Drgania nieliniowe (anharmoniczne)

Harmoniczne: $F_s = -s\Psi$

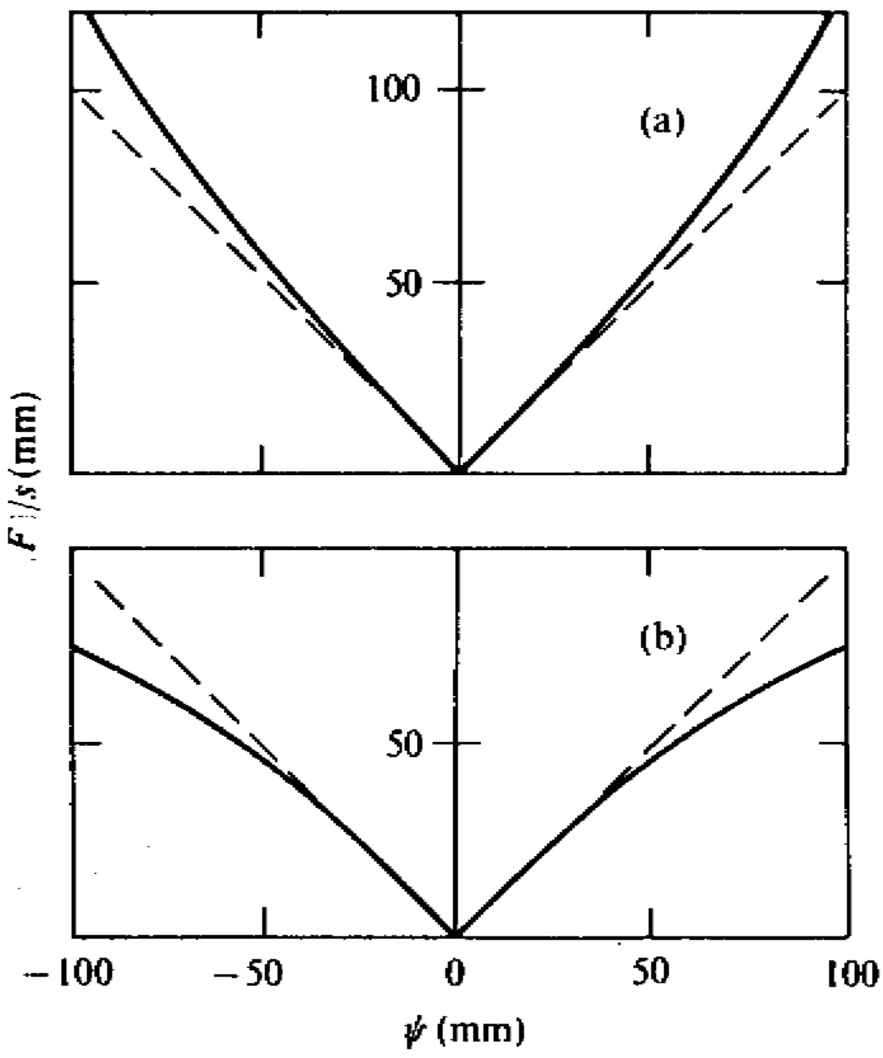
Inna zależność siły od Ψ: - układ nieliniowy,

- drgania anharmoniczne

Symetryczna siła zwrotna

Niech: $-F_s = \left(1+\alpha\Psi^2\right)s\Psi$ α, s - stałe

Symetryczna $\Rightarrow$ wartość $\left|F_s\right|$ dla $\pm\Psi$ taka sama



Niech: $\left|\alpha\Psi^2\right| << 1$ - słaba nieliniowość (ew.małe $\left|\Psi\right|$)

Niech: $\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\ddot{\Psi} + \left(1+\alpha\Psi^2\right)\omega_0^2\Psi = 0}$

Jakie własności powinno mieć rozwiązanie?

Drgania bez tłumienia, więc:

(1) Ruch periodyczny

$$\Rightarrow \Psi(t) = \Psi(t+\tau);\ \tau \text{ - okres}$$

(2) Dla każdego cyklu ruch „do środka” ($\left|\Psi\right|$ maleje) będzie wyglądał jak opóźniony ruch „na zewnątrz”:

$$\Psi(t_0 - t) = \Psi(t_0 + t); \qquad \Psi(t_0) \equiv 0$$

(3) $\left|F_s\right|$ symetryczne względem $\Psi = 0$, ruch „na lewo” $(\Psi < 0)$ jest zwierciadlanym odbiciem ruchu „na prawo” $(\Psi > 0)$, każdy trwa $\tau/2$:

$$\Psi\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) = -\Psi(t)$$

Z (1) $\Rightarrow$ Ψ = suma funkcji harmonicznych

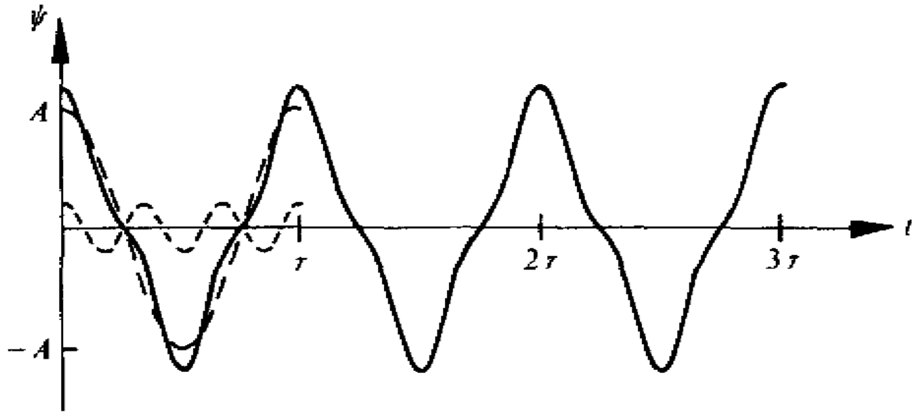
$$\Psi = a_0 + a_1\cos(\omega_f t + \varphi_1) + \\ + a_2\cos(2\omega_f t + \varphi_2) + a_3\cos(3\omega_f t + \varphi_3)\ldots$$

$$\omega_f = 2\pi/\tau$$

z (3) $\Rightarrow$ muszą zniknąć parzyste harmoniki

Niech: $\dot{\Psi}(0) = 0 \Rightarrow \varphi_i = 0$ i wychylenie w postaci:

$$\Psi = A\left(\cos\omega_f t + \varepsilon\cos 3\omega_f t + \ldots\right)$$



Siła słabo nieliniowa

$\Downarrow$

drgania słabo anharmoniczne, ε małe, harmoniki wyższe od trzeciej do zaniedbania

$\Downarrow$

amplituda $\cong$ amplituda podstawowej

$\Downarrow$

Warunek słabej nieliniowości:

$$\left(\left|\alpha\Psi^2\right| << 1\right) \Rightarrow \underline{\left(\left|\alpha A^2\right| << 1\right)}$$

Z r.r. z zachowaniem członów liniowych w ε i $\alpha A^2 \Rightarrow \Psi$

(Człony ε^2, $\left(\alpha A^2\right)^2$, $\varepsilon\alpha A^2$ i wyższe – małe)

$$\Psi^3 = A^3\left(\cos^3\omega_f t + 3\varepsilon\cos^2\omega_f t\cos 3\omega_f t + \ldots\right)$$

$$\ddot{\Psi} = -\omega_f^2 A\left(\cos\omega_f t + 9\varepsilon\cos 3\omega_f t + \ldots\right)$$

($\ddot{\Psi}$ nie jest proporcjonalne do Ψ)

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow -\omega_f^2 A\left(\cos\omega_f t + 9\varepsilon\cos 3\omega_f t + \ldots\right) &+ \\ +\omega_0^2 A\left(\cos\omega_f t + \varepsilon\cos 3\omega_f t + \ldots\right) &+ \\ +\alpha\omega_0^2 A^3\left(\frac{1}{4}\cos 3\omega_f t + \frac{3}{4}\cos\omega_f t + \ldots\right) &= 0\end{aligned}\right\} \text{r.r.}$$

$$/\cos^3\omega_f t = \frac{1}{4}\cos 3\omega_f t + \frac{3}{4}\cos\omega_f t/$$

Współczynniki przy $\cos\omega_f t$ =0 (r.r. prawdziwe dla dowolnego t): $-\omega_f^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4}\alpha\omega_0^2 A^3 = 0$

$$\omega_f^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\alpha A^2\right)$$

$$\omega_f \cong \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}\alpha A^2\right) \qquad /(1+x)^n \cong 1 + nx/$$

$$\underline{\omega_f > \omega_0 \;\; dla \;\; \alpha > 0; \qquad \omega_f < \omega_0 \;\; dla \;\; \alpha < 0}$$

$\rightarrow \underline{\omega_f = f(A)!}$ (np. wahadło matematyczne dla dużych kątów)

Współczynniki przy $\cos 3\omega_f t$:

$$-9\varepsilon\omega_f A + \varepsilon\omega_0^2 A + \frac{1}{4}\alpha\,\omega_0^2 A^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon \approx \frac{1}{32}\alpha A^2$$

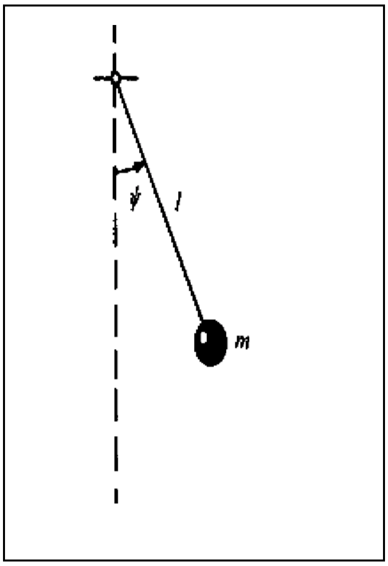
ε-anharmoniczność drgań, α- nieliniowość siły

- anharmoniczność rośnie z amplitudą

Dokładność: $\approx \left(\alpha A^2\right)^2$

Dla
$$\alpha A^2 = 0.1 \Rightarrow \left(\alpha A^2\right)^2 = 0.01 \Rightarrow \delta \approx 1\%$$
$$\alpha A^2 = 0.01 \Rightarrow \left(\alpha A^2\right)^2 = 0.0001 \Rightarrow \delta \approx 0.01\%$$

Wahadło matematyczne:



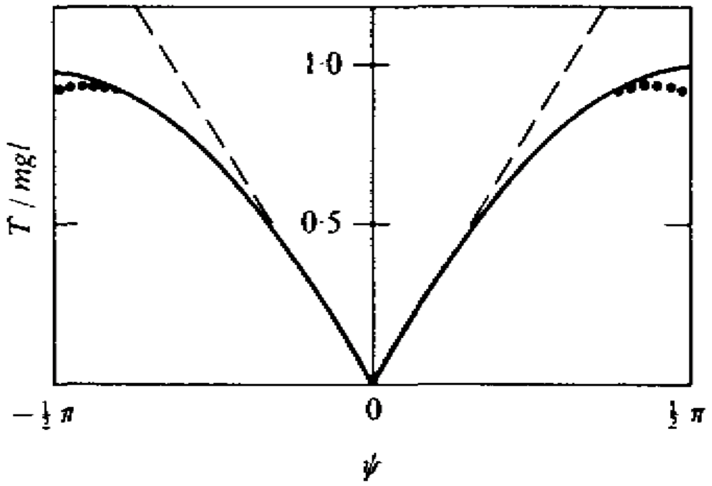
$$I = ml^2$$

$$M_s = -(mg\sin\Psi)l$$

$$\ddot{\Psi} + \frac{g}{l}\sin\Psi = 0$$

$$\sin\Psi = \Psi - \frac{\Psi^3}{3!} + \frac{\Psi^5}{5!} - \ldots$$

$$\sin\psi = \psi - \psi^3/3! + \psi^5/5! - \dots$$



_____ dokładne_ _ _ liniowe......... $\left|\left(1-\frac{1}{6}\Psi^2\right)\Psi\right|$

(„miękkie”)

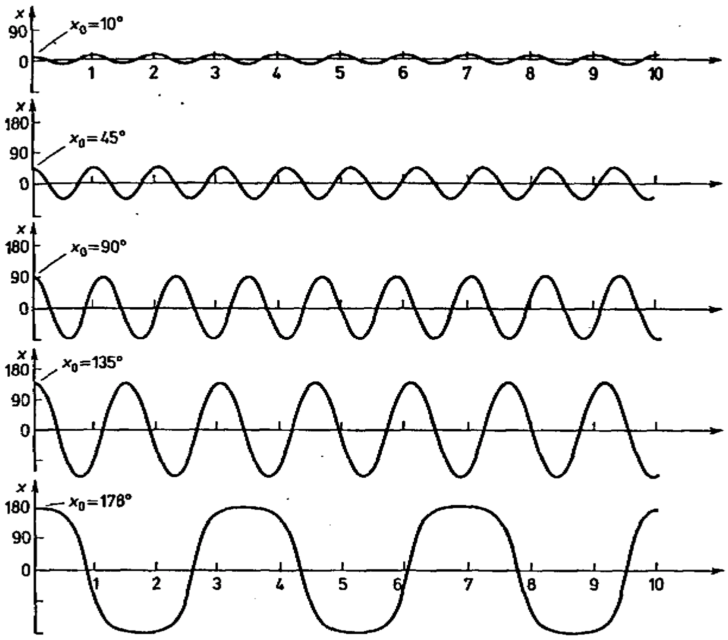
Dla $\alpha = \frac{1}{6}$

$\left|\alpha A^2\right| << 1 \Rightarrow A << 140°$

$$\begin{cases} \omega_f \approx \omega_0\left(1-\frac{1}{16}A^2\right) \\ \varepsilon \cong \frac{1}{192}A^2 \end{cases}$$

$A = 10° \quad \Rightarrow \quad \alpha A^2 = -0.005, \quad \delta \approx 0.001\%$

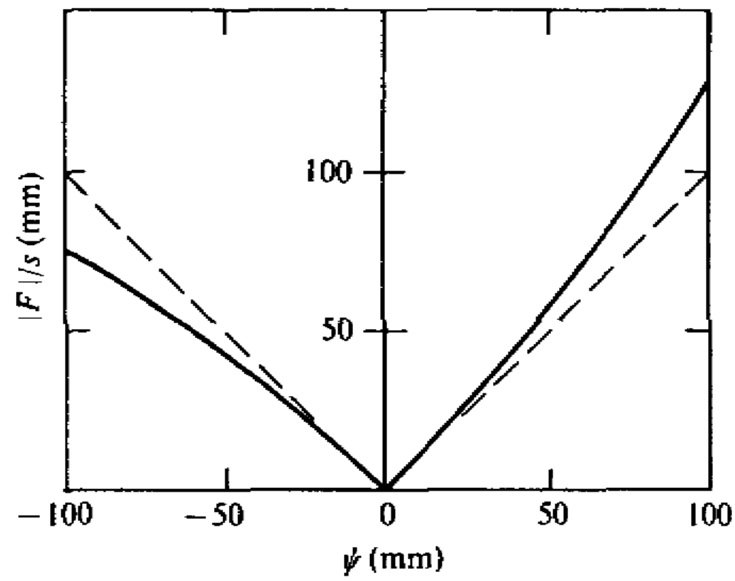
$\quad\quad\quad \Rightarrow \quad liniowe \quad\quad\quad \delta \approx 0.2\%$



Asymetryczna siła zwrotna

Niech: $-F_s = (1+\beta\Psi)s\Psi$

Niech: $|\beta\Psi| << 1$



$\beta = 2.5\,m^{-1}$ _______ $\beta = 0$ _ _ _ _

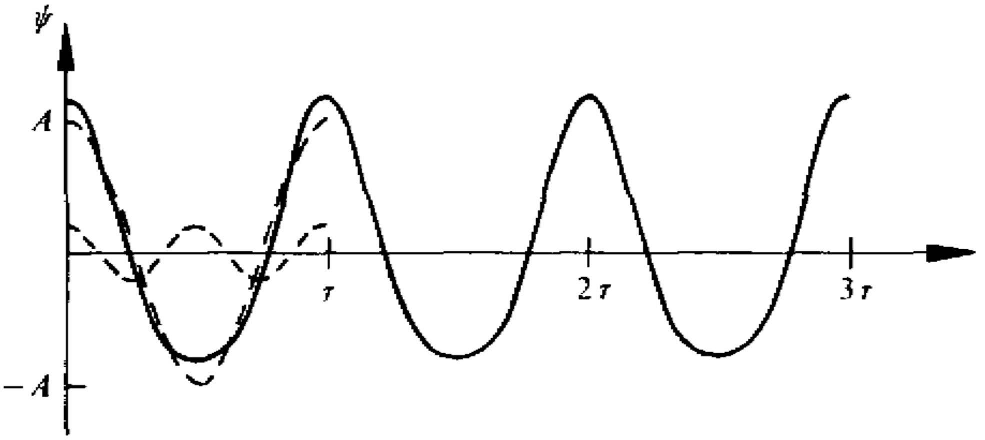
Gdy $\beta > 0$:„twarda" dla rozciągania ($\Psi > 0$), „miękka" dla ściskania ($\Psi < 0$).

$$\gamma = 0 \Rightarrow \underline{\ddot{\Psi} + (1 + \beta\Psi)\omega_0^2\Psi = 0}$$

Niech $\dot{\Psi}(0)$ i Ψ w postaci:

$$\Psi = A_0 + A(\cos\omega_f t + \eta\cos 2\omega_f t + \ldots)$$

„Twarda siła" (Ψ>0)zawraca masę szybciej niż „miękka siła" (Ψ<0).



$$\Psi = A(\cos\omega_f t + 0.2\cos 2\omega_f t)$$

$$\Psi^2 = A_0^2 + 2A_0A(\cos\omega_f t + \eta\cos 2\omega_f t) +$$
$$+ A^2(\cos^2\omega_f t + 2\eta\cos\omega_f t\cos 2\omega_f t + \ldots)$$

$$\ddot{\Psi} = -\omega_f^2 A(\cos\omega_f t + 4\eta\cos 2\omega_f t + \ldots)$$

$\Rightarrow$r.r.

$$-\omega_f^2 A\left(\cos\omega_f t + 4\eta\cos 2\omega_f t + \ldots\right) +$$
$$+\omega_0^2\left[A_0 + A\left(\cos\omega_f t + \eta\cos 2\omega_f t + \ldots\right)\right] +$$
$$+\beta\,\omega_0^2\left[A_0^2 + 2A_0 A\cos\omega_f t + A^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_f t + \ldots\right)\right] = 0$$

Uwaga: $\cos^2\omega_f t = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\omega_f t\right)$ i bez członów

η^2, $(\beta A)^2$, $\eta\beta A$ i wyższych

Współczynniki przy $\cos\omega_f t$:

$$-\omega_f^2 A + \omega_0^2 A + 2\beta\,\omega_0^2 A_0 A = 0$$

$$\underline{\omega_f^2 = \omega_0^2\left(1 + 2\beta A_0\right)}$$

Współczynniki przy $\cos 2\omega_f t$:

$$-4\eta\omega_f^2 A + \eta\omega_0^2 A + \frac{1}{2}\beta\,\omega_0^2 A^2 = 0$$

$$-4\eta\left(1 + 2\beta A_0\right) + \eta + \frac{1}{2}\beta A = 0$$

(pomijamy $(\beta A)(\beta A_0)$)

$$\underline{\eta \cong \frac{1}{6}\beta A}$$

Stałe:

$$\omega_0^2 A_0 + \beta\,\omega_0^2 A_0^2 + \frac{1}{2}\beta\,\omega_0^2 A^2 = 0$$

(pomijamy $(\beta A)^2$)

$$A_0\left(1+\beta A_0\right) = -\frac{1}{2}\beta A^2$$

$$\underline{A_0 \cong -\frac{1}{2}\beta A^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|A_0|}{A} \cong \frac{1}{2}|\beta A| << 1$$

$$\underline{A_0 << A}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_f^2 \cong \omega_0^2\left(1-\beta^2 A^2\right) \cong \omega_0^2$$

$$\omega_f \cong \omega_0$$

- nie ma zmiany częstości!

- stały człon A_0

$$<\Psi> = A_0 \cong -\frac{1}{2}\beta A^2$$

$\rightarrow$ masa spędza więcej czasu po „miękkiej” stronie

Podsumowanie:

Siła symetryczna:

$$F_s = -\left(1+\alpha\Psi^2\right)s\Psi \quad \left(\left|\alpha\Psi^2\right| << 1\right)$$

$$\Psi = A\left(\cos\omega_f t + \varepsilon\cos 3\omega_f t + \ldots\right)$$

$$\omega_f \cong \omega_0\left(1+\frac{3}{8}\alpha A^2\right)$$

$$\varepsilon \cong \frac{1}{32}\alpha A^2$$

$$<\Psi> = 0$$

Siła asymetryczna:

$$F_s = -\left(1+\beta\Psi\right)s\Psi \quad \left(\left|\beta\Psi\right| << 1\right)$$

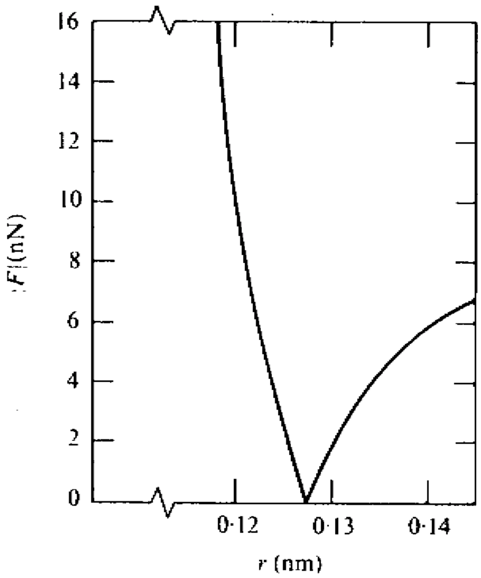
$$\Psi = A_0 + A\left(\cos\omega_f t + \eta\cos 2\omega_f t + \ldots\right)$$

$$\omega_f \cong \omega_0$$

$$\eta \cong \frac{1}{6}\beta A$$

$$<\Psi> = A_0 \cong -\frac{1}{2}\beta A^2$$

Rozszerzalność cieplna kryształów:



Sila zwrotna vs. odleglosc miedzy para przeciwnie naladowanych jonow - ze zrozniczkowania energii potencjalnej dla HCl

Średnia odległość atomów: $\langle r \rangle = R + \langle \Psi \rangle$

Biorąc przybliżenie siły „kwadratowej": $\langle r \rangle \approx R - \frac{1}{2}\beta A^2$

(Trudniej ściskać, niż rozciągać $\Rightarrow$ β<0 $\Rightarrow$ $\langle r \rangle \geq R$)

Energia w układzie: $W \approx \frac{1}{2} s A^2 \Rightarrow \langle r \rangle \approx R - \beta W / s$

Z zasady ekwipartycji energii: $\langle r \rangle \approx R - \beta kT / s$

Było: $$-F=\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_R\Psi+\frac{1}{2}\left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_R\Psi^2+\ldots$$

oraz: $$-F_s=(1+\beta\Psi)s\Psi$$

$$\Rightarrow:\ \beta=\frac{1}{2}\left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_R\Bigg/\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_R$$

Było: $V(r)=-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{B}{r^9}$ oraz $B=\dfrac{e^2R^8}{36\pi\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow V(r)=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{9}\left(\frac{R}{r}\right)^8-1\right]$$

$$\Rightarrow\ \underline{\beta=-13/2R}$$

„Szybkość" rozszerzania z temperaturą:

$$\frac{d\langle r\rangle}{dT}\approx-\frac{\beta k}{s}=\frac{13k}{2Rs}$$

Było: $k\approx\dfrac{2e^2}{\pi\varepsilon_0R^3}=\dfrac{1{,}84\times10^{-27}\ Nm^2}{R^3}\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \frac{d\langle r\rangle}{dT}\approx\frac{13\pi\varepsilon_0R^2k}{4e^2}=\left(4{,}87\times10^4\ m^{-3}K^{-1}\right)R^2$$

(Wzrost odległości o 4.8*10^{-6}nm przy wzroście temperatury o 1K. – 4 razy mniej niż z doświadczenia)

Drgania wymuszone oscylatora anharmonicznego.

Niech: słabo tłumiony oscylator, harmoniczna siła wymuszająca, amplituda odpowiadająca małej anharmoniczności, $\omega << \omega_0$ (ω_0 - częstość rezonansowa dla małych drgań) czyli przewaga sprężystości.

Niech: $\Psi \cong aF + bF^2 + cF^3 + \ldots$

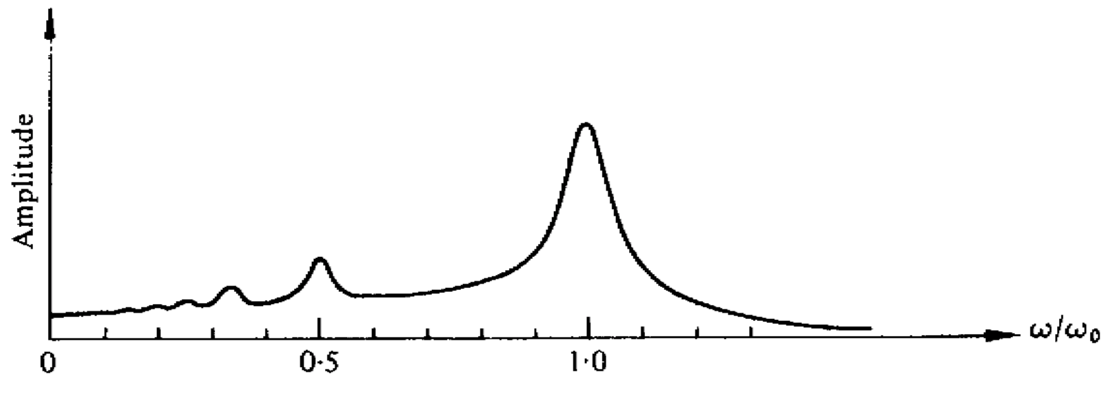
a, b, c – stałe, F – siła wymuszająca $\Leftrightarrow$ siła sprężyny

Niech: $F = F_0 \cos \omega t$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \qquad \cos^3 \omega t = \frac{1}{4}\cos 3\omega t + \frac{3}{4}\cos \omega t$$

$\Rightarrow$ w Ψ - harmoniki!

Rezonans dla częstości podharmonicznych – pobudzanie harmonik.



Dwie siły wymuszające – częstości kombinacyjne.

Niech: $F = F_1 \cos\omega_1 t + F_2 \cos\omega_2 t$ $\omega_{2.} > \omega_1$

Z dokładnością do członów kwadratowych:

$$\Psi \cong a\left(F_1 \cos\omega_1 t + F_2 \cos\omega_2 t\right) + b\left(F_1 \cos\omega_1 t + F_2 \cos\omega_2 t\right)^2$$

dudnienia dla $\omega_{1.} \cong \omega_2$

$$\left(F_1 \cos\omega_1 t + F_2 \cos\omega_2 t\right)^2 = $$
$$= F_1^2 \cos^2 \omega_1 t + F_2^2 \cos^2 \omega_2 t + 2F_1F_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t$$

$\left(\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\right)$ $\Rightarrow$ drugie harmoniki i stała

$$2F_1F_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t =$$
$$= F_1F_2\left[\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_2 - \omega_1)t\right]$$

$\Rightarrow$ człony o częstościach kombinacyjnych, możliwości rezonansów

Jeśli zachować człon z $F^3 \Rightarrow$ także $2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1$