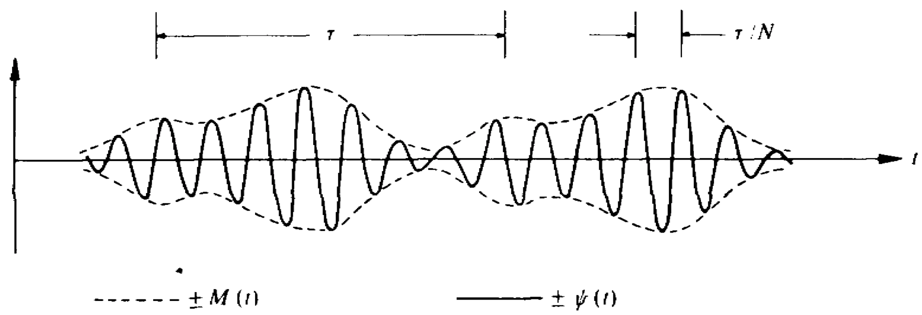
$$c_n = \frac{k_1}{2\pi} \int_{2\pi/k_1} \Psi(z) \exp(-ink_1 z) dz$$

<u>Modulacja:</u>

Jak znaleźć widmo częstości dla drgań zmodulowanych amplitudowo?

$$\Psi(t) = M(t)\left[Ce^{iN\omega t} + C^* e^{-iN\omega t}\right]$$

$M(t)$ - obwiednia modulująca (periodyczna z $\tau = 2\pi/\omega$).



Częstość nośna $N\omega$, N - duże.

Niech $C = C^*$; $C = \frac{1}{2}$:

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} M(t)\left[e^{iN\omega t} + e^{-iN\omega t}\right]$$

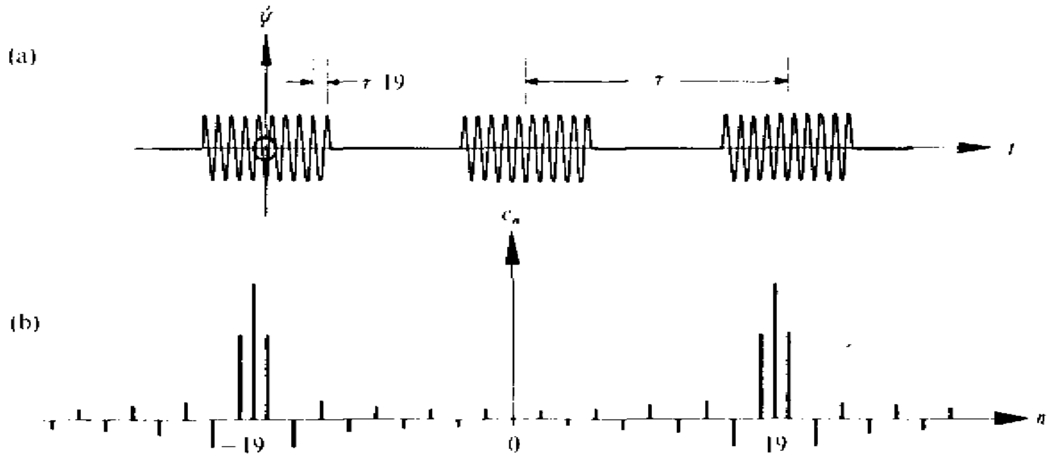
Współczynnik dla n-tej harmonicznej:

$$c_n = \frac{1}{2\tau} \int_\tau M(t)\left[e^{iN\omega t} + e^{-iN\omega t}\right] e^{-in\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\tau} \int_\tau M(t)\left[e^{-i(n-N)\omega t} + e^{-i(n+N)\omega t}\right] dt$$

Dwie części - $(n-N)$-ta i $(n+N)$-ta składowa fourierowska $M(t)$.

Widmo częstości składa się z dwu widm odpowiadających $M(t)$ centrowanych w $(-N)$ i

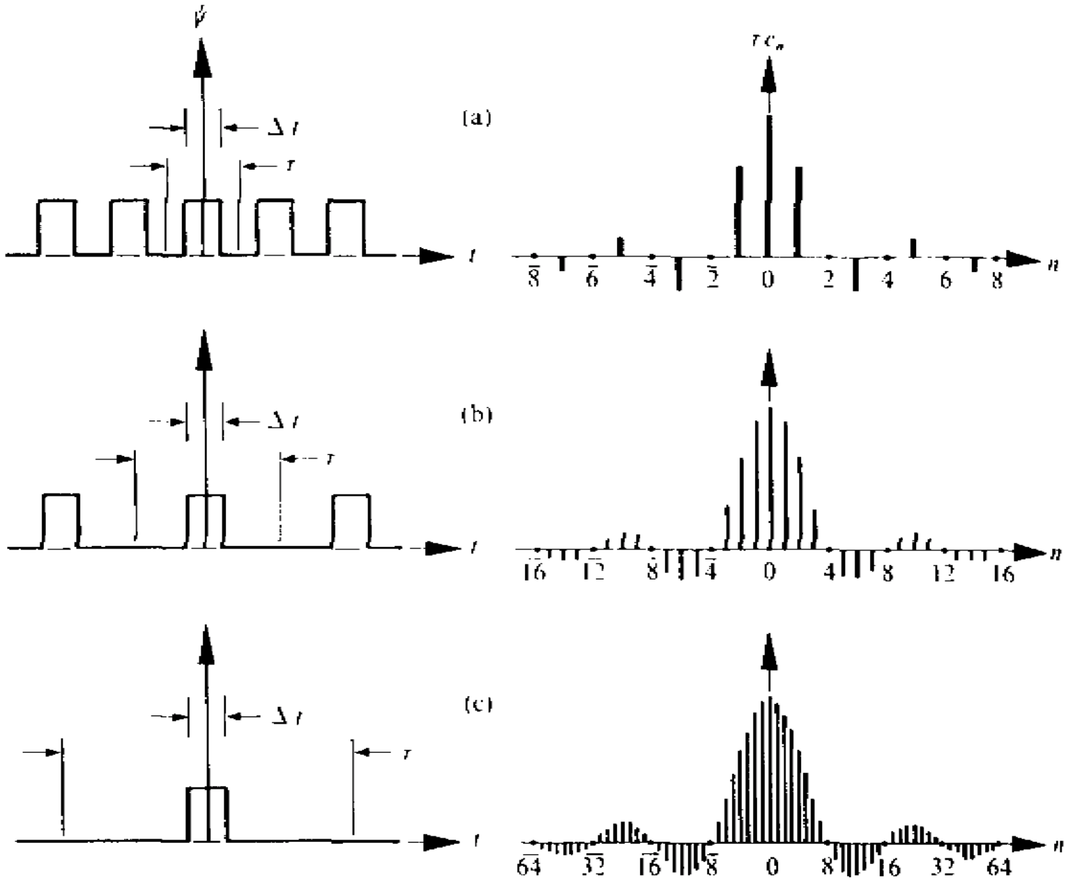


$(+N)$.

Zmiana częstości nośnej nie zmienia każdego z widm, tylko odległości między nimi.

Impuls, paczka falowa:

Niech ciąg impulsów prostokątnych.
Zmieniamy czas repetycji:



Bez zmiany obwiedni, rośnie liczba harmonik, ale nie zmienia się zakres częstości.

Czy zakres częstości zmieni się, jeśli zmieni się długość impulsu?

Największe znaczenie mają małe częstości.

Miarą zakresu częstości może być zakres między zerem i najmniejszą częstością z $c_n = 0$.

$$\sin nf\pi = \pi$$

$$n = \frac{1}{f}$$

Częstość podstawowa $\nu_0 = \frac{1}{\tau}$.

Szerokość pasma $\Delta\nu = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\tau}$

$\underline{\Delta\nu \cdot \Delta t = 1}$

- przybliżone dla rozpatrywanego przypadku.

Ogólnie: $\Delta\nu\Delta t \geq 1$.

Ważne: nie jest zerem!

Im impuls większy, tym szersze rozmycie częstości w szeregu Fouriera.

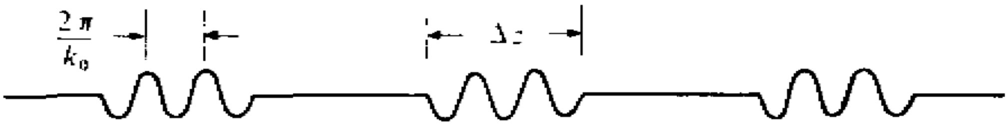
W przypadku granicznym $(\Delta t \to 0)$, wszystkie częstości (do ∞).

Dla drgań harmonicznych zmodulowanych impulsami potrzeba częstości z pasma

$$\nu \pm \Delta\nu, \quad \Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}$$

Nie ma nieskończenie wąskich impulsów.

Impuls bardzo długi można zbudować z drgań o częstościach z bardzo wąskiego pasma, centrowanego na częstości drgań.



Grupa fal:

$$t \to z \Rightarrow \omega \to k$$

$$\underline{\Delta k \cdot \Delta z \sim 2\pi}$$

Jeśli zmodulowana przestrzennie fala o liczbie falowej k_0; potrzebne fale o liczbach falowych $k_0 \pm \Delta k$.

Dla Δz małego – ciągłe widmo k.

Transformata Fouriera:

Dla pojedynczego impulsu częstości $n\omega_f$ tworzą kontinuum.

Zamiast sumy – całka.

Zastępujemy $n\omega_f$ przez ω, całkujemy po ω zamiast sumować po n, a w miejsce $c_n \to c(\omega)d\omega$

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$c(\omega) = ?$

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_{\tau} \Psi(t)\exp\left(-in\omega_f t\right)dt$$

$n\omega_f \to \omega$; $\frac{1}{\tau} \to \frac{d\omega}{2\pi}$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) e^{-i\omega t} dt$$

W przestrzeni:

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{ikz} dk \qquad c(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) e^{-ikz} dz$$