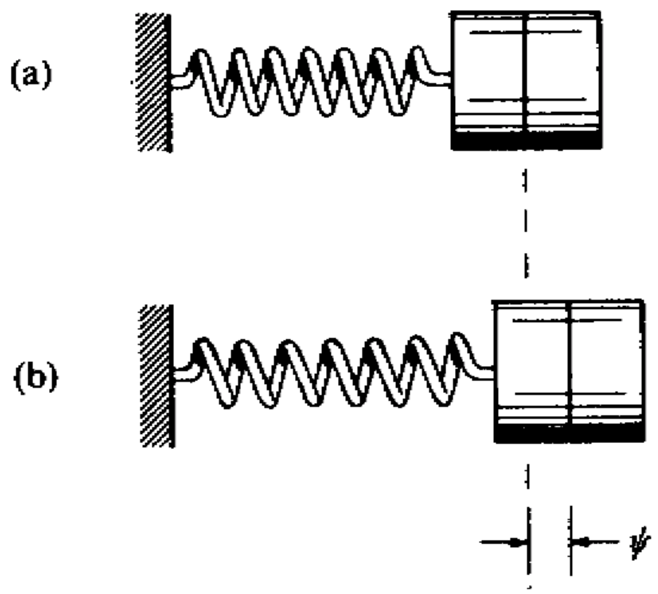
1.1. DRGANIA HARMONICZNE.

Drgania – okresowe (prawie okresowe) zmiany stanu układu fizycznego, chemicznego lub biologicznego wokół położenia równowagi.

Model mechaniczny:



$$\Psi(t+nT) = \Psi(t) \; ; \qquad n=1,2,3...$$

T - okres [s]

$\nu = \frac{1}{T}$ - częstość [s^{-1}] - 1Hz

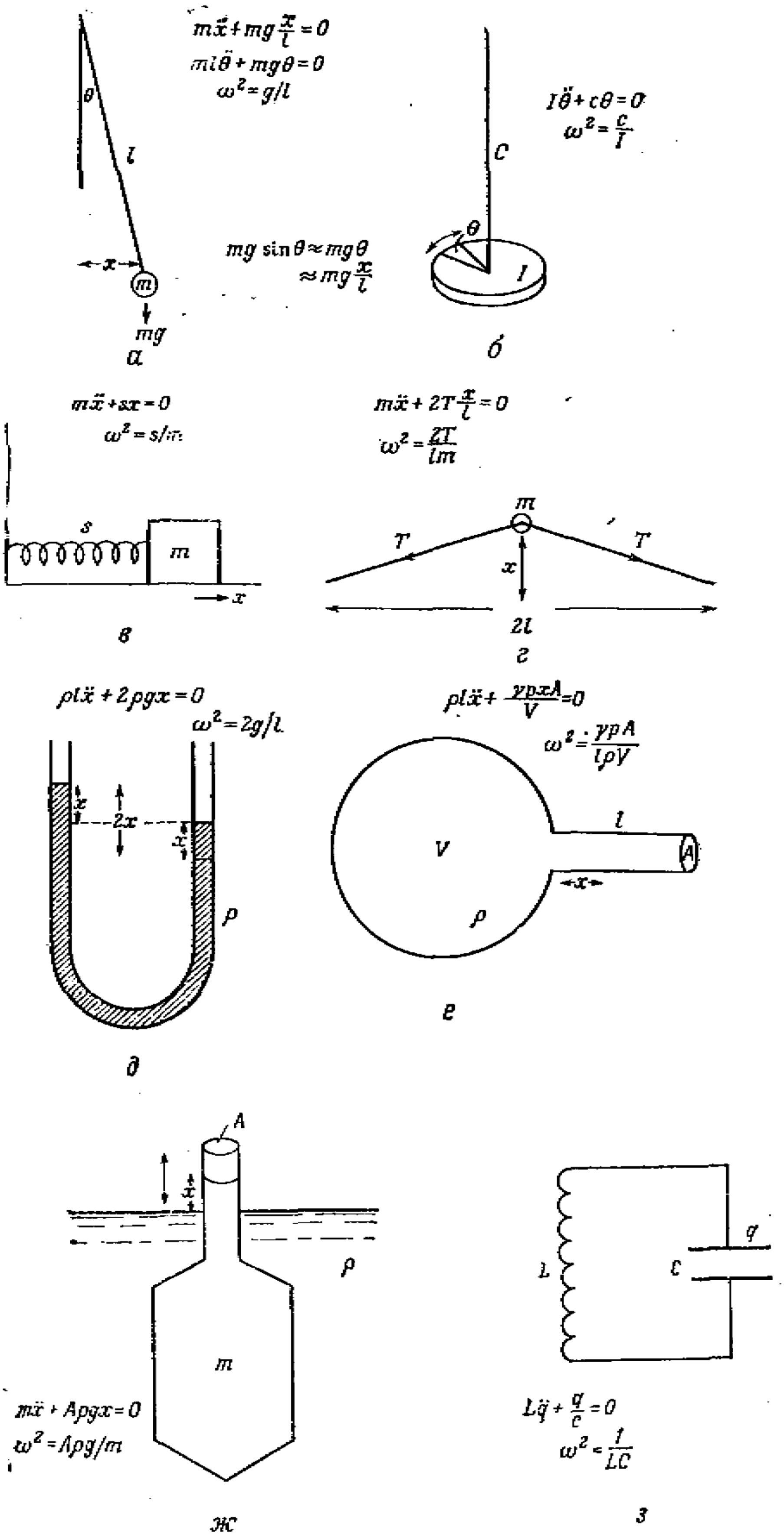
Oscylatory:

mechaniczne - do 10^5 Hz

elektryczne - 10^3-10^{12} Hz

atomowe - 10^{11}-10^{17} Hz

jądrowe - ~10^{22} Hz


$m\ddot{x} + mg\frac{x}{l} = 0$
$ml\ddot{\theta} + mg\theta = 0$
$\omega^2 = g/l$
$mg\sin\theta \approx mg\theta \approx mg\frac{x}{l}$
mg
а
$I\ddot{\theta} + c\theta = 0$
$\omega^2 = \frac{c}{I}$
б
$m\ddot{x} + sx = 0$
$\omega^2 = s/m$
в
$m\ddot{x} + 2T\frac{x}{l} = 0$
$\omega^2 = \frac{2T}{lm}$
$2l$
г
$\rho l\ddot{x} + 2\rho gx = 0$
$\omega^2 = 2g/l$
д
$\rho l\ddot{x} + \frac{\gamma pxA}{V} = 0$
$\omega^2 = \frac{\gamma pA}{l\rho V}$
е
$m\ddot{x} + A\rho gx = 0$
$\omega^2 = A\rho g/m$
ж
$L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0$
$\omega^2 = \frac{1}{LC}$
з

Warunki drgań:

1. Występowanie położenia równowagi i siły zwrotnej.
2. Bezwładność.
3. Niezbyt duże opory.

ad 1. Siła zwrotna (mechaniczna): F(x) =– *grad* E_p(x)

ad 3. Czynniki zmniejszające energię układu (dyssypacyjne) - tarcie, lepkość.

Drgania harmoniczne:

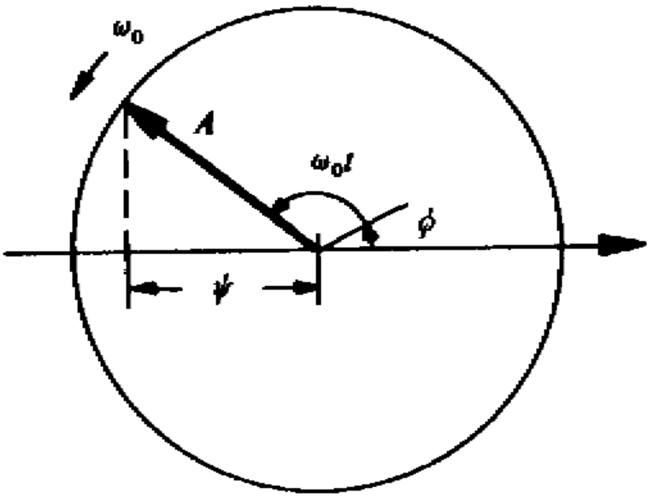
$\Rightarrow$ Ψ da się opisać funkcją sinus (cosinus) $\Rightarrow$

$$\boxed{\Psi(t) = \Psi_m \cdot \sin(\omega t + \phi)}$$

$\varphi = \omega \cdot t` + \phi$ - faza (liniowa funkcja czasu)

$\phi = \varphi(0)$ - stała fazowa /faza początkowa/

Ψ_m - amplituda drgań (-$\Psi_m \leq \Psi \leq \Psi_m$)



$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

- częstość kołowa (pulsacja)

Prędkość:

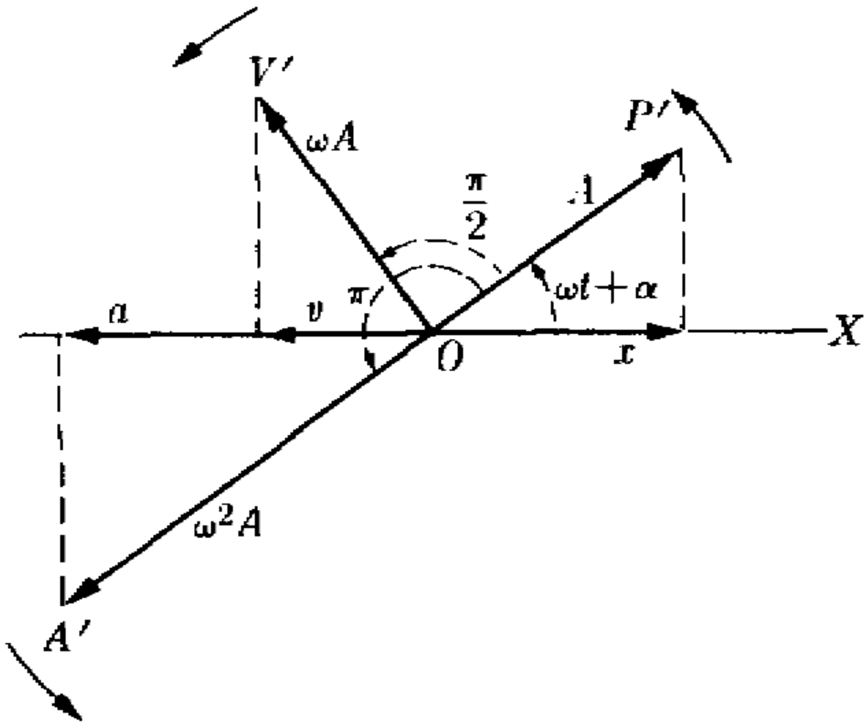
$$\dot{\Psi}(t) = -\omega_0 \Psi_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\dot{\Psi}(t) = \omega_0 \Psi_m \cos(\omega_0 t + \phi + \pi/2)$$

Przyspieszenie:

$$\ddot{\Psi}(t) = -\omega_0{}^2 \Psi_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\ddot{\Psi}(t) = \omega_0{}^2 \Psi_m \cos(\omega_0 t + \phi + \pi)$$



Warunki początkowe:

Amplituda i stała fazowa są określone przez warunki początkowe:

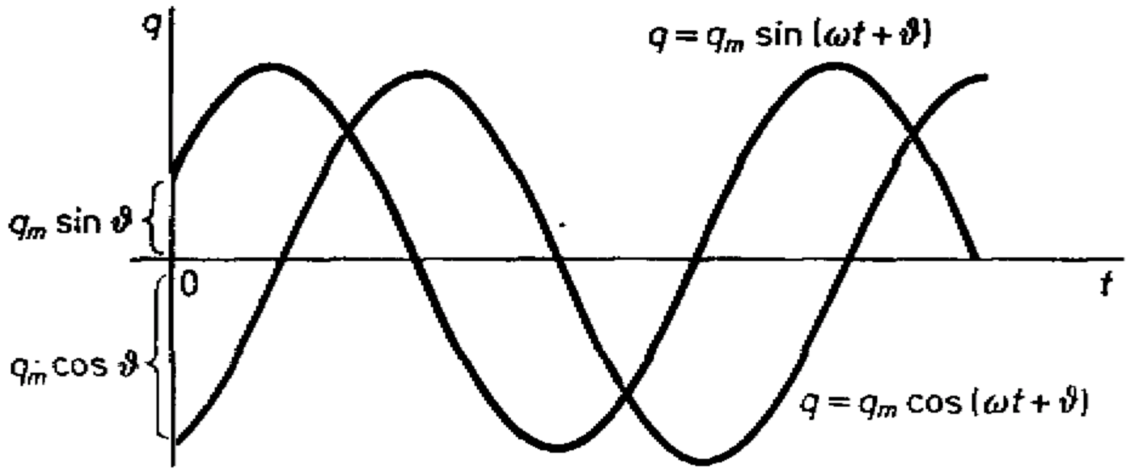
$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad x_0 \equiv x(t=0) \qquad x_0 = A\cos\phi$$

$$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad \upsilon_0 \equiv \upsilon(t=0) \qquad \upsilon_0 = -A\omega\sin\phi$$

$$x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2} = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}$$

$$tg\phi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}$$



Małe drgania:

$$E_p(x)=\sum_{0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad ; \quad a_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n E_p}{dx^n}\Big|_{x=x_0}$$

W położeniu równowagi: $\frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=x_0}=0$

$$E_p(x)=E_p(x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$(x-x_0)=\Psi$$

$$F=-\frac{dE_p}{dx}\Big|_{x=x_0}=-\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)$$

$$\boxed{F=-k\,(x-x_0)}$$

gdzie: $k=\frac{F}{x-x_0}$ - stała doświadczalna.

$[k]=1N/m.$

k- współczynnik sprężystości (sztywności)

Dla małych drgań siła zwrotna jest proporcjonalna do wychylenia.

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}\ k\ (x - x_0)^2$$

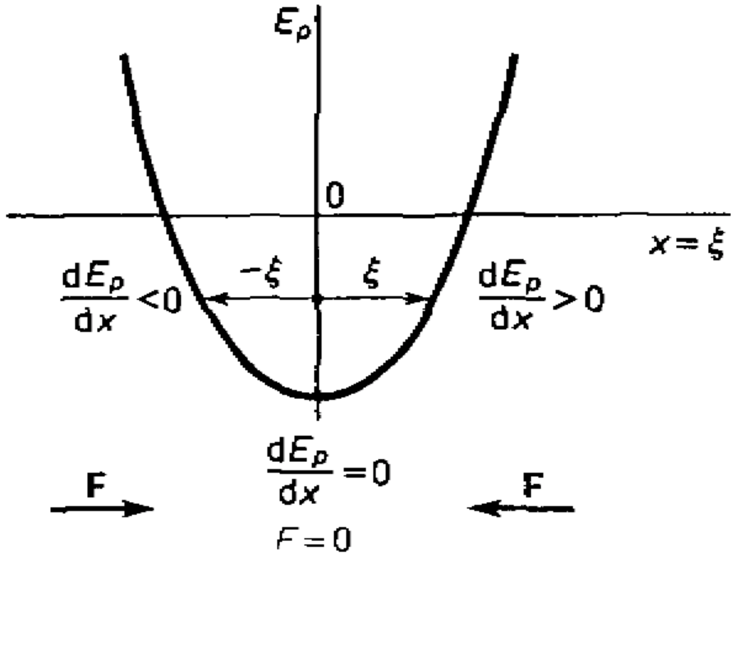
Jeżeli początek układu odniesienia umieścić w punkcie, odpowiadającym położeniu równowagi, to:

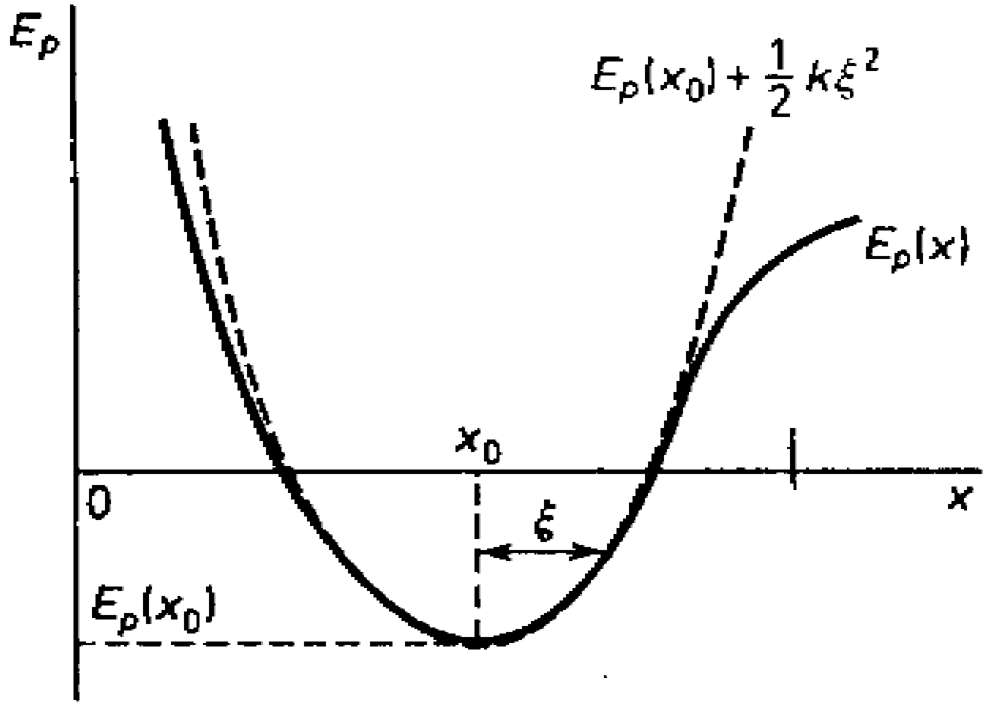
$$E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2}\ k\ x^2$$

$$F = -kx$$

Dla trzech wymiarów:

$$\vec{F} = -\ grad\ E_p = -\ k\ \vec{r}$$





Równanie drgań:

Równanie ruchu: $\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$

W jednym wymiarze: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$$

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}+\frac{k}{m}x=0 \qquad\qquad \upsilon\cdot d\upsilon=-\frac{k}{m}x\cdot dx$$

$$\frac{1}{2}\upsilon^2=-\frac{1}{2}\frac{k}{m}x^2+C$$

$$/\ \frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}kx^2=mC=const=E_0\ /$$

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}=\sqrt{2C-{}^{k}\!/_{m}\,x^2}=\sqrt{{}^{k}\!/_{m}\left({}^{2Cm}\!/_{k}-x^2\right)}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2Cm}{k}-x^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

$$\underline{\int\Rightarrow:}\qquad \arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{2Cm}{k}}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+D$$

$$x=\sqrt{\frac{2Cm}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+D\right) \qquad \left|x=x_m\sin(\omega t+\vartheta)\right|$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}\ ;\qquad T={}^{2\pi}\!/_{\omega}=2\pi\sqrt{{}^{m}\!/_{k}}$$

$$C=\frac{x_m^{\ 2}}{2}\frac{k}{m}=\frac{1}{2}x_m^{\ 2}\omega^2$$

$$E_0=mC\ \Rightarrow \qquad \boxed{E_0=\frac{1}{2}kx_m^{\ 2};\qquad E_0\propto x_m^{\ 2}}$$

Różne sposoby zapisu:

- $\Psi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
- $\Psi(t) = B_p \cos(\omega_0 t) + B_q \sin(\omega_0 t)$
- $\Psi(t) = C\exp(i\omega_0 t) + C^*\exp(-i\omega_0 t)$
- $\Psi(t) = \mathrm{Re}\left[D\exp(i\omega_0 t)\right]$

$$A\cos\varphi = B_p = 2\,\mathrm{Re}\,C = \mathrm{Re}\,D$$

$$A\sin\varphi = B_q = 2\,\mathrm{Im}\,C = \mathrm{Im}\,D$$

A. $\underline{\Psi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

B. $\Psi(t) = A\cos\varphi\cos\omega_0 t - A\sin\varphi\sin\omega_0 t$

$$\underline{\Psi(t) = B_p\cos\omega_0 t + B_p\sin\omega_0 t}$$

$$\underbrace{B_p \equiv A\cos\varphi, \qquad B_q = -A\sin\varphi}_{\text{z warunków brzegowych}}$$

C. Niech $\Psi = Ce^{pt}$

R. oscylatora będzie spełnione, jeżeli

$$p^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow p = \pm i\omega_0$$

Rozw. ogólne: $\Psi(t) = C\exp(i\omega_0 t) + C'\exp(-i\omega_0 t)$

C, *C'* - zespolone

$\rightarrow$ cztery stałe $(\mathrm{Re}\,C,\ \mathrm{Re}\,C',\ \mathrm{Im}\,C,\ \mathrm{Im}\,C')$, a z warunków początkowych dwie, ale fizyczne Ψ - rzeczywiste lub urojone, nie zespolone.

Tak będzie, jeżeli

$$[C'\exp(-i\omega_0 t)]^* = C\exp(i\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'^*\exp(i\omega_0 t) = C\exp(i\omega_0 t) \Rightarrow C' = C^*$$

$$\underline{\Psi(t) = C\exp(i\omega_0 t) + C^*\exp(-i\omega_0 t)} \qquad (*)$$

$\rightarrow$ dwie stałe! $(\mathrm{Re}\,C,\ \mathrm{Im}\,C)$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$\longrightarrow \mathrm{Re}\,C = \frac{1}{2}B_p = \frac{1}{2}A\cos\varphi$$

$$\mathrm{Im}\,C = -\frac{1}{2}B_q = \frac{1}{2}A\sin\varphi$$

D. Z (*)

$$\Psi(t) = \mathrm{Re}[C\exp(i\omega_0 t)] + \mathrm{Re}\left[C^*\exp(-i\omega_0 t)\right] =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}[C\exp(i\omega_0 t)]$$

Niech $D \equiv 2C$

$$\underline{\Psi(t) = \mathrm{Re}[D\exp(i\omega_0 t)]}$$

$$\mathrm{Re}\,D = A\cos\phi; \qquad \mathrm{Im}\,D = A\sin\phi$$

<u>Energia:</u>

$W \Leftrightarrow E_0$; $V \Leftrightarrow E_p$; $T \Leftrightarrow E_k$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} kx^2$$

$$W = T + V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = const$$

$\Uparrow$

brak tłumienia

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

$\Rightarrow$ inna droga do równania ruchu: obliczamy pochodną energii po czasie i przyrównujemy ją do zera.

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

$\dot{x} = 0$ lub $(m\ddot{x} + kx) = 0$

$\Downarrow$

banalne

Jeszcze inaczej – z równania Eulera-Lagrange'a.

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\theta}} = \frac{dL}{d\theta};\ L = T - V\right)$$

Szukamy zależności *T(t),V(t).*

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi); \qquad \dot{x} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$T = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi); \quad V = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$W = T + V = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

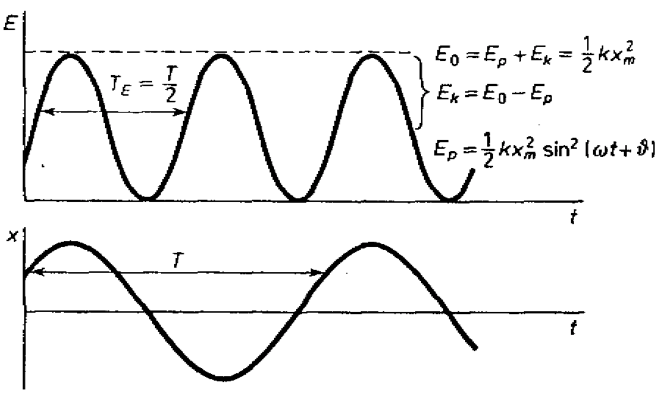
$\Uparrow$ bo: $k = m\omega_0{}^2$ oraz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$W \propto A^2$ - nie zależy od φ

„Przepływ” energii między masą a sprężyną.

$$E_k = E_0\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = E_0\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

$$E_p = E_0\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = E_0\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

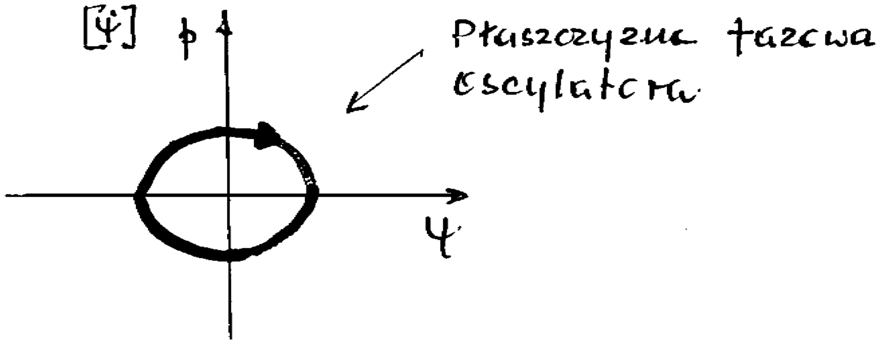


Płaszczyzna fazowa:

$\Psi = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ - harmoniczne

$p = m\dot{\Psi} = -mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\frac{\Psi^2}{A^2} + \frac{p^2}{m^2 A^2 \omega_0^2} = 1$$



$$S = \pi \cdot A \cdot mA\omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{1}{\nu_0} \cdot E$$