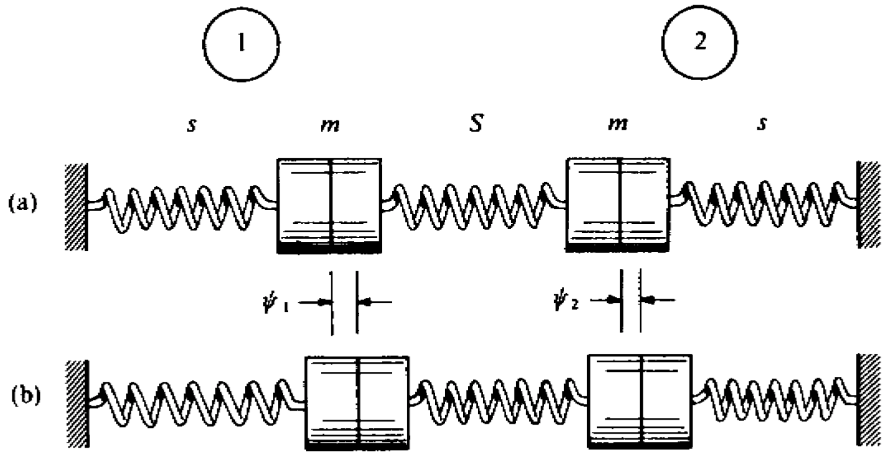
1.6. Drgania sprzężone



Układ jednowymiarowy; dwie współrzędne całkowicie opisują układ (Ψ w prawo od położenia równowagi)

$$m\ddot{\Psi}_1 = -s\Psi_1 - S(\Psi_1 - \Psi_2)$$
$$m\ddot{\Psi}_2 = -s\Psi_2 - S(\Psi_2 - \Psi_1)$$

$$(*) \qquad \begin{cases} \ddot{\Psi}_1 + \dfrac{s+S}{m}\Psi_1 - \dfrac{S}{m}\Psi_2 = 0 \\ \ddot{\Psi}_2 + \dfrac{s+S}{m}\Psi_2 - \dfrac{S}{m}\Psi_1 = 0 \end{cases}$$

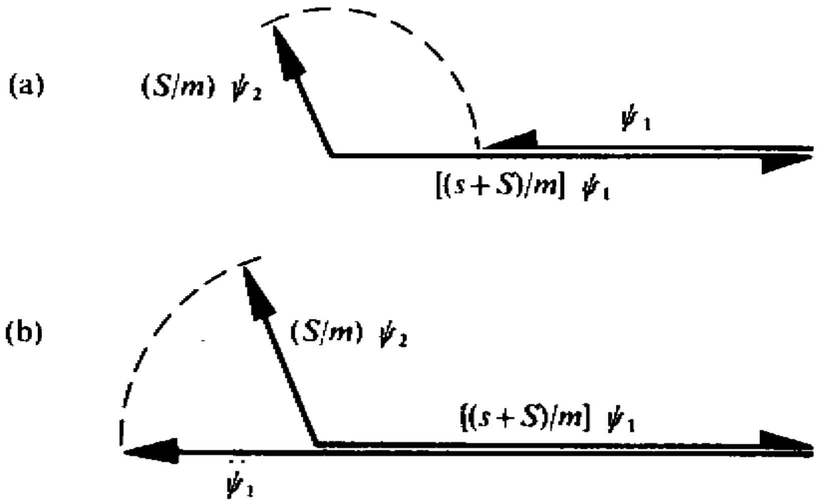
<u>Mody normalne:</u>

Bez sprzężenia – ruch każdej z mas harmoniczny.

Czy (*) może być spełnione przez Ψ_1, Ψ_2 zmieniające się harmonicznie?

Jeśli tak, to wszystkie człony w (*) harmoniczne i dla każdego z równań wypadkowa wskazów równa zero.

Dla (*1):



Stąd następujące warunki:

1. Częstości Ψ_1 i Ψ_2 takie same (aby suma była stała).
2. Ψ_1 i Ψ_2 w fazie (a) lub w przeciwfazie (b)

(wychylenie i przyspieszenie mają przeciwne zwroty)

3. Związek między amplitudami:

Niech: $\Psi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$

$$\Psi_2 = \pm A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$r \equiv \frac{\Psi_2}{\Psi_1} = \pm \frac{A_2}{A_1}$$

Z (*)
$$\left.\begin{aligned} \omega^2 - \frac{s+S}{m} + \frac{rS}{m} = 0 \\ \omega^2 - \frac{s+S}{m} + \frac{S}{rm} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{r} = r \Rightarrow r = \pm 1$$

$r = \pm 1 \Rightarrow \Psi_1, \Psi_2$ mają jednakowe amplitudy!

Może być $\Psi_1 = \Psi_2$ lub $\Psi_1 = -\Psi_2$

Dwa możliwe drgania harmoniczne – to mody normalne.

Częstość modów:

(1) „w fazie” (r = +1) $\omega_1 = \left(\dfrac{s}{m}\right)^{1/2}$

(2) „w przeciwfazie” (r = -1) $\omega_2 = \left(\dfrac{s+2S}{m}\right)^{1/2}$

$$\boxed{\omega_2 > \omega_1}$$

(1) $\Psi_2 = \Psi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

(2) $\Psi_2 = -\Psi_1 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ charakteryzują cały układ.

Współrzędne normalne:

Dla $(1) \Rightarrow (\Psi_2 - \Psi_1) = 0, \ (\Psi_1 + \Psi_2) = harm.$

$(2) \Rightarrow (\Psi_2 - \Psi_1) = harm., \ (\Psi_1 + \Psi_2) = 0$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &\equiv \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} (\Psi_1 + \Psi_2) \\ q_2 &\equiv \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} (-\Psi_1 + \Psi_2) \end{aligned}\right\} \text{współrzędne normalne}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1 &= \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2}(q_1 - q_2)\\ \Psi_2 &= \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2}(q_1 + q_2)\end{aligned}\right\}$$

Podstawiając do równań ruchu:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= 0\\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{Nie są sprzężone! PROSTE!}$$

$$\left.\begin{aligned}q_1 &= a_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\\ q_2 &= a_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}\right\}$$

$$\Psi_1 = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2}\left[a_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - a_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$$

$$\Psi_2 = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2}\left[a_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$$

W ogólności ruch każdej z mas jest dany częstościami obu modów normalnych – nie jest harmoniczny!

Gdy tylko $\left.\begin{aligned}(1) &\to a_2 = 0\\ (2) &\to a_1 = 0\end{aligned}\right\}$ harmoniczne

<u>Przykłady:</u>

1) Obie masy o A_0 w prawo i puszczamy

$$\Psi_1(0) = A_0 \qquad \Psi_2(0) = A_0$$

$$\dot{\Psi}_1(0) = 0 \qquad \dot{\Psi}_2(0) = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} q_1(0)=a_0 & q_2(0)=0 \\ \dot{q}_1(0)=0 & \dot{q}_2(0)=0 \end{array}\right\}$$ wzbudzony 1 mod

$$a_0=(2m)^{1/2}A_0 \qquad q_1=a_0\cos\omega_1 t$$

$$\Rightarrow \Psi_1=A_0\cos\omega_1 t, \qquad \Psi_2=A_0\cos\omega_1 t$$

Sprężyna pomiędzy masami nie pracuje!

2) $\Psi_1(0)=A_0 \quad \Psi_2(0)=-A_0$

$$\dot{\Psi}_1(0)=0 \quad \dot{\Psi}_2(0)=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} q_1(0)=a_0 & q_2(0)=-a_0 \\ \dot{q}_1(0)=0 & \dot{q}_2(0)=0 \end{array}\right\}$$

$$a_0=(2m)^{1/2}A_0$$

Wzbudzony tylko mod (2) $\qquad q_2=A_0\cos\omega_2 t$

$$\Psi_1=A_0\cos\omega_2 t,$$
$$\Psi_2=A_0\cos(\omega_2 t+\pi)=-A_0\cos\omega_2 t$$

$\omega_2>\omega_1$ (sprężyna sprzęgająca pracuje)

3). Niech m_1 o $2^{1/2}A_0$ w prawo, masa m_2 w położeniu równowagi i obie równocześnie puszczone:

$$\left.\begin{array}{ll} \Psi_1(0)=\sqrt{2}A_0 & \Psi_2(0)=0 \\ \dot{\Psi}_1(0)=0 & \dot{\Psi}_2(0)=0 \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} q_1(0)=\dfrac{a_0}{\sqrt{2}} & q_2(0)=-\dfrac{a_0}{\sqrt{2}} \\ \dot{q}_1(0)=0 & \dot{q}_2(0)=0 \end{array}\right\}$$

- wzbudzone są oba mody

$$q_1=\frac{a_0}{\sqrt{2}}\cos\omega_1 t$$

$$q_2=\frac{a_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega_2 t+\pi)=-\frac{a_0}{\sqrt{2}}\cos\omega_2 t$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_1=\dfrac{A_0}{\sqrt{2}}(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t) \\ \Psi_2=\dfrac{A_0}{\sqrt{2}}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t) \end{array}\right\}$$

Dla małych $S\Rightarrow\omega_1\cong\omega_2\Rightarrow$ dudnienia.

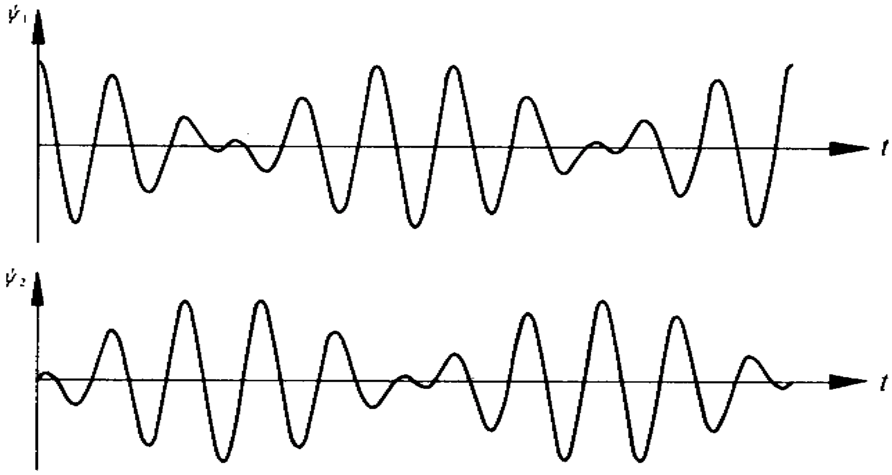
Niech $\Omega_+\equiv\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ $\Omega_-\equiv\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)$

$$\Psi_1=\sqrt{2}A_0\cos\Omega\_t\cos\Omega_+t \quad \Psi_2=\sqrt{2}A_0\sin\Omega\_t\cos\Omega_+t$$

Masy drgają z częstością bliską ω_0, przesunięte w fazie o 90º.

Czynniki modulujące (z Ω_t) też są przesunięte o 90º.

„Okres"amplitudy$\cong\frac{s}{S}$



$$\frac{S}{s} = \frac{20}{81}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{11}{9}; \quad \Omega_+ = 10\Omega_-$$

S małe - przepływ energii <u>do</u> masy opóźnionej w fazie o 90º $\Rightarrow$ masa wymuszająca i drgająca.

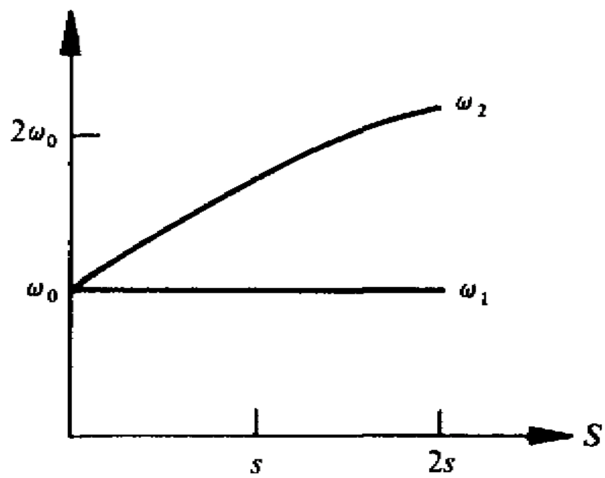
Czynnik modulujący zero $\Rightarrow$ zmiana znaku $\Rightarrow$ 180º.

Amplitudy w przybliżeniu równe dla $\Omega_{-t} \cong \frac{1}{4}\pi$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &\cong A_0 \cos \Omega_+ t \\ \Psi_2 &\cong A_0 \sin \Omega_+ t \end{aligned}\right\}$$

W zależności od warunków poczatkowych: a) masy w fazie, b) w przeciwfazie, c) przesunięte o 90^0 z wymianą „lidera" co $\pi / \Omega_- \approx s / S$ (rys.(a), (b), (c)).

Zależność częstości modów od sprzężenia:



Energia:

$$T = \frac{1}{2} m\, \dot{\Psi}_1^2 + \frac{1}{2} m\, \dot{\Psi}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} s\, \Psi_1^2 + \frac{1}{2} s\, \Psi_2^2 + \frac{1}{2} S\left(\Psi_2 - \Psi_1\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(s+S)\Psi_1^2 + \frac{1}{2}(s+S)\Psi_2^2 - S\, \Psi_1 \Psi_2$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}(s/m) q_1^2 + \frac{1}{2}[(s+2S)/m] q_2^2 = \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 q_2^2$$

$$W = T + V = \left(\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 q_2^2\right)$$

Całkowita energia $\Rightarrow$ suma energii jakie by miał układ gdyby mody były wzbudzane osobno.

Podsumowanie:

- dwa mody własne (obie masy poruszają się ruchem harmonicznym, z jednakowymi częstościami i amplitudami – w fazie w jednym modzie i przeciwfazie w drugim,
- różnica częstości modów rośnie ze wzrostem sprzężenia,

- najwygodniejszy opis przy pomocy współrzędnych normalnych, które:
  - spełniają niezależne równania ruchu,
  - każdy mod normalny opisuje jedna współrzędna normalna,
- energie kinetyczna i potencjalna są dane prostymi sumami kwadratów współrzędnych normalnych, a współczynniki dla energii potencjalnej są określone częstościami modów.

Metoda ogólna:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\Psi}_1 &= -a_{11}\Psi_1 - a_{12}\Psi_2 \\ \ddot{\Psi}_2 &= -a_{21}\Psi_1 - a_{22}\Psi_2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1 &= A_1\cos(\omega t + \varphi) \\ \Psi_2 &= A_2\cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}\right\}$$ Założenie drgań harmonicznych

$$\ddot{\Psi}_1 = -\omega^2\Psi_1 \qquad \ddot{\Psi}_2 = -\omega^2\Psi_2$$

(*)
$$\left.\begin{aligned}\left(a_{11} - \omega^2\right)\Psi_1 + a_{12}\Psi_2 &= 0 \\ a_{21}\Psi_1 + \left(a_{22} - \omega^2\right)\Psi_2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

Warunek rozwiązywalności:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1, \omega_2$$

Dla ω_1: $\left.\begin{aligned}\Psi_1^{(1)} &= A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\\ \Psi_2^{(1)} &= A_2^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\end{aligned}\right\}$ drgania podstawowe

Dla ω_2: $\left.\begin{aligned}\Psi_1^{(2)} &= A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \Psi_2^{(2)} &= A_2^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{aligned}\right\}$

Dla ω_1: $\dfrac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \dfrac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} \equiv \mu_1$

Dla ω_2: $\dfrac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \dfrac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} \equiv \mu_2$

<u>Ogólna postać drgań:</u>

$$\Psi_1(t) = \Psi_1^{(1)} + \Psi_1^{(2)} = A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$\Psi_2(t) = \Psi_2^{(1)} + \Psi_2^{(2)} = \mu_1 A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + \mu_2 A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$A_1^{(1)};\ A_1^{(2)};\ \varphi_1;\ \varphi_2$ - z warunków początkowych

<u>Drgania wymuszone:</u>

Siła $F_0 \cos \omega t$ przyłożona do masy (1)

$$m\ddot{\Psi}_1 = -s\,\Psi_1 - S(\Psi_1 - \Psi_2) - b\,\dot{\Psi}_1 + F_0\cos\omega t$$
$$m\ddot{\Psi} = -s\,\Psi_2 - S(\Psi_2 - \Psi_1) - b\,\dot{\Psi}_2$$
$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{q}_1 + \gamma \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \left(\frac{1}{2} m\right)^{1/2} \cdot F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{q}_2 + \gamma \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -\left(\frac{1}{2} m\right)^{1/2} \cdot F_0 \cos \omega t =$$

$$= \left(\frac{1}{2} m\right)^{1/2} \cdot F_0 \cos(\omega t + \pi)$$

$$\Downarrow$$

$$q_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$q_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

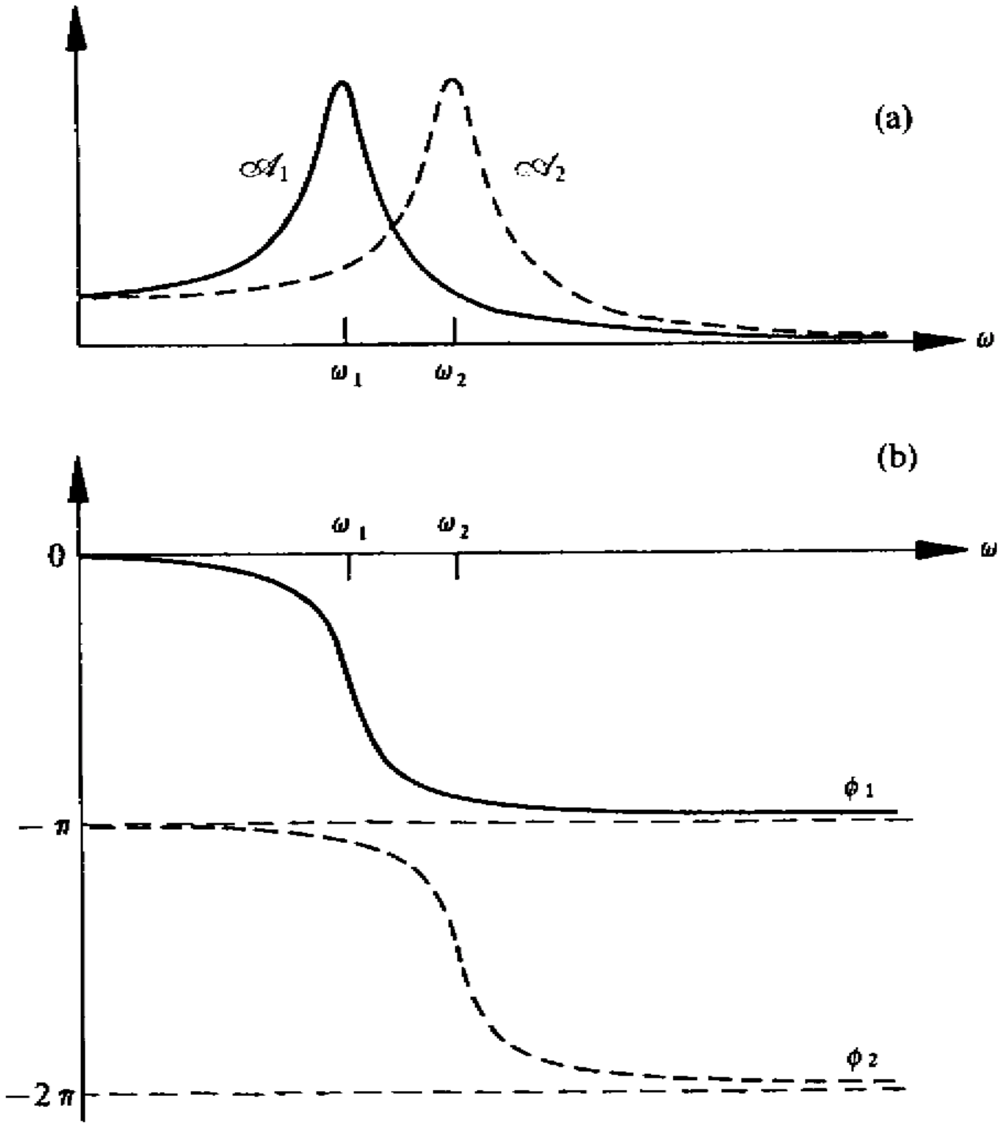
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= \left(\frac{1}{2} m\right)^{1/2} \left[a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\right] \\ \Psi_2 &= \left(\frac{1}{2} m\right)^{1/2} \left[a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\right] \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} A_1^2 &= \left(\frac{1}{2} m\right)\left[a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] \\ A_2^2 &= \left(\frac{1}{2} m\right)\left[a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right] \end{aligned}\right.$$

$$a_1 = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\left[\frac{1}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}\right]^{1/2}$$

$$a_2 = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\left[\frac{1}{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}\right]^{1/2}$$



Dla $\omega << \omega_1$ i $\omega >> \omega_2$ q_1, q_2 w przeciwfazie (nie jest to przypadek ogólny)

Rezonans

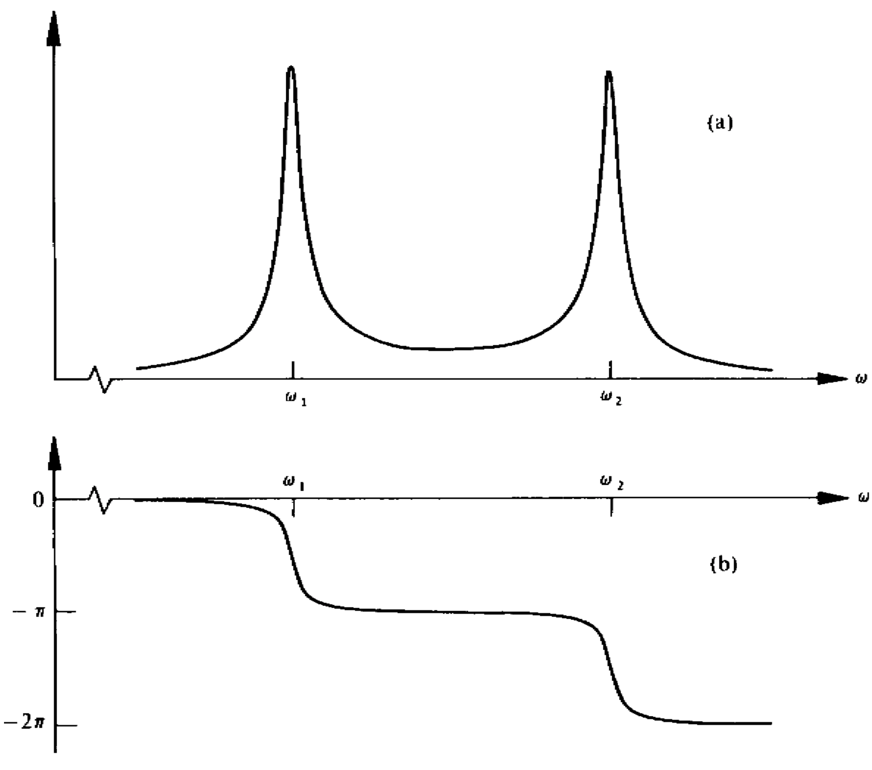
Niech $\omega_2 - \omega_1 >> \gamma$ - wzbudzanie pojedyńczych modów

Niech: $\omega_1 << \omega << \omega_2 \;\Rightarrow\; \varphi_1, \varphi_2 \cong -\pi$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= -\left(\frac{1}{2}m\right)^{1/2}(a_1 - a_2)\cos\omega t \\ \Psi_2 &= -\left(\frac{1}{2}m\right)^{1/2}(a_1 + a_2)\cos\omega t \end{aligned}\right\} \qquad |\Psi_2| > |\Psi_2|$$

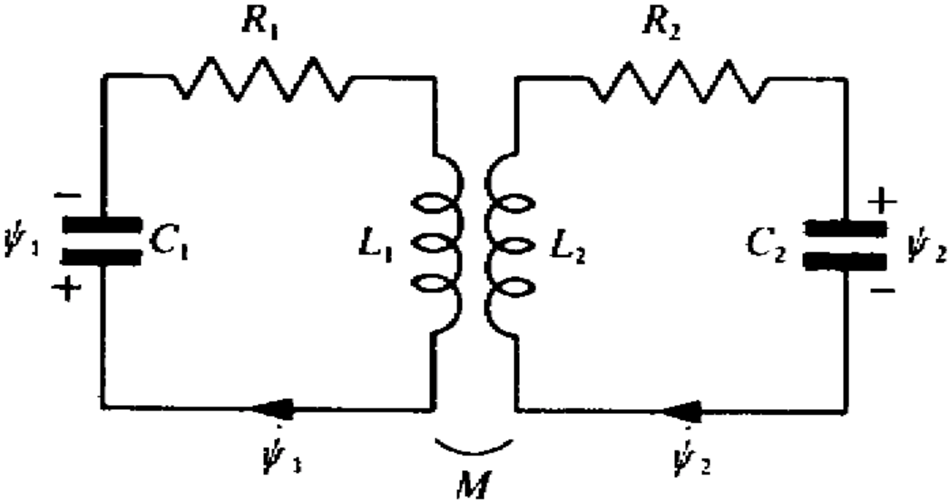
- dla małych ω $a_1 > a_2 \;\Rightarrow m_1$ w przeciwfazie do F
- dla dużych ω $a_1 < a_2 \;\Rightarrow m_1$ w fazie
- m_2 w przeciwfazie do F dla wszystkich ω

Amplituda = f(ω) dla masy m_2 (siła działa na m_1):



Obwody sprzężone:

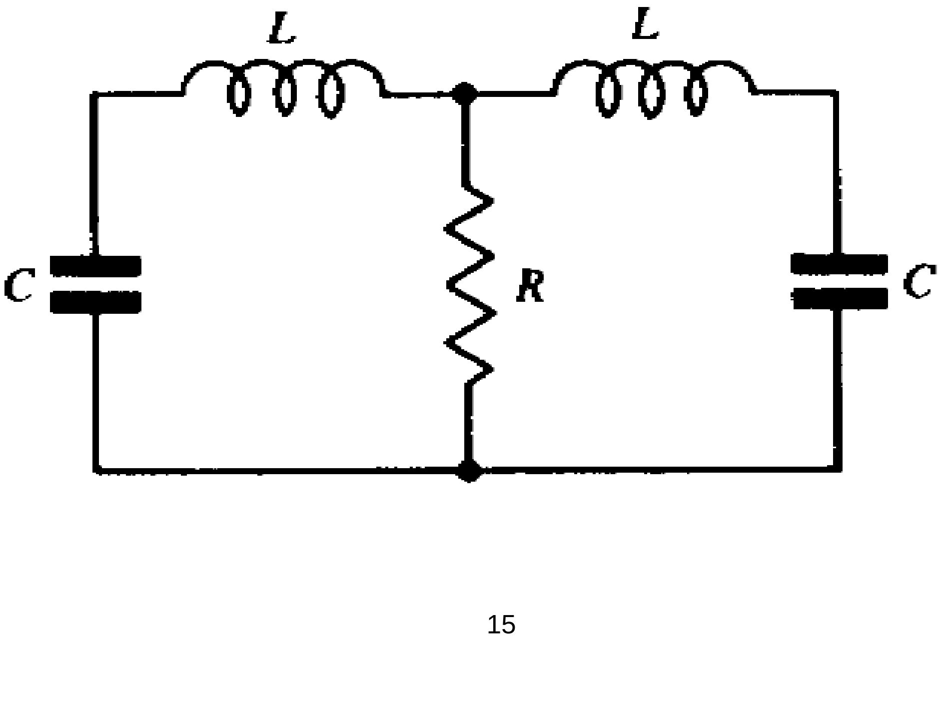
a). Indukcyjnie:



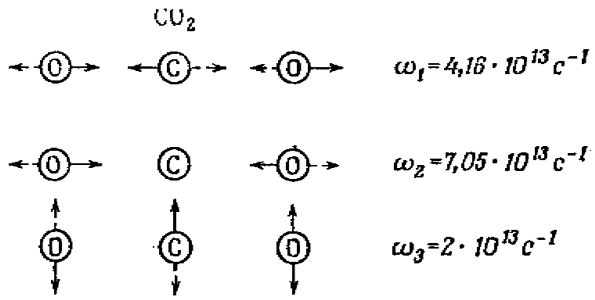
$$\left.\begin{aligned} L\,\ddot{\Psi}_1 + M\,\ddot{\Psi}_2 + \left(\frac{1}{c}\right)\Psi_1 + R_1\dot{\Psi}_1 &= 0 \\ L\,\ddot{\Psi}_2 + M\,\ddot{\Psi}_1 + \left(\frac{1}{c}\right)\Psi_2 + R_2\dot{\Psi}_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Dla $R_1C_1 = R_2C_2 \;\Rightarrow$ metoda modów normalnych

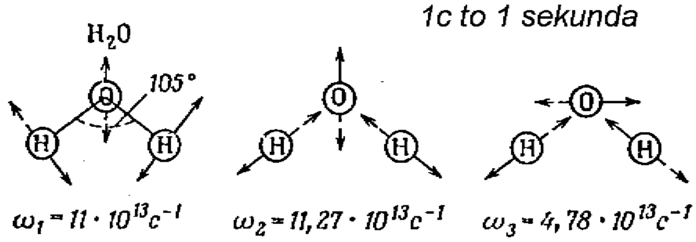
b). Opornościowo:



Drgania cząsteczek:



1c to 1 sekunda



Laser CO_2: