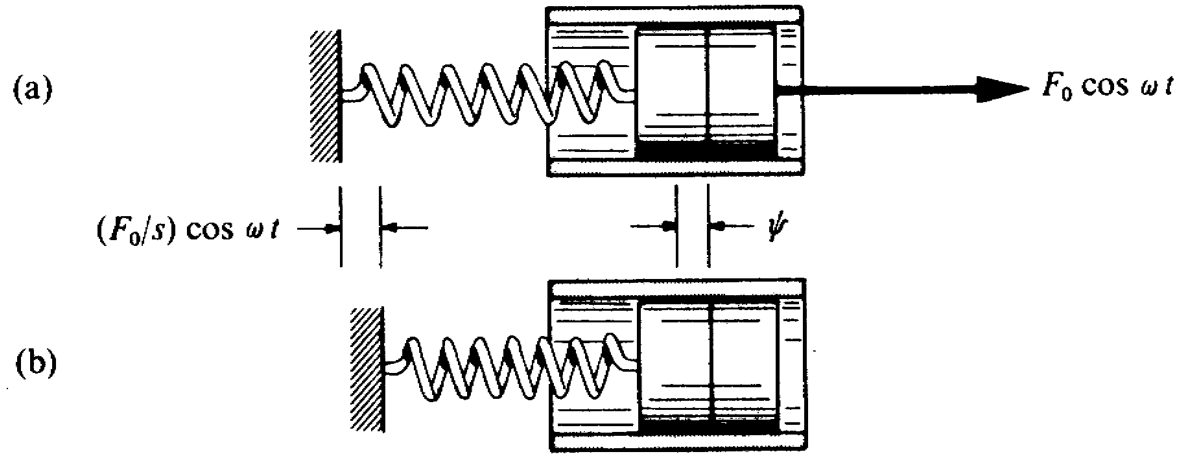
Drgania wymuszone. Rezonans

Oscylator pod działaniem zmiennej w czasie siły:



(a) siła przyłożona bezpośrednio do masy,

(b) ruch punktu zaczepienia sprężyny (np. masywny obiekt połączony sprężyście z elementem drgającym).

Niech $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (harmoniczna)

<u>Równanie ruchu</u>:

$$m\ddot{\Psi} = -k\Psi - b\dot{\Psi} + F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{\Psi} + \gamma \dot{\Psi} + \omega_0^2 \Psi = \left(\frac{F_0}{m}\right) \cos \omega t$$

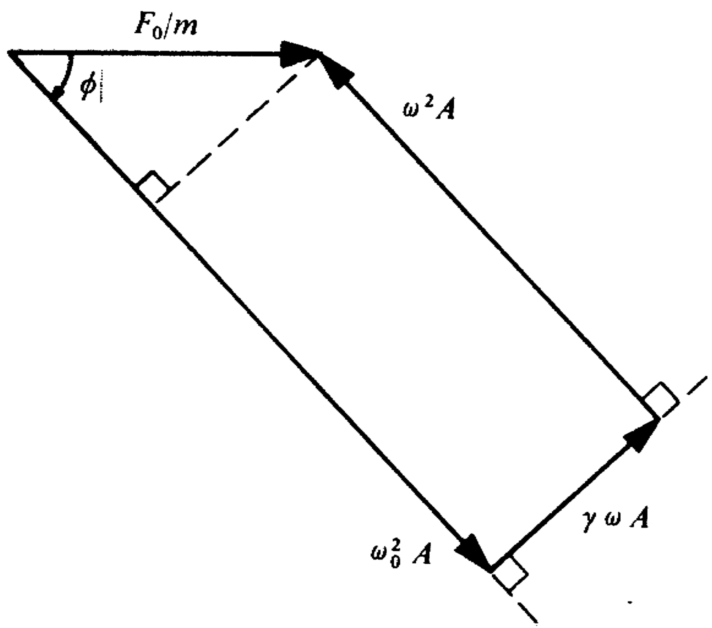
<u>Stany ustalone</u> ($t >> 1/\gamma$)

- drgania harmoniczne masy z częstością siły wymuszającej,
- stałe przesunięcie fazowe między wychyleniem i siłą (ew. 0).

$$\Psi = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Szukamy $A = A(\omega, F_0)$, $\varphi = \varphi(\omega, F_0)$

<u>Diagram wektorowy:</u> $\omega_0 > \omega$



$$-\pi < \varphi \le 0$$

$F = F_0 \cos \omega t \leftarrow$ stała fazowa zero

φ - faza, o którą siła jest wyprzedzana przez Ψ

φ - ujemne (konwencja: na diagramach dodatnie, gdy jest przeciwne do kierunku ruchu wskazówek zegara).

Wychylenie opóźnia się w stosunku do siły wymuszającej.

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Opóźnienie zależy od częstości, nie zależy od wielkości siły wymuszającej.

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + \gamma^2\omega^2 A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

$$A = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right]^{1/2}$$

<u>Rozwiązanie równania ruchu.</u>

<u>Bez tłumienia:</u> $m\ddot{x} + kx = F(t)$ (1)

Rozwiązanie jest sumą ogólnego rozwiązania równania jednorodnego

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{czyli} \quad x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \left(\upsilon_0/\omega_0\right)\sin\omega_0 t$$

oraz szczególnego rozwiązania równania (1) np. z warunkami początkowymi $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. (2)

Stosując metodę uzmienniania stałych szukamy rozwiązania (1) w postaci $x(t) = C_1(t)\cos\omega_0 t + C_2(t)\sin\omega_0 t$ (3)

z warunkiem: $\dot{C}_1(t)\cos\omega_0 t + \dot{C}_2(t)\sin\omega_0 t = 0$ (4)

Podstawiając (3) do (1) z uwzględnieniem (4):

$$-\dot{C}_1(t)\omega_0 \sin\omega_0 t + \dot{C}_2(t)\omega_0 \cos\omega_0 t = (1/m)F(t) \qquad (5)$$

Z układu (4) i (5):

$$\left.\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= -\frac{F(t)}{m\omega_0}\sin\omega_0 t \\ \dot{C}_2(t) &= \frac{F(t)}{m\omega_0}\cos\omega_0 t \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{m\omega_0}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_0\tau\, d\tau + A_1 \\ C_2(t) &= \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t F(\tau)\cos\omega_0\tau\, d\tau + A_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

A_1, A_2 stałe dowolne.

Podstawiając (7) do (3):

$$x(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau$$

Z (2): $A_1 = A_2 = 0$

$$\underline{x(t) = \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau}$$

<u>Analogicznie dla słabego tłumienia:</u>

$$\underline{x(t) = \frac{1}{m\omega_f}\int_0^t F(\tau)e^{-\frac{\gamma}{2}(t-\tau)}\sin\omega_f(t-\tau)\,d\tau :}$$

$$\omega_f{}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

Niech $F = F_0 \sin \omega t$ oraz słabe tłumienie $(\gamma < 2\omega_0)$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_f} \int_0^t \sin \omega\tau \, e^{-\frac{\gamma}{2}(t-\tau)} \sin \omega_f (t-\tau) \, d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_0 \omega}{m\omega_f} \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \left[\gamma \omega_f \cos \omega_f t + \right.$$

$$\left. - \left(\omega_f - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega \right) \sin \omega_f t \right] +$$

$$+ \frac{F_0}{m} \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \sin \omega t - \gamma \omega \cos \omega t\right]$$

$$x(t) = \underbrace{- a_1 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin\left(\omega_f t - \psi\right)}_{I} + \underbrace{a \sin\left(\omega t - \varphi\right)}_{II} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{F_0 \omega}{m\omega_f} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}; \quad tg\,\psi = \frac{\gamma \omega_f}{\omega_f^2 - (\gamma/2)^2 - \omega^2}$$

$$a = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}; \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

I – tłumione drgania swobodne (stan nieustalony)

II - ustalone drgania wymuszone

Znaleźliśmy amplitudę:

$$\underline{A = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right]^{1/2}}$$

Definiujemy funkcję odpowiedzi:

$$R(\omega) \equiv \frac{\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \qquad 0 \leq R(\omega) \leq 1$$

Amplituda wychylenia:

$$A = \frac{F_0}{b\omega}\left[R(\omega)\right]^{1/2} \qquad \left(= \frac{F_0 Q}{k}\left[R(\omega)\right]^{1/2}\right)$$

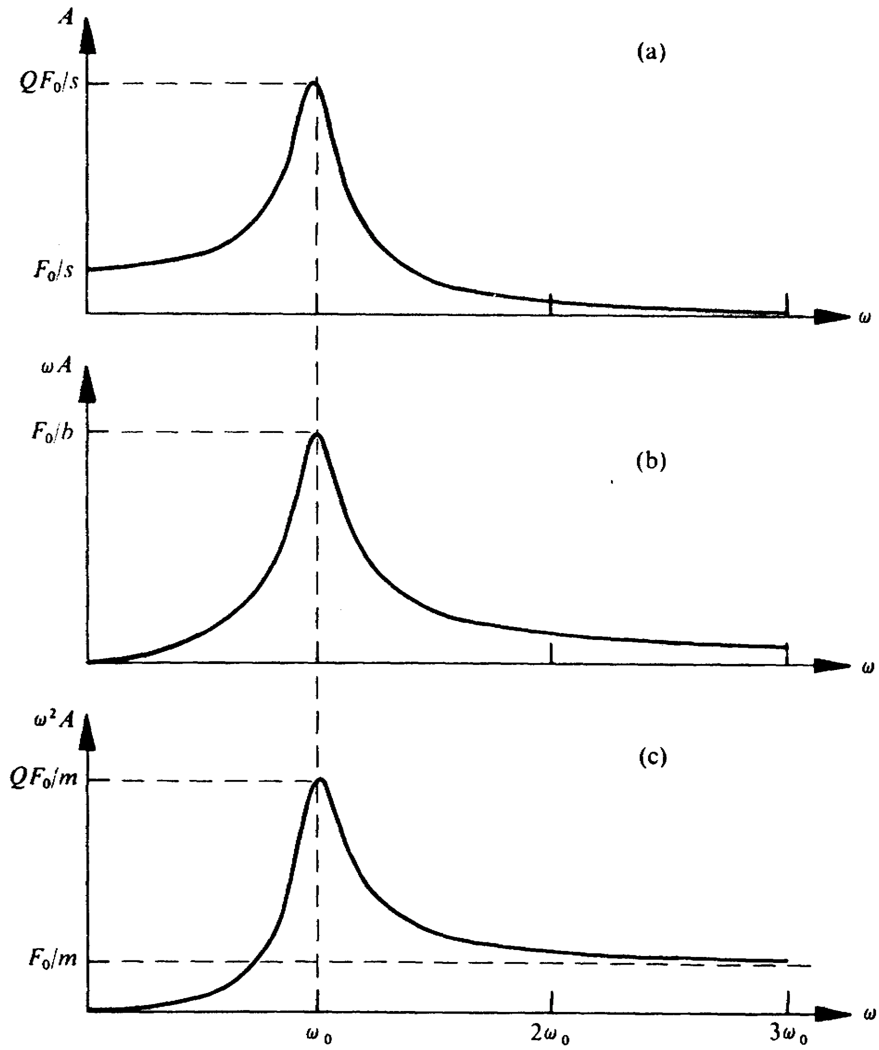
Amplituda prędkości:

$$\omega A = \frac{F_0}{b}\left[R(\omega)\right]^{1/2}$$

Amplituda przyspieszenia:

$$\omega^2 A = \frac{F_0\omega}{b}\left[R(\omega)\right]^{1/2} \qquad \left(= \frac{F_0 Q}{m}\left[R(\omega)\right]^{1/2}\right)$$

Słabe tłumienie, rezonans



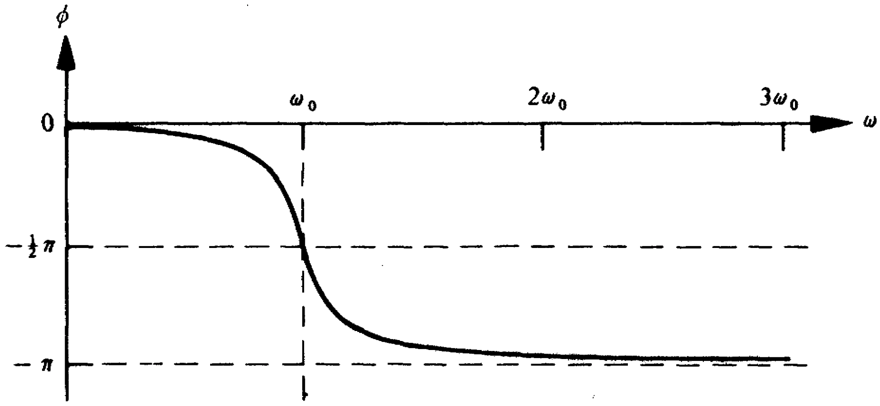
$dla(a) \quad A_r = \dfrac{F_0}{m\gamma\omega_r}$ $\qquad \omega_r \rightarrow$ częstość rezonansowa

Prędkość: $\omega_r = \omega_0 \quad \left(\omega A \sim \sqrt{R(\omega)}\right)$

Wychylenie: $\omega_r < \omega_0 \quad \left(A \sim \dfrac{1}{\omega}\sqrt{R(\omega)}\right)$ duże ω tłumi

Przyspieszenie: $\omega_r > \omega_0 \quad \left(A \sim \omega\sqrt{R(\omega)}\right)$ duże ω podnosi

Faza:



$$\varphi_r = -\pi/2$$

(a) opóźnienie wychylenia o $\pi/2$ w stosunku do siły wymuszającej, (b) w ruchu harmonicznym wychylenie jest opóźnione o $\pi/2$ w stosunku do prędkości$\Rightarrow$ w rezonansie prędkość jest w fazie z siłą wymuszającą.

Niech $\omega << \omega_0$:

$$\varphi \approx 0 \qquad A \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \qquad \Psi \approx \frac{F_0}{k}\cos\omega t$$

$\Psi \neq f(m,\gamma)$, przewaga sprężystości - małe przyspieszenia wymagają małej części siły wymuszającej, „reszta" równoważy sprężystą siłę zwrotną – siła wymuszająca musi być w przybliżeniu w fazie z wychyleniem.

Dla $\omega >> \omega_0$:

$$\varphi \approx -\pi \quad A \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \quad \Psi \approx -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t$$

Przewaga bezwładności - siła sprężysta mała w porównaniu z siłą nadającą masie duże przyspieszenie, siła wymuszająca daje prawie całą siłę zwrotną – jest więc prawie w przeciwfazie w stosunku do wychylenia.

$\omega << \omega_0$ - małe częstości - małe przyspieszenia, amplituda wychylenia $A \geq \dfrac{F_0}{k}$

$\omega >> \omega_0$ - duże częstości - małe wychylenia, amplituda przyspieszenia $\omega^2 A \geq \dfrac{F_0}{m}$

(Izolacja antywibracyjna – aby zabezpieczyć obiekt od drgań o częstości ω występujących na drugim końcu „sprężyny”, powinniśmy dobrać „sprężynę” taką, aby $\omega_0 << \omega$.)

Jeśli nie ma tłumienia $\gamma = 0$ $\lim\limits_{\omega \to \omega_r} A = \infty$

$\Rightarrow$ <u>ruch w rezonansie jest ograniczony tłumieniem.</u>

Wzmocnienie

Amplituda:

Ruch punktu zamocowania sprężyny z częstością rezonansową i amplitudą $\frac{F_0}{k}$ wywołuje drgania masy z tą samą częstością o amplitudzie $\cong \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$.

Współczynnik wzmocnienia:

$$\eta \cong \frac{k}{m\gamma\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{\gamma\omega_0} = \frac{\omega_0}{\gamma} = Q$$

Przyspieszenie:

Przyspieszenie masy m dla częstości rezonansowej $(\omega_r \cong \omega_0)$:

$$\omega_0^2 A = \omega_0^2 \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} = \frac{\omega_0}{\gamma}\frac{F_0}{m}$$

$$\underline{\omega_0^2 A = Q\, F_0/m}$$

Na zamocowanie działa siła QF_0, a nie F_0!

Wzmocnienie $\eta = Q$ dla $\omega = \omega_0$, dla wychylenia i przyspieszenia $\omega_r \neq \omega_0 \Rightarrow \eta(\omega_r) > Q$

Pochłanianie mocy:

Stan stacjonarny – siła wymuszająca wyrównuje straty.

Ruch od Ψ do $\Psi+\Delta\Psi$ od pracy przeciw sile oporu: $-F_r\Delta\Psi$.

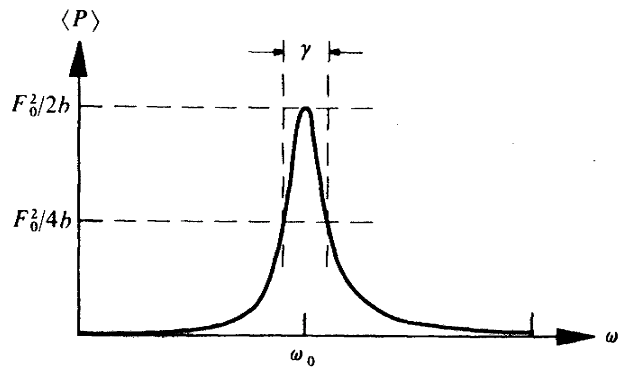
Szybkość rozpraszania energii: $-F_r\,\Delta\Psi/\Delta t$; w granicy $\Delta t \to 0 \;\Rightarrow$ moc chwilowa pochłaniana w warunkach stacjonarnych

$$P = -F_r\dot{\Psi} = b\dot{\Psi}^2$$

$\langle P\rangle = ?$ - średnia moc dla wielu cykli

$$\left\langle \dot{\Psi}^2 \right\rangle_{cykl} = \frac{1}{2}(\omega A)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{b}\right)^2 R(\omega) \Rightarrow \langle P\rangle = \frac{F_0^2}{2b}R(\omega)$$

$$\langle P\rangle = \frac{F_0^2}{2m\gamma}\left[\frac{\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}\right]$$



$$\langle P\rangle = \frac{F_0^2}{2b}\left[\frac{(\gamma/2)^2}{\left(\omega_0-\omega\right)^2+(\gamma/2)^2}\right]$$ - linia lorentzowska

$$\mathrm{Max}(\langle P\rangle) = \frac{F_0^2}{2b} \quad \text{dla} \quad \omega = \omega_0$$

Niech $R(\omega_1) = \frac{1}{2}$ dla $\omega_1 < \omega_0$

$$\gamma^2\omega_1^2 = (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2$$

$$(*) \qquad \gamma\omega_1 = \omega_0^2 - \omega_1^2$$

Niech $R(\omega_1) = \frac{1}{2}$ dla $\omega_2 > \omega_0$

$$(**) \qquad \gamma\omega_2 = -(\omega_0^2 - \omega_2^2)$$

$$(*)+(**) \quad \Rightarrow \quad \gamma(\omega_1 + \omega_2) = \omega_2^2 - \omega_1^2 = $$
$$= (\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)$$

$$\underline{\gamma = \omega_2 - \omega_1} \qquad\qquad \underline{\frac{1}{\tau} = \omega_2 - \omega_1}$$

γ - zakres częstości, dla którego $\langle P\rangle$ przewyższa połowę swojej wartości maksymalnej – SZEROKOŚĆ POŁÓWKOWA

⇒ szerokość połówkowa krzywej rezonansowej jest równa stałej zaniku energii układu drgającego swobodnie.

⇒ pomiar krzywej rezonansowej daje stałą zaniku energii.

Amplituda absorpcyjna i elastyczna:

$$\Psi = B_q \sin\omega t + B_f \cos\omega t \qquad F = F_0 \cos\omega t$$

$$B_q = \frac{F_0}{m}\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \equiv A_{ab}$$

$$B_f = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \equiv A_{el}$$

A_{ab} – amplituda absorpcyjna

A_{el} – amplituda elastyczna

$A_{ab} \sin\omega t$ - daje średnią w czasie absorpcję mocy

$A_{el} \cos\omega t$ - daje chwilową absorpcję mocy, średniującą się do zera

$$F(t) = F_0 \cos\omega t$$

$$\Psi(t) = A_{ab} \sin\omega t + A_{el} \cos\omega t$$

$$\dot{\Psi}(t) = \omega\, A_{ab} \cos\,\omega t - \omega A_{el} \sin\,\omega t$$

Chwilowa absorpcja mocy:

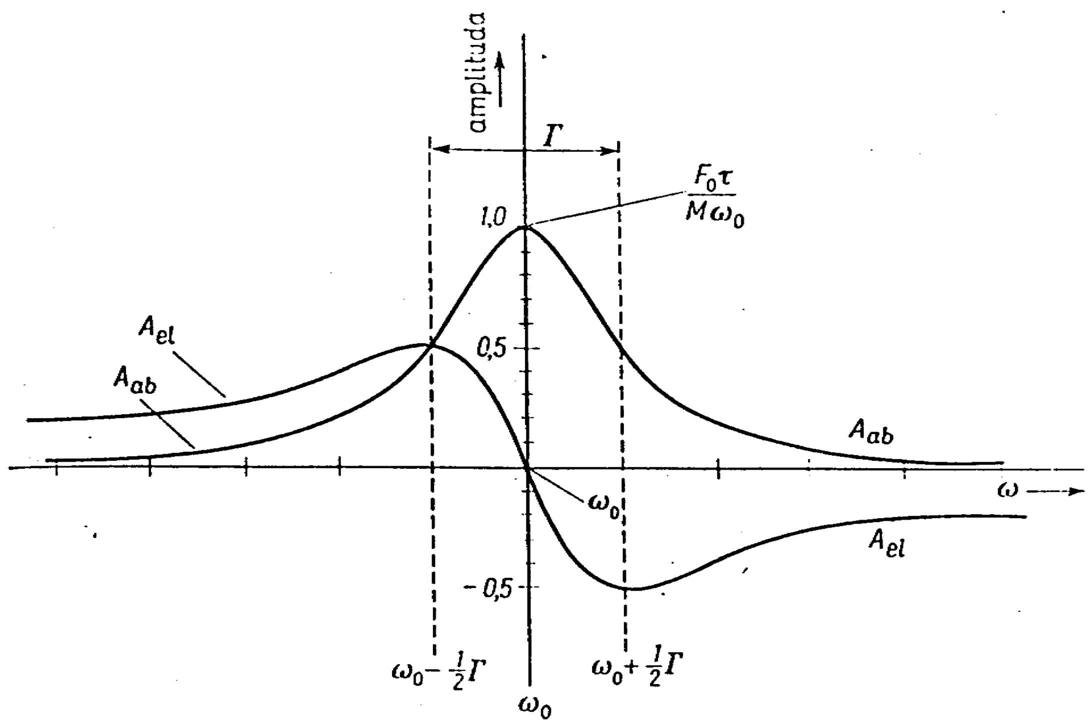
$$P(t) = F(t)\dot{\Psi}(t) = F_0 \cos\omega t\left(\omega\, A_{ab} \cos\omega t - \omega A_{el} \sin\omega t\right)$$

Średnia po okresie:

$$P = F_0\omega A_{ab}\left\langle \cos^2 \omega t\right\rangle - F_0\omega A_{el}\left\langle \cos\omega t \sin\omega t\right\rangle$$

$$\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T}\cos^2\omega t\,dt=\frac{1}{2}\Rightarrow\left\langle\cos^2\omega t\right\rangle=\frac{1}{2};\ \left\langle\cos\omega t\sin\omega t\right\rangle=0$$

$P=\frac{1}{2}F_0\omega A_{ab}$ - średnia szybkość absorpcji energii $\sim A_{ab}$



$$s=\frac{A_{el}}{A_{ab}}=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\gamma\omega};\ s>0\ dla\quad \omega<\omega_0,\ s<0\ dla\quad \omega>\omega_0$$

$$\gamma\omega\ll\left|\omega_0^2-\omega^2\right|\ \Rightarrow\ A_{ab}\text{ małe}$$

Daleko od rezonansu:

$$\Psi(t)\cong A_{el}\cos\omega t$$

$$\Psi(t)=\frac{F_0\cos\omega t}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\qquad(\neq f(\gamma))$$

Zespolone funkcje odpowiedzi:

$$\boxed{\widetilde{\Psi}(t) = \widetilde{A}e^{i\omega t}}; \qquad \mathrm{Re}\,\widetilde{A} = B_f; \quad \mathrm{Im}\,\widetilde{A} = -B_q$$

$$\widetilde{A} = \frac{F_0}{m}\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\gamma^2\omega^2} - i\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\gamma^2\omega^2}\right)$$

$$\widetilde{A} = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\gamma^2\omega^2}$$

$$\underline{\widetilde{A} = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}}$$

Podatność mechaniczna (compliance):

$$\widetilde{K}(\omega) \equiv \frac{\widetilde{A}}{F_0} = \frac{1}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\gamma\omega}$$

$$\widetilde{K}(\omega) = \frac{1}{\left(k-m\omega^2\right)+ib\omega}$$

Impedancja mechaniczna:

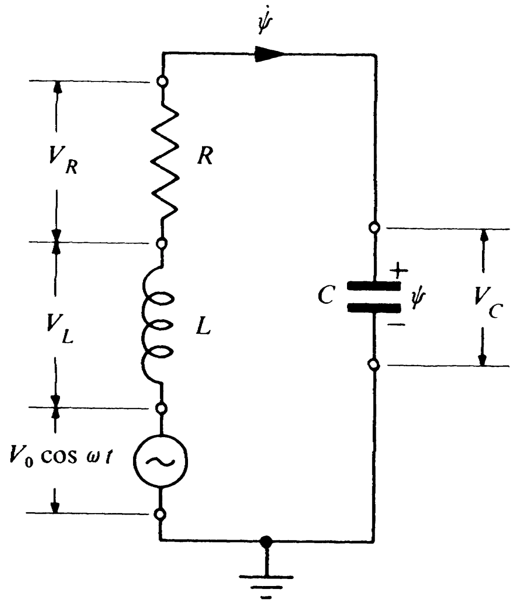
$$\widetilde{Z}(\omega) \equiv \frac{F_0}{\widetilde{\upsilon}_0} = \frac{F_0}{i\omega\widetilde{A}} = \frac{1}{i\omega\widetilde{K}(\omega)}$$

$$\widetilde{Z}(\omega) = \frac{\left(k-m\omega^2\right)+ib\omega}{i\omega}$$

$$\widetilde{Z}(\omega) = b + i\left(m\omega - k/\omega\right)$$

$$Z(\omega) = \sqrt{b^2 + \left(m\omega - k/\omega\right)^2}$$

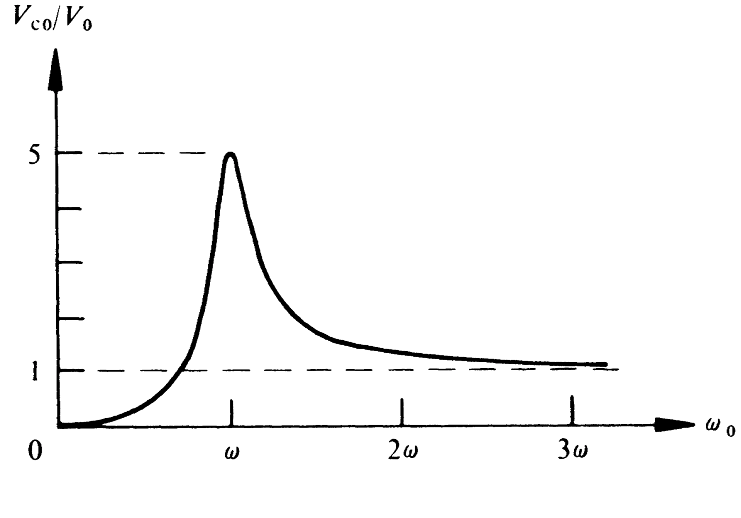
Obwód RLC:



$$V_C(t) + V_R(t) + V_L(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$V_C(t) = C^{-1}\Psi \,;\; V_R(t) = R\dot{\Psi} \,;\; V_L(t) = L\left(d\,\dot{\Psi}/dt\right) = L\ddot{\Psi}$$

$$\frac{V_{C0}}{V_0} = \frac{1}{LC}\left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right]^{1/2} ; \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$



Impedancja elektryczna:

$$\tilde{U} = \tilde{I}\,\tilde{Z} \qquad \left(\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}\right)$$

$$\tilde{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega c)^2}$$

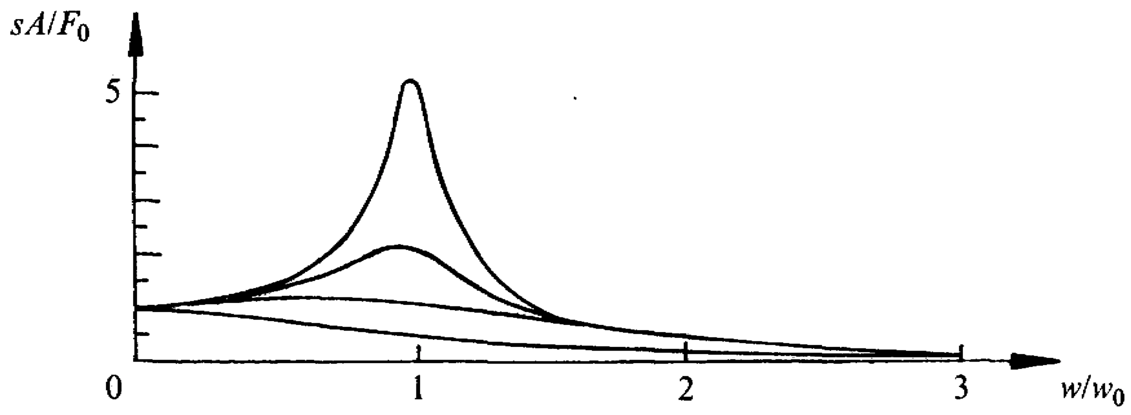
<u>Silne tłumienie</u>

$$\gamma > 2\omega_0, \qquad Q < \frac{1}{2}$$

- ruch aperiodyczny – nie ma drgań

- siła wymuszająca może je wywołać

Wzmocnienie $\eta = Q$ w rezonansie <1 - OSŁABIENIE!



Rezonans dla Q=5, 2, 1, ½.

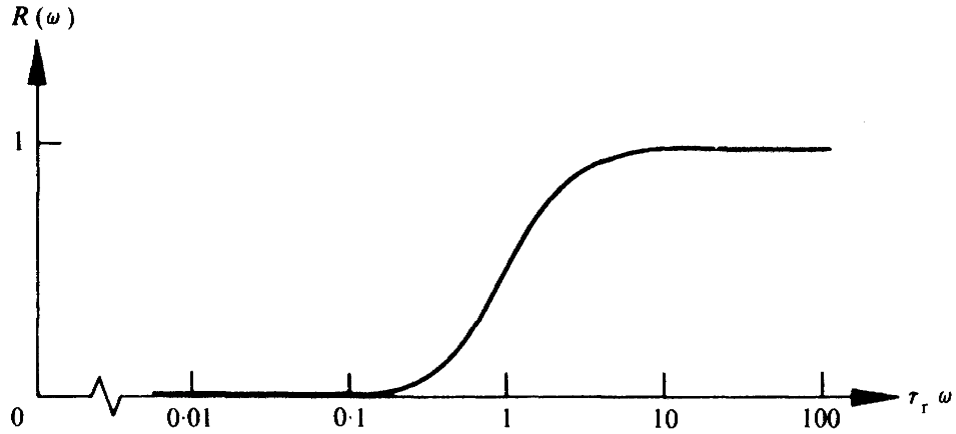
Bardzo silne tłumienie:

$\gamma >> \omega_0, \qquad Q << 1$

- liczący się ruch masy tylko dla małej częstości siły $(\omega << \omega_0)$

$$R(\omega) \approx \frac{\gamma^2\omega^2/\omega_0^4}{1+(\gamma^2\omega^2/\omega_0^4)} = \frac{\tau_r{}^2\omega^2}{1+\tau_r{}^2\omega^2}$$

– dla bardzo silnego tłumienia było: $\tau_r = \dfrac{\gamma}{\omega_0^2} = \dfrac{b}{k}$



NIE MA REZONANSU!

Zmiana w okolicy $\omega\tau_r = 1$ czyli dla $\omega = Q\omega_0 << 1$

Było: $\langle P \rangle = \dfrac{F_0^2}{2b} R(\omega)$

$\langle P \rangle$ rośnie od bardzo małej wartości do możliwego maksimum gdy f przekracza $1/2\pi\tau_r$.

Aby „grzać" układ słabo tłumiony:

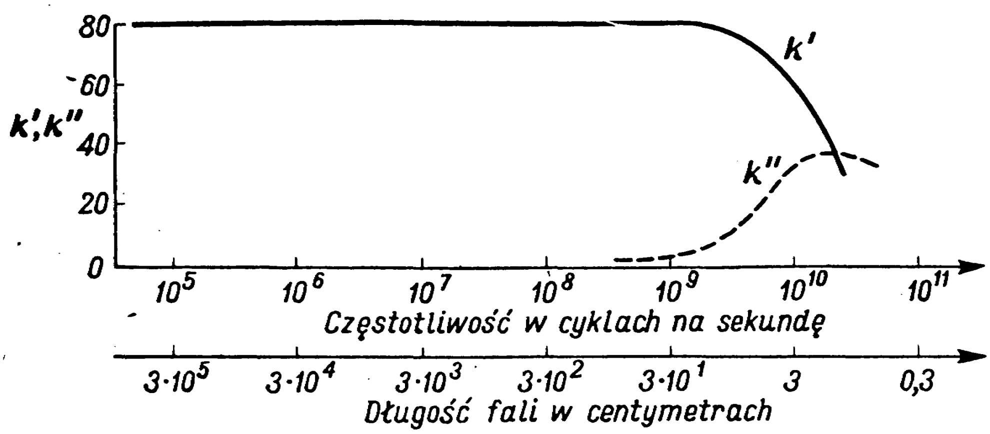
$$f = \frac{\omega_r}{2\pi}$$

Aby „grzać" układ bardzo silnie tłumiony:

$$f > \frac{1}{\tau_r}$$

Absorpcja mikrofal przez wodę:

- polaryzacja elastyczna (elektronowa, atomowa),
- polaryzacja orientacyjna (H_2O jest cząsteczką polarną)



Siła zwrotna → relaksacja termiczna

Tłumienie → oddziaływanie z sąsiadami

$$I\,\ddot{\Psi} = T_s + T_d \;;$$

$T_s = -c\Psi$ - moment zwrotny, $T_d = -d\,\dot{\Psi}$ - opór kątowy

$c \cong 8\times10^{-21}\ Nm;\ I \cong 3{,}5\times10^{-47}\ kgm^2$

$$\omega_0 \equiv (c/I)^{1/2} \cong 10^{13}\ s^{-1}$$

$$\gamma \equiv d/I \cong 10^{15}\ s^{-1}$$

Dla drgań liniowych $\tau = b/k$.

Dla drgań torsyjnych $\tau = d/c$.

$\tau \equiv d/c \cong 10\ ps$ $\qquad$ $d \cong 9\times 10^{-32}\ Nms$

$$\nu \equiv 1/2\pi\tau \cong 10^{10}\ Hz$$

Ustalanie się drgań wymuszonych

$$\ddot{\Psi} + \gamma\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (*)$$

Stan stacjonarny:

$$\Psi_s = A_s\cos(\omega t + \varphi_s)$$

- rozwiązanie szczególne.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$\Psi_f = A_f \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)\cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

(przypadek drgań swobodnych)

Rozwiązanie ogólne (*): $\Psi_s + \Psi_f$

Dla $t = 0$: $\Psi(0) = A_s\cos\varphi_s + A_f\cos\varphi_f = 0$

$$\dot{\Psi}(0) = -\omega A_s\sin\varphi_s - A_f\left(\frac{1}{2}\gamma\cos\varphi_f + \omega_f\sin\varphi_f\right) = 0$$

Niech $\begin{matrix} \omega \approx \omega_f \\ \gamma << \omega_f \end{matrix}$

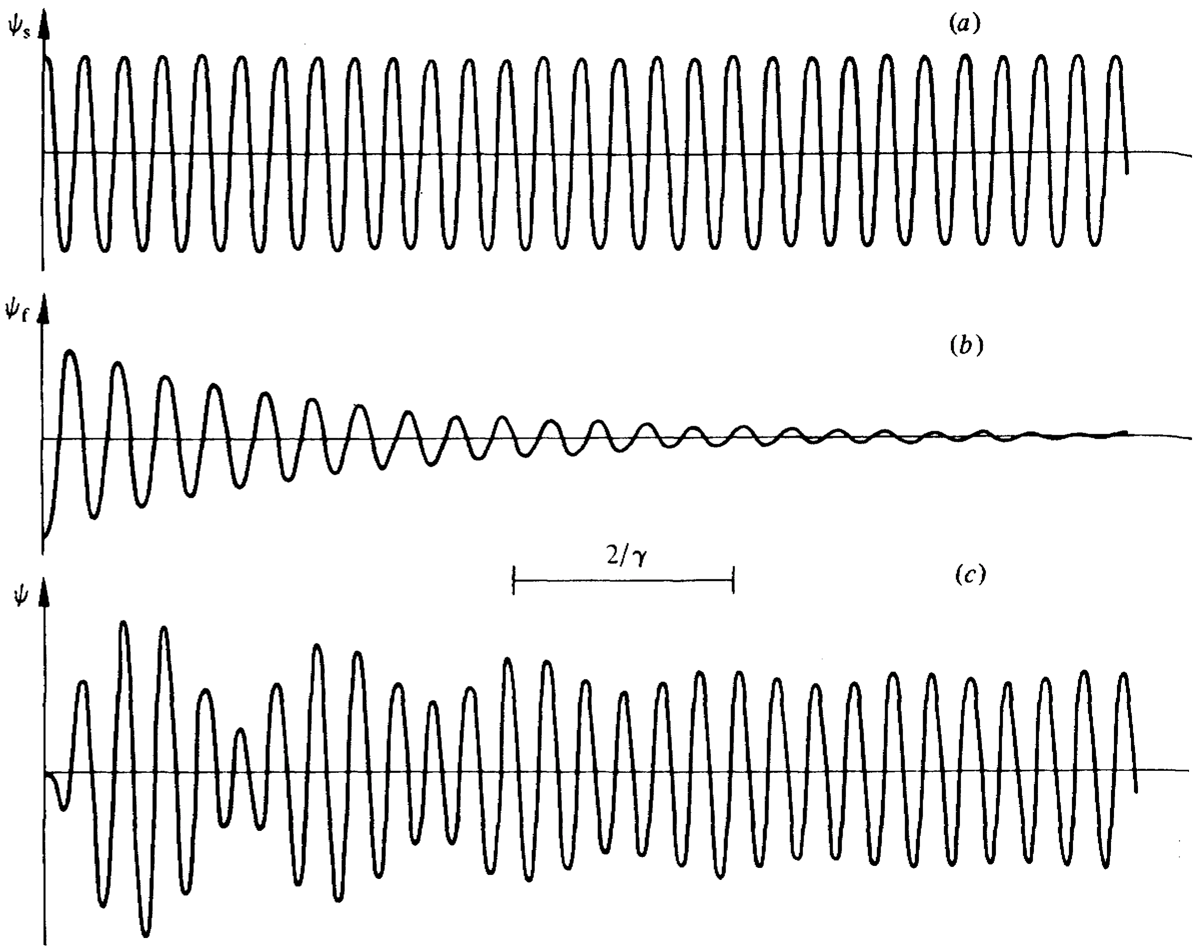
$$A_s \cos\varphi_s + A_f \cos\varphi_f = 0$$

$$A_s \sin\varphi_s + A_f \sin\varphi_f = 0$$

$$\Rightarrow \ A_f \cong A_s$$

$$\Rightarrow \ \varphi_f \cong \varphi_s - \pi$$

$$\Psi(t) \cong A_s \left[\cos(\omega t + \varphi_s) - \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right) \cos(\omega_f t + \varphi_s) \right]$$



$$Q = 20; \quad \omega = \omega_f + 5\gamma$$

Dla $\omega = \omega_f$ $$\Psi(t) = A_s\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)\cos(\omega t + \varphi_s)\right]$$