Drgania złożone

Zasada superpozycji: wychylenie jest sumą wychyleń wywołanych przez poszczególne czynniki osobno. Zasada wynika z liniowości związku między wychyleniem a siłą.

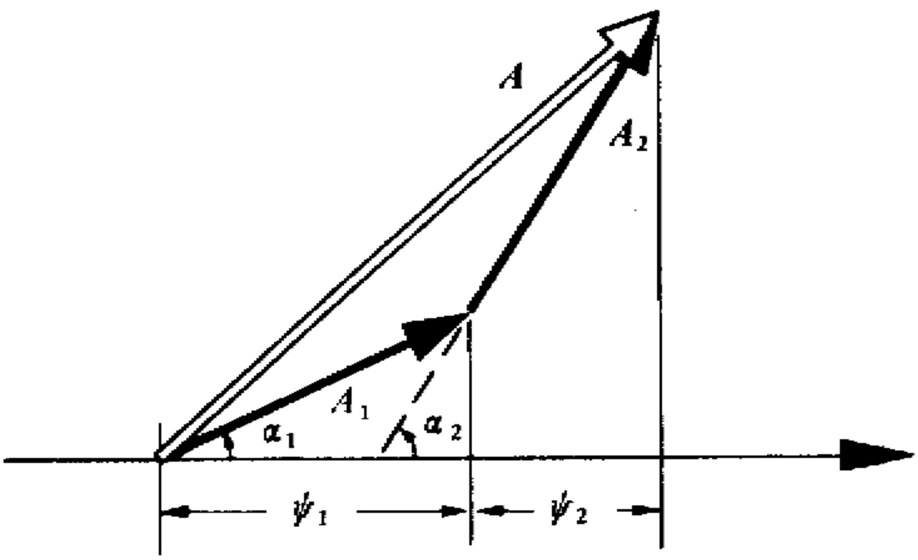
Superpozycja sił wymuszających

$$\ddot{\Psi} + \gamma\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = \frac{F_1}{m}\cos(\omega t + \alpha_1) + \frac{F_2}{m}\cos(\omega t + \alpha_2)$$

Ogólnie $\alpha_1 \neq \alpha_2$; istotne $\underline{|\alpha_2 - \alpha_1|}$

$F_2 = 0 \Rightarrow \Psi_1; \qquad F_1 = 0 \Rightarrow \Psi_2$

$\underline{\Psi = \Psi_1 + \Psi_2}$ - zasada superpozycji



Koherencja

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Dla $F_1 = F_2 \rightarrow A_1 = A_2$

$$A^2 = 2A_1^2[1 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]$$

Jeżeli $(\alpha_2 - \alpha_1)$ zmieni się przypadkowo, średnia wartość $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$

Siły wymuszające nie są KOHERENTNE

$\Rightarrow \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2$ - zwykła suma

Koherencja – stałe w czasie relacje fazowe

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq (A_1 + A_2)$$

$A > A_1, A_2$ - superpozycja konstruktywna

$A < A_1, A_2$ - superpozycja destruktywna

$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi$ - całkowicie destruktywna

$\alpha_1 = \alpha_2$ - całkowicie konstruktywna

Niech $F_1 = F_2 \Rightarrow A_1 = A_2$

$$A^2 = 2A_1^2[1 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]$$

Zgromadzona energia = 4x energia każdego drgania z osobna.

Superpozycja dwu drgań harmonicznych prostych:

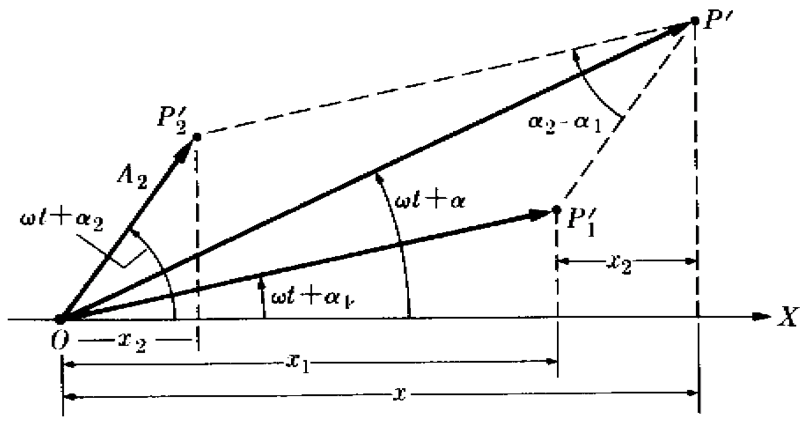
1. Ten sam kierunek, ta sama częstość.

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$; $\quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$

Wychylenie wypadkowe:

$x = x_1 + x_2$; $\quad x = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$

Wychylenie w ruchu harmonicznym jako składowa *x*-owa wirującego wektora $\overline{0P'}$.



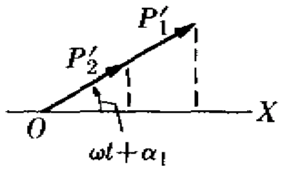
Kąt $(0P_1', 0P_2') = \delta = \alpha_2 - \alpha_1$

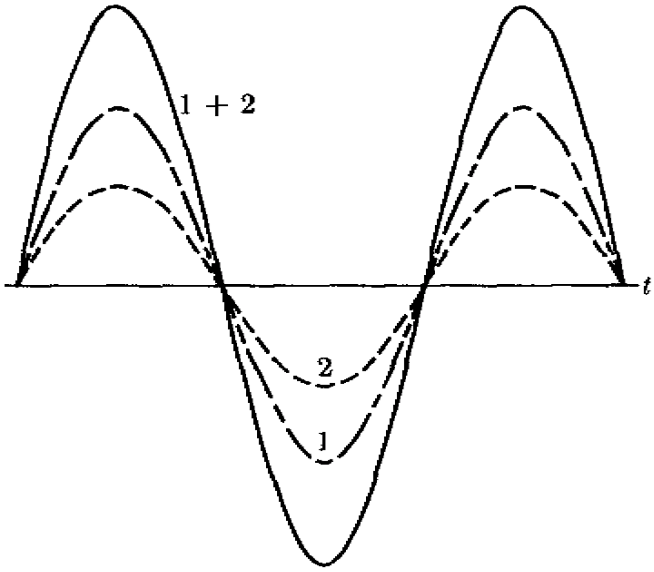
Wektor $0P'$, będący sumą $0P_1$ i $0P_2$ ma stałą długość i wiruje wokół 0 z prędkością kątową ω.

$x = A\cos(\omega t + \alpha)$

$$A = \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta\right)^{1/2}; \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}$$

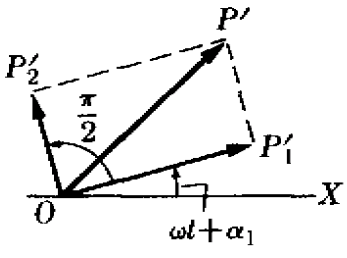
$$\alpha_2 = \alpha_1 \Rightarrow \delta = 0$$

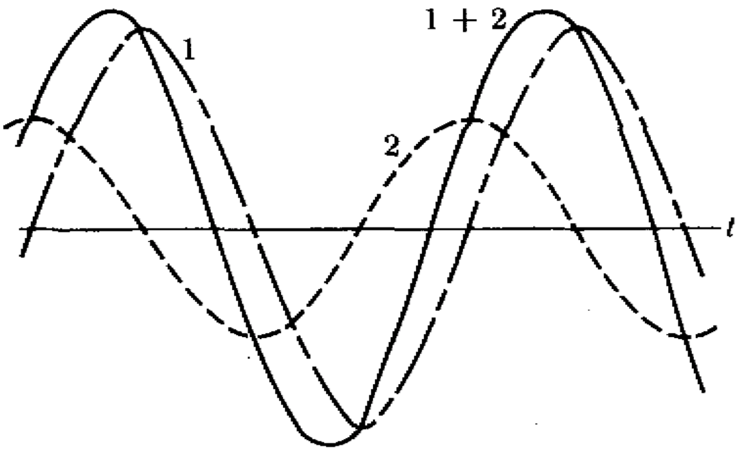




$$\underline{A = A_1 + A_2}$$

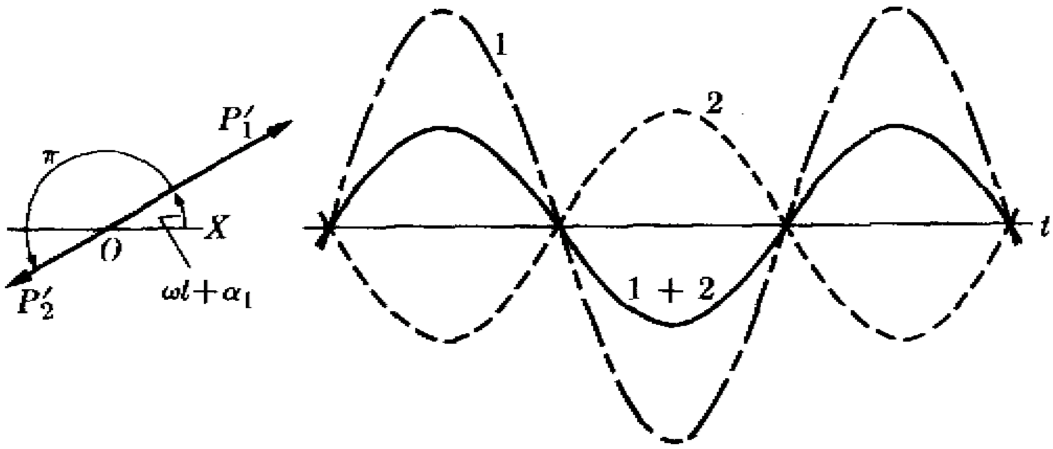
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}; \qquad \delta = \frac{\pi}{2}$$





$$\underline{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

$\alpha_2 = \alpha_1 + \pi; \qquad \delta = \pi$

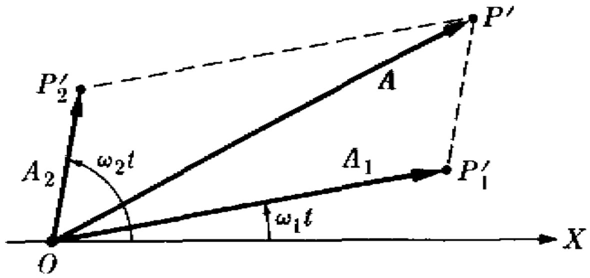


$\underline{A = A_1 - A_2}$

Dla $A_1 = A_2 \Rightarrow 0$

2. Ten sam kierunek, różne częstości.

$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1); \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$



$< (0P_2', 0P_1') = \omega_1 t - \omega_2 t = (\omega_1 - \omega_2)t = f(t) \Rightarrow 0P'$ ma zmienną długość i nie obraca się ze stałą prędkością kątową $\Rightarrow$

$\underline{x = x_1 + x_2}$ <u>nie jest prostym ruchem harmonicznym.</u>

„Amplituda": $A = \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t\right)^{1/2}$

oscyluje pomiędzy $A = A_1 + A_2$ – dla $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$ a

$A = |A_1 - A_2|$ dla $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$

Amplituda jest zmodulowana z częstością

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2$$

Jeśli $A_1 = A_2$

$x = x_1 + x_2 = A_1(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$

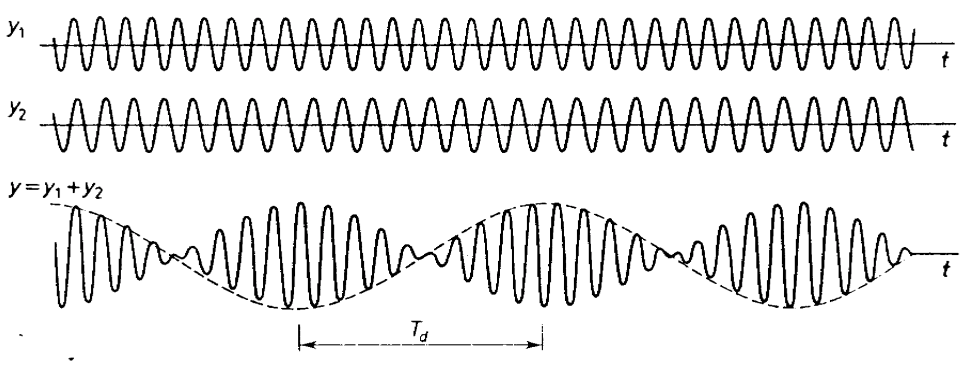
$x = 2A_1\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \cdot \cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$

$\Rightarrow$ ruch drgający o częstości $\underline{\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)}$

i amplitudzie $\underline{A = 2A_1\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t}$

Dla $\omega_1 \cong \omega_2 \rightarrow$ <u>dudnienia</u> z częstością $(\omega_1 - \omega_2)$

(maleje gdy $\omega_1 \rightarrow \omega_2$)



Zasada superpozycji obowiązuje także dla liczby drgań >2.
Szczególny przypadek – dodawanie drgań o tym samym kierunku i o częstościach: ω (podstawowa lub pierwsza harmoniczna), 2ω (druga harmoniczna), 3ω, 4ω, itd., tzn. o okresach T, $T/2$, $T/3$, $T/4$ itd.
Drgania wypadkowe, pochodzące ze złożenia takich drgań z dowolnymi amplitudami i fazami początkowymi $\Rightarrow$ drgania o okresie T, ale nieharmoniczne.

Twierdzenie Fouriera:

Niesinusoidalną funkcję periodyczną o częstości ω można wyrazić jako sumę algebraiczną stałej oraz funkcji sinusoidalnych o częstościach ω, 2ω, 3ω itd. dobierając odpowiednio ich liczbę, amplitudy i fazy.

$$x = X_0 + X_1 \sin(\omega t + \theta_1) + X_2 \sin(2\omega t + \theta_2) + \\ + X_3 \sin(3\omega t + \theta_3) + \ldots$$

$$x = X_0 + A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + A_3 \sin(3\omega t) + \ldots + \\ + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + \ldots$$

Rozkład funkcji periodycznej na funkcje sinusoidalne $\Rightarrow$ analiza harmoniczna.

Im krzywa bardziej gładka, tym rola wyższych harmonik mniejsza.

Z symetrii krzywej analizowanej wynika, że:

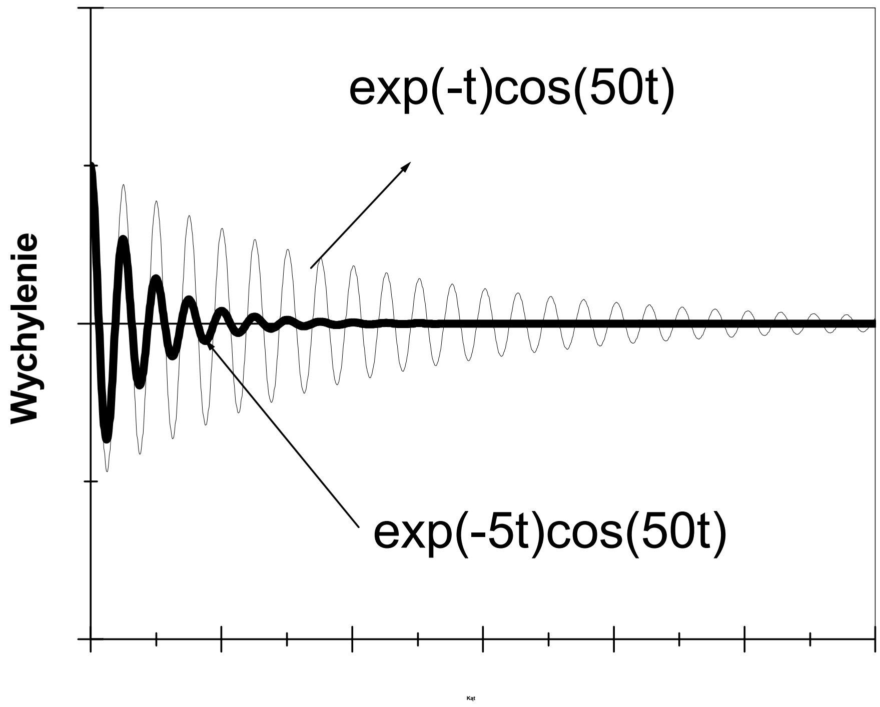
- jeśli wartość średnia funkcji jest zero, to człon stały znika
- jeśli funkcja jest symetryczna względem osi $0t$, to człon stały znika i w rozwinięciu występują tylko harmoniki nieparzyste.
- jeśli funkcja jest symetryczna względem osi $0x$, to współczynniki przy sinusach znikają
- jeśli funkcja jest symetryczna względem początku układu współrzędnych, to współczynniki przy cosinusach znikają.

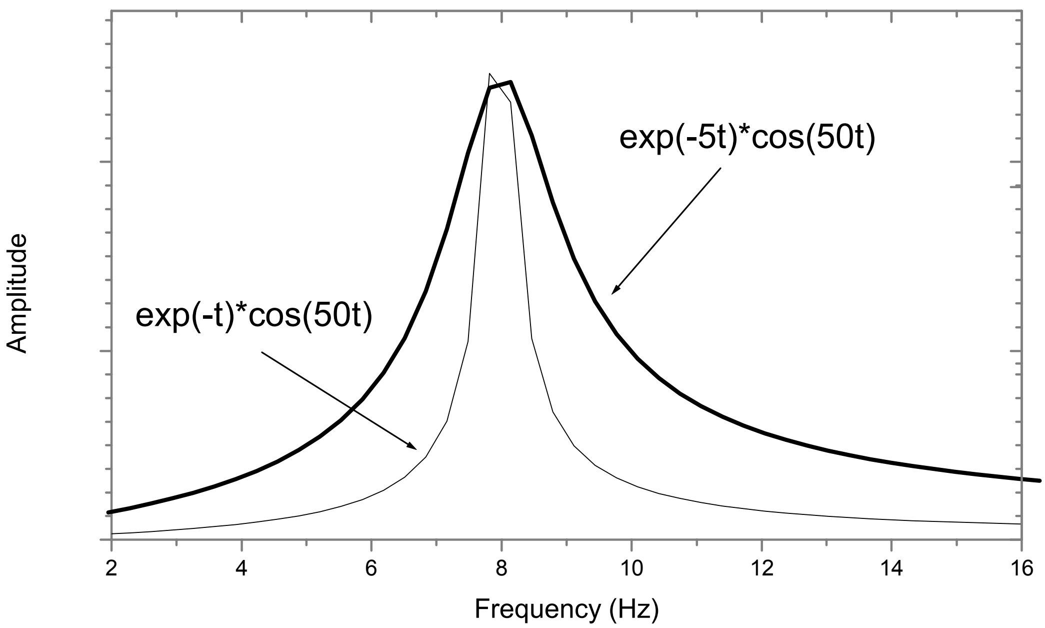
Ruchu nieperiodycznego nie da się przedstawić w postaci szeregu Fouriera dla nieciągłego rozkładu częstości ω, 2ω, 3ω itd. Może być on rozłożony na nieskończoną liczbę ruchów harmonicznych o sąsiednich częstościach nieskończenie bliskich i amplitudach nieskończenie małych.

Ruch periodyczny – widmo liniowe.

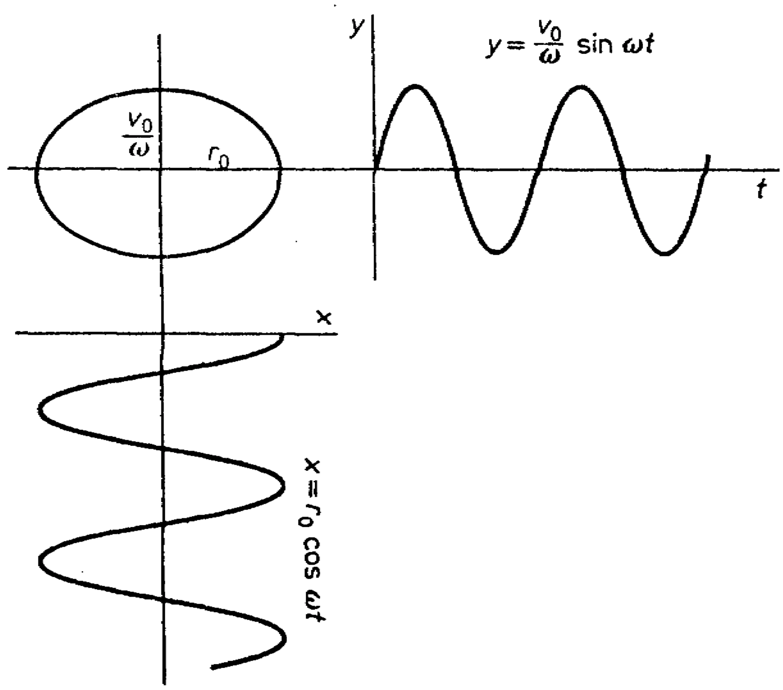
Ruch aperiodyczny – ciągły rozkład amplitud.

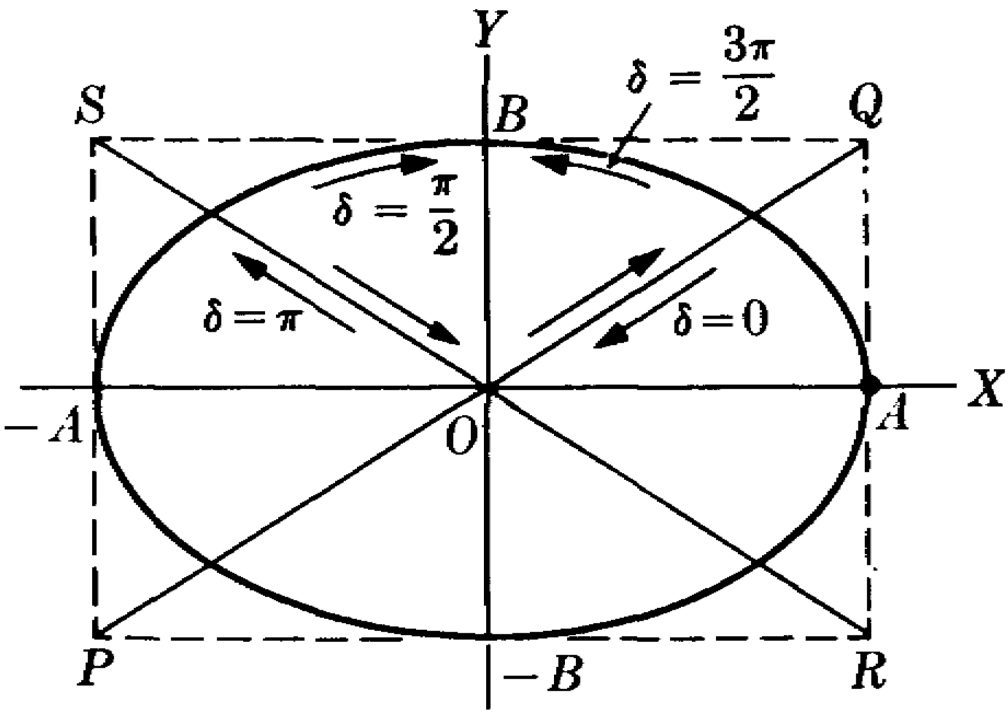
Szerokość rozkładu zależy od stałej zaniku.


exp(-t)cos(50t)
exp(-5t)cos(50t)
Wychylenie


exp(-5t)*cos(50t)
exp(-t)*cos(50t)
Amplitude
2
4
6
8
10
12
14
16
Frequency (Hz)

3. Kierunki prostopadłe





a. $\nu_1=\nu_2 \Rightarrow x=A\cos(\omega t),\;\; y=B\cos(\omega t+\delta)$

Niech $\delta = 0$

$y = B\cos(\omega t) \Rightarrow y = \left(\frac{B}{A}\right)x$ - równanie prostej PQ

Przesunięcie wzdłuż PQ wynosi

$$r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} = \left(A^2 + B^2\right)^{1/2}\cos(\omega t)$$

- ruch harmoniczny prosty o amplitudzie $\left(A^2 + B^2\right)^{1/2}$

Niech $\delta = \pi$

$y = -B\cos(\omega t) \Rightarrow y = -\left(\frac{B}{A}\right)x$ - równanie prostej RS

Złożenie dwu prostopadłych drgań harmonicznych prostych o tej samej częstości gdy $\delta = 0$ lub π daje w wyniku drgania spolaryzowane („uporządkowane") liniowo.

Niech $\delta = \pi/2$

$$y = B\cos(\omega t + \pi/2) = -B\sin(\omega t);$$

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ - równanie elipsy o półosiach A i B.

W jakim kierunku jest obiegana elipsa?

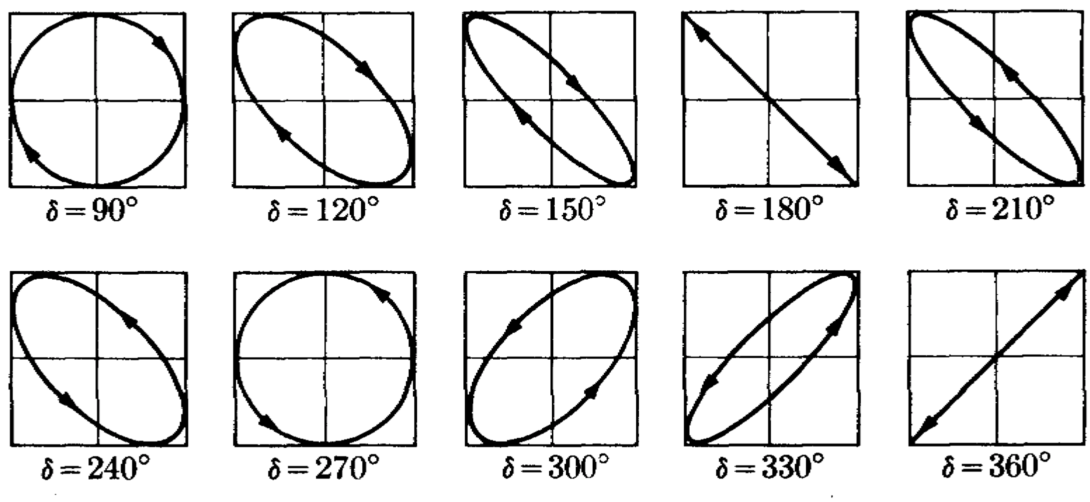
Szukamy prędkości dla $x = A \rightarrow \cos(\omega t) = 1$

$v_y = \frac{dy}{dt} = -\omega B \cos(\omega t) = -\omega B$ - zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Dla $\delta = 3\pi/2$ lub $(-\pi/2)$ ta sama elipsa, ale kierunek obiegu przeciwny.

Złożenie dwu prostopadłych drgań harmonicznych o tej samej częstości gdy $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ daje w wyniku drgania spolaryzowane eliptycznie. Osie elipsy są równoległe do kierunków drgań. Dla A=B elipsa przechodzi w okrąg – polaryzacja kołowa.

Dla δ dowolnego – drgania eliptyczne, osie elipsy obrócone względem X, Y (pomiar δ).



b. $\underline{\nu_1 \neq \nu_2}$

<u>W ogólnym przypadku</u> dla drgań prostopadłych o dowolnych częstościach i amplitudach

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t), \qquad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$$

$\Rightarrow$ krzywe Lissajous, o kształcie zależnym od $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}, \delta, \dfrac{A_1}{A_2}$.

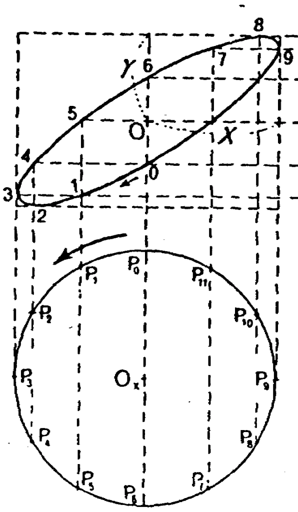


Fig. 3-21. — Composition de deux vibrations sinusoïdales de même période rectangulaires, cas général.
Construction par points de l'ellipse de LISSAJOUS.

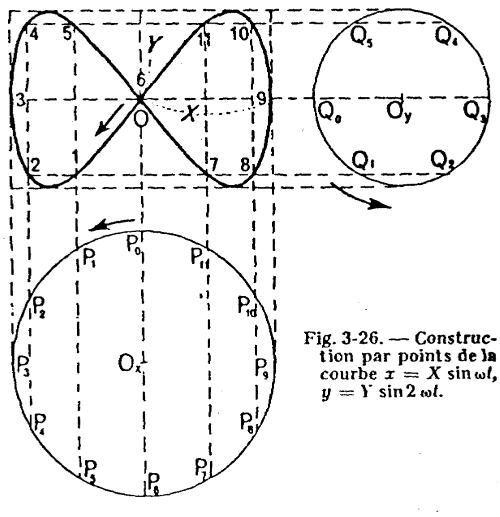
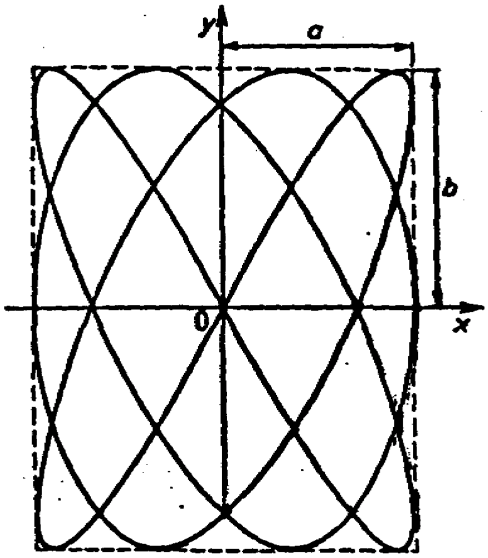
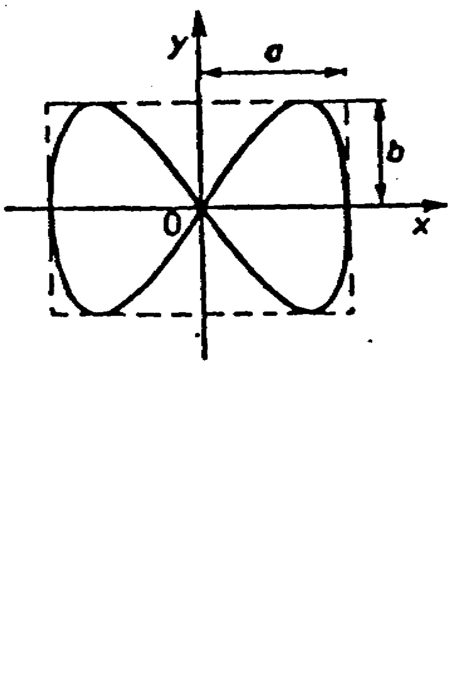


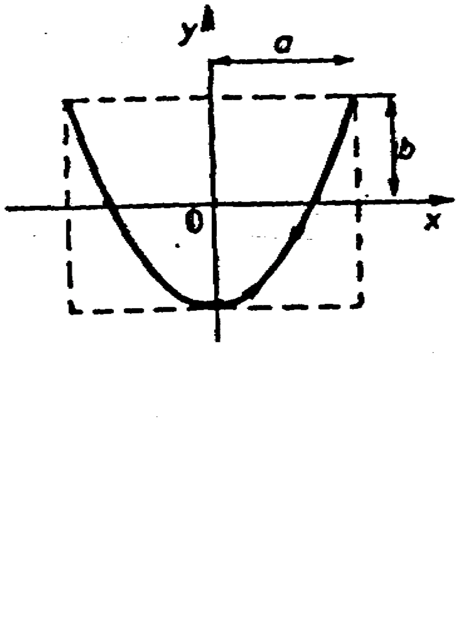
Fig. 3-26. — Construction par points de la courbe $x = X \sin \omega t$, $y = Y \sin 2\omega t$.

$$x = A_1 \cos \omega_1 t$$

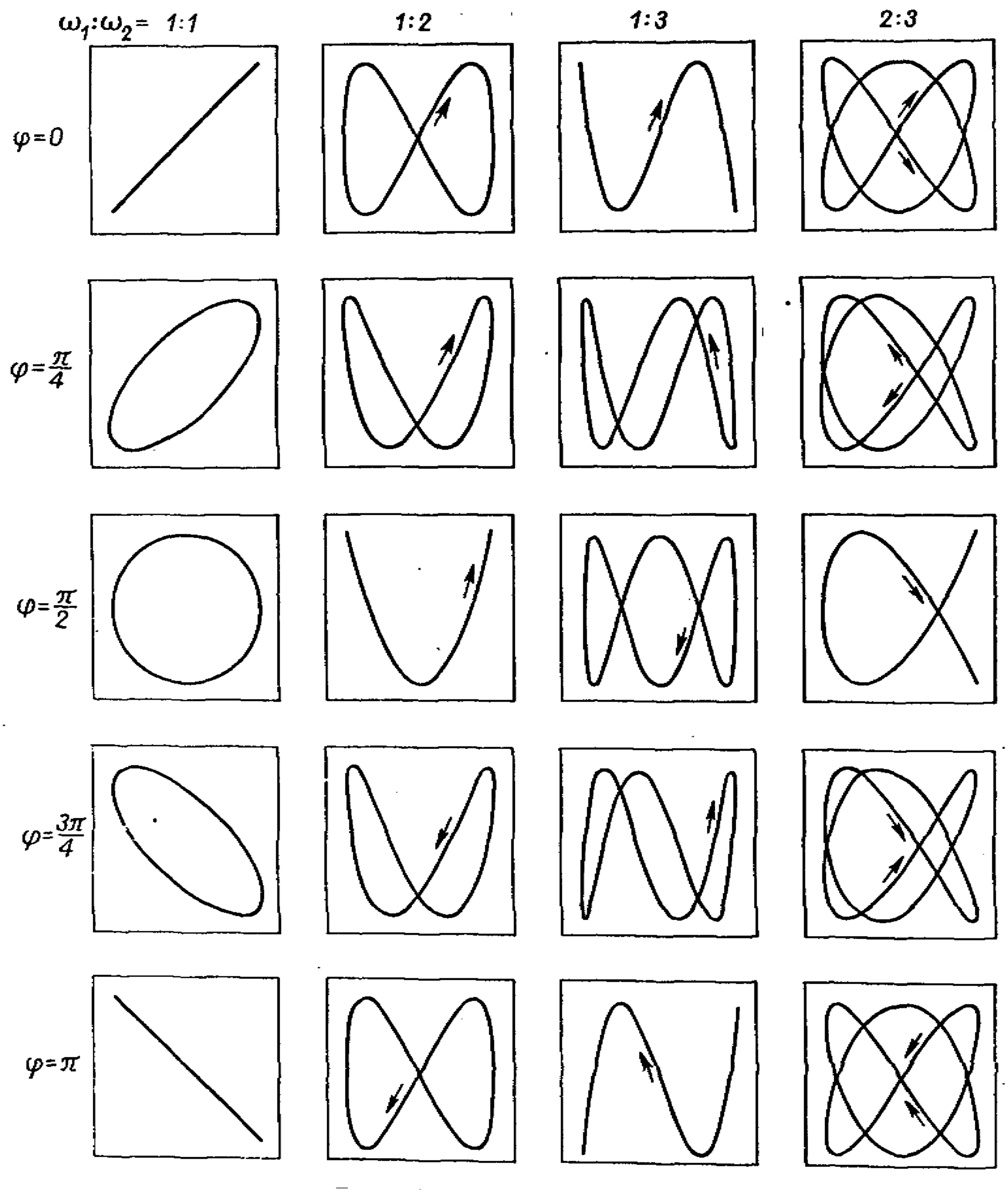
$$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$$







Figury Lissajous

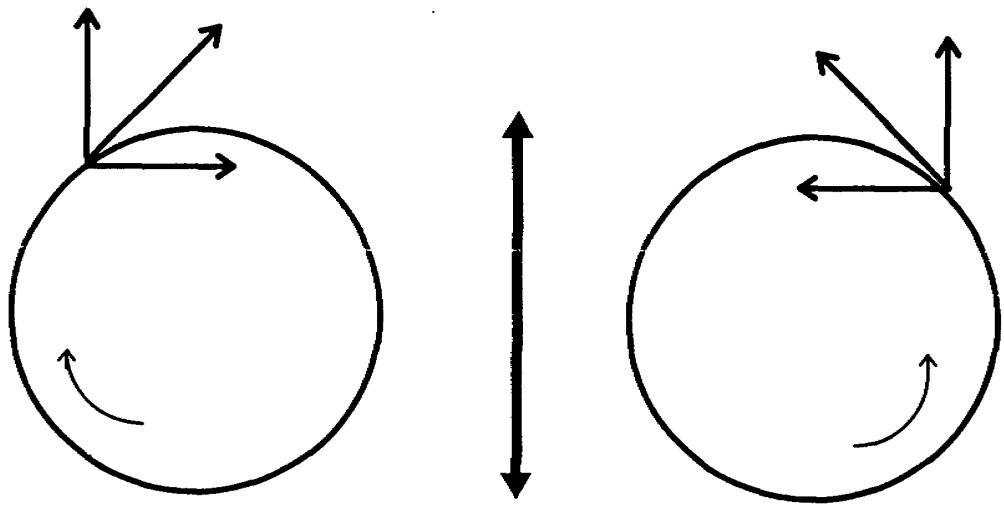


Jeśli $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ małe

$$\omega_1 t = \omega_2 t + \underbrace{(\Delta\omega t + \delta)}$$

zmienne w czasie przesunięcie fazowe

Złożenie dwu drgań kołowych daje w wyniku drganie spolaryzowane liniowo.



Kierunek drgania wypadkowego odpowiada linii symetrii obu ruchów kolistych.