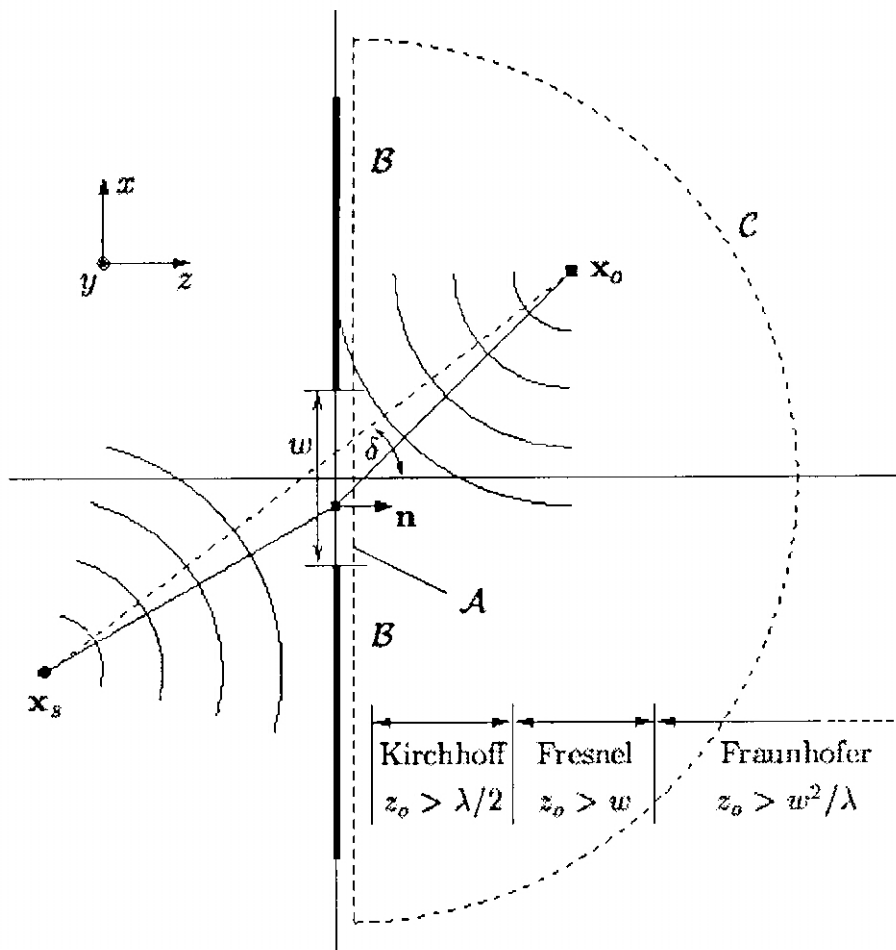


Dyfrakcja:

Skalarna teoria dyfrakcji:

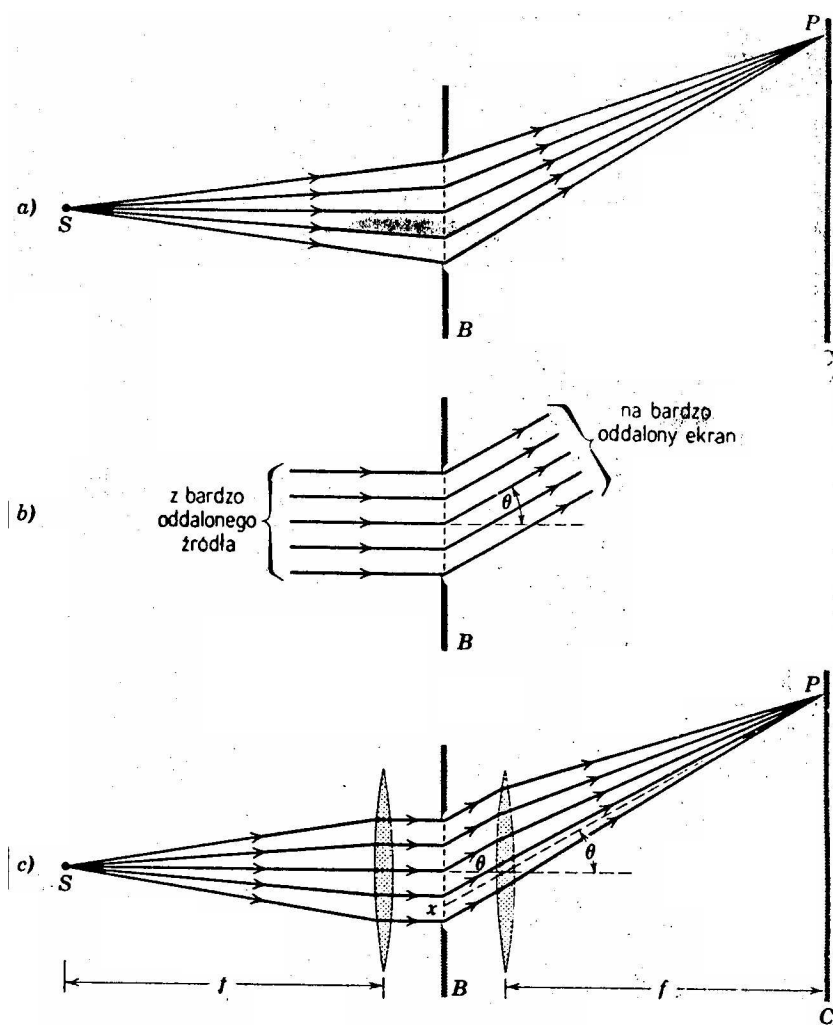
$$U(x;t) = \text{Re}[U(x)e^{-i\omega t}].$$

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(x;t) = 0 \quad \text{oraz} \quad [\Delta + k^2] U(x) = 0.$$

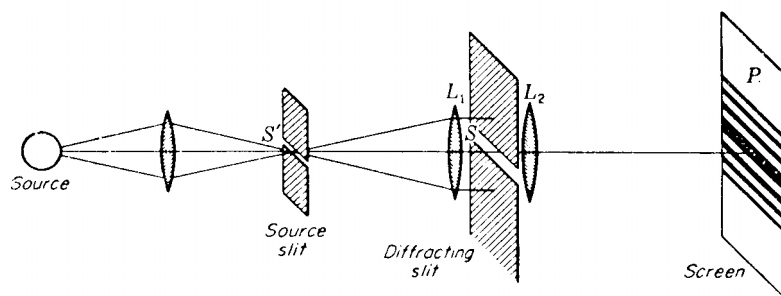


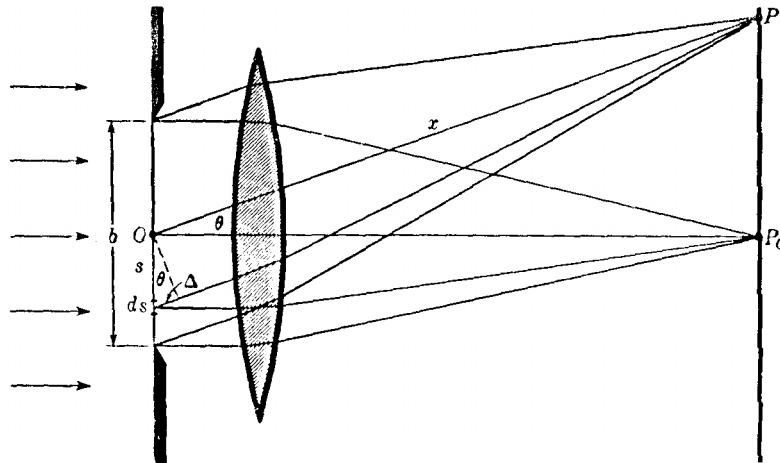
$$U(x_0) = \frac{iA_s}{\lambda} \iint_A \frac{e^{ik_0(r_s+r_0)}}{r_s r_0} \left[\frac{\cos(n, x_0 - x) - \cos(n, x_s - x)}{2} \right] ds.$$

Dyfrakcja Fresnela (a) a dyfrakcja Fraunhofer (b), (c):



Dyfrakcja Fraunhofer na pojedynczej szczelinie:





ds - element czoła fali w płaszczyźnie szczeliny w odległości s od środka.

Fala cząstkowa od ds w środku szczeliny daje w P :

$$dE_0 = \frac{a ds}{x} \sin(\omega t - kx) \quad (\text{sferyczna})$$

$$dE_s = \frac{a ds}{x} \sin(\omega t - k(x + \Delta))$$

$$dE_s = \frac{a ds}{x} \sin(\omega t - kx - ks \sin \theta)$$

trzeba scałkować po s $(-b/2, b/2)$

Dla pary $(\pm s)$:

$$\begin{aligned} dE &= dE_{-s} + dE_{+s} = \\ &= \frac{a ds}{x} [\sin(\omega t - kx - ks \sin \theta) + \sin(\omega t - kx + ks \sin \theta)] \end{aligned}$$

$$dE = \frac{a ds}{x} [2 \cos(ks \sin \theta) \sin(\omega t - kx)]$$

$x \sim \text{stałe} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{2a}{x} \sin(\omega t - kx) \int_0^{b/2} \cos(ks \sin \theta) ds = \\
 &= \frac{2a}{x} \left[\frac{\sin(ks \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]_0^{b/2} \sin(\omega t - kx) = \\
 &= \frac{ab}{x} \frac{\sin(\frac{1}{2} kb \sin \theta)}{\frac{1}{2} kb \sin \theta} \sin(\omega t - kx)
 \end{aligned}$$

Drgania wypadkowe – harmoniczne, z amplitudą zależną od P (przez θ).

Niech amplituda $A = A_0 \frac{\sin \beta}{\beta}$ (*)

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \\ A_0 = ab/x \end{cases}$$

β - połowa różnicy faz wkładów od brzegów szczeliny.

Natężenie:

$$\underline{I \sim A^2 = A_0^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}}$$

Dla światła padającego pod kątem i :

$$\beta = \pi b (\sin i + \sin \theta) / \lambda$$

Dla $\beta \rightarrow 0$; $\sin \beta / \beta \rightarrow 1$; $I = A_0^2 = I_0$

– maksimum główne.

Minima dla $\beta = m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$)

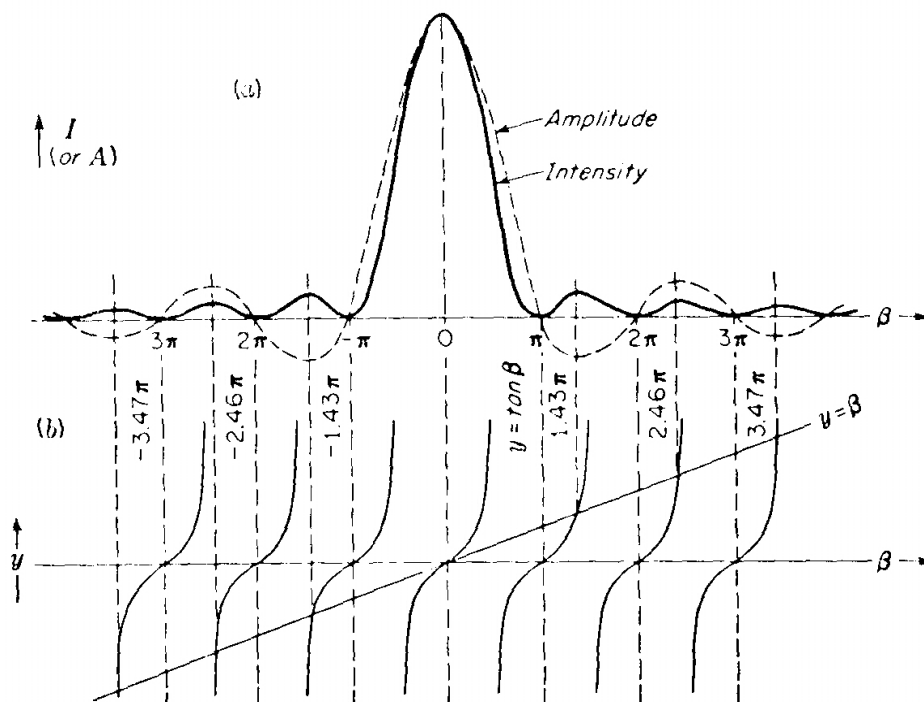
Maksima poboczne dla $\tan \beta = \beta$ $\left(\frac{\partial}{\partial \beta} (*) = 0 \right)$

$\Rightarrow$ z przecięć krzywych $y = \tan \beta$, $y = \beta$

Pierwsze minimum: $\sin \theta_1 = \lambda/b$ $(\theta_1 \cong \lambda/b)$

ℓ - odległość do ekranu, d - odległość (na ekranie) do pierwszego minimum

$\Rightarrow$ szerokość prążka głównego: $\underline{d = \frac{\ell}{b} \lambda}$

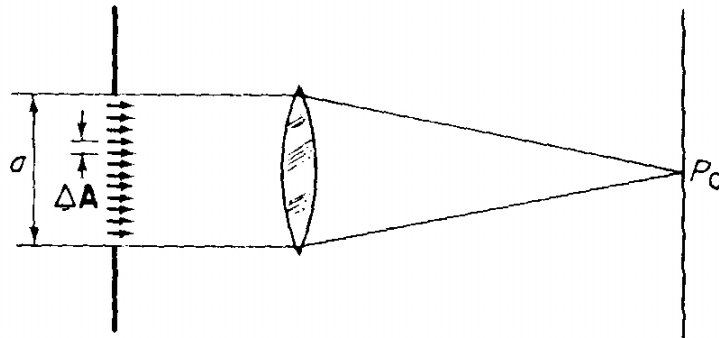


Minima: $b \sin \theta = \pm m \lambda$; $m = 1, 2, 3 \dots$

$b = \lambda$, $m = 1 \Rightarrow \sin \theta = 1$

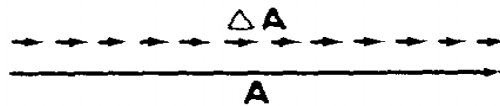
$b \rightarrow 0 \rightarrow$ półsfery

Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie – wektorowo:



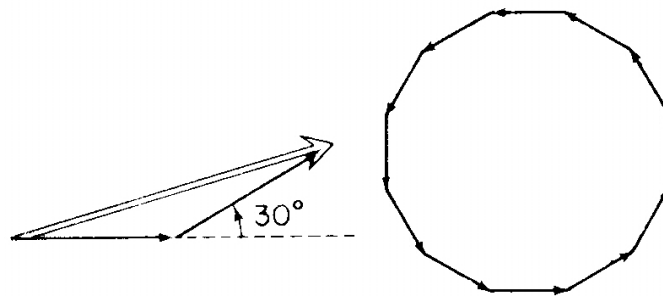
W punkcie P_0 :

$$A = \sum \Delta A \quad \text{wszystkie fale cząstkowe w fazie.}$$



W pierwszym minimum:

$\delta = 2\pi$ między pierwszym a ostatnim fazorem
($\Delta\delta = \delta/12$)



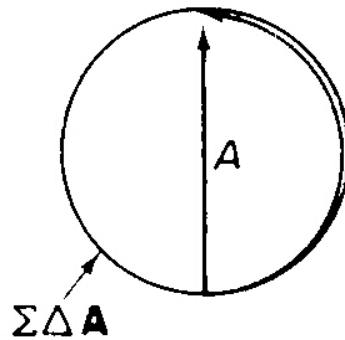
$$A = \sum \Delta A = 0$$

P pomiędzy zerowym maksimum a pierwszym minimum:

$$\text{Niech } \delta = \pi \text{ (pół okręgu)} \Rightarrow A = \frac{2}{\pi} \sum \Delta A \quad (\sum \Delta A = \pi A/2)$$

Maksimum pierwszego rzędu:

$$A \cong \frac{2}{3} \frac{\sum \Delta A}{\pi} \quad (\sum \Delta A = \frac{3}{2} \pi A)$$

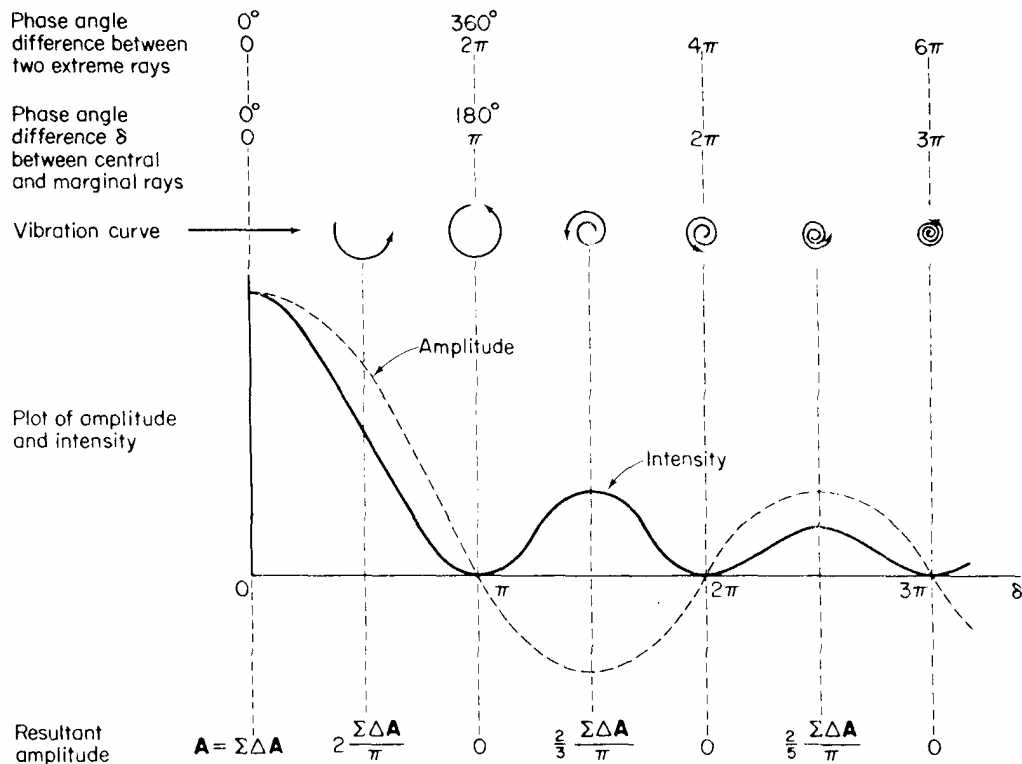


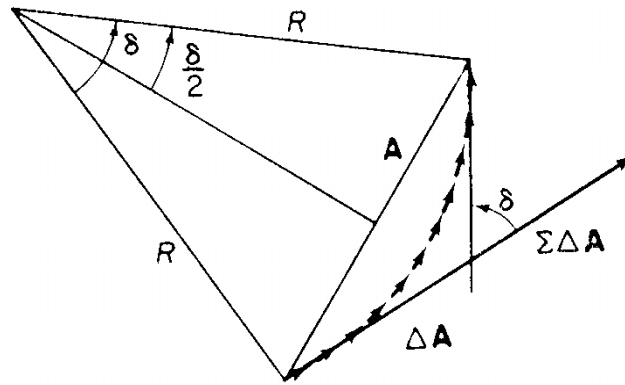
Minimum drugiego rzędu:

$$A = 0$$

Maksimum drugiego rzędu:

$$A \cong \frac{2}{5} \frac{\sum \Delta A}{\pi} \quad (\sum \Delta A = \frac{5}{2} \pi A)$$





$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{A/2}{R} \Rightarrow A = 2R \sin \frac{\delta}{2}$$

$$\delta = \frac{\sum \Delta A}{R} \quad (\text{w radianach})$$

$$A = 2 \frac{\sum \Delta A}{\delta} \sin \frac{\delta}{2} = \sum \Delta A \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2}$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} \right)^2$$

Minima: równoodległe dla $\delta = \pm m\pi$ $m = 1, 2, 3, \dots$

Maksima: $\delta/2 \equiv x$

$$\frac{d}{dx} I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = x$$

$$I \cong I_0 \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$

– prawie w połowie między minimami – przesunięte w stronę centrum, tym mniej, im wyższy rząd.

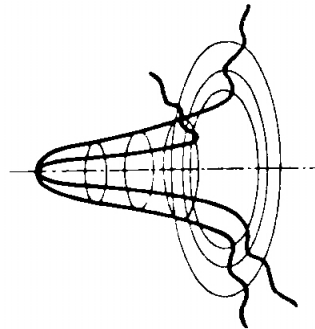
Szerokość połówkowa maksimum zerowego rzędu:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} \right)^2 \Rightarrow \delta_{1/2} = 1.40 \text{ rd} = 80^\circ$$

$$\delta_{1/2} = \frac{b}{\lambda} \pi \sin \theta_{1/2} \Rightarrow 2 \cdot (1.4 \text{ rd}) = \frac{b}{\lambda} \pi \sin \theta \Rightarrow \frac{2.8}{\pi} \cong \frac{b}{\lambda} \theta$$

$$\underline{\theta \cong \lambda/b}$$

Dyfrakcja Fraunhofera na okrągłym otworze:



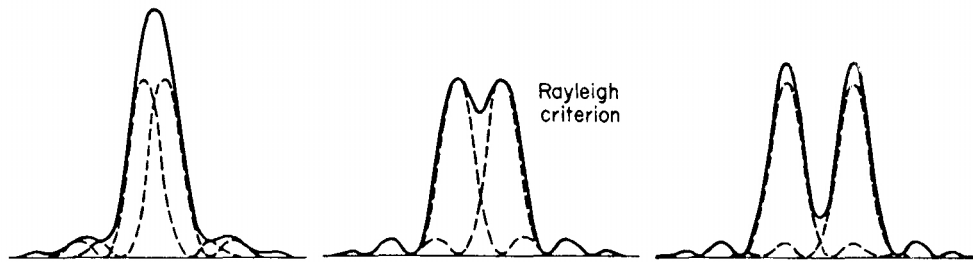
Dysk Airy'ego

Odległość kątowa minimów od środka:

$$\underline{\theta = \sin^{-1} \frac{m\lambda}{a} \cong \frac{m\lambda}{a}} \quad a\text{-promień otworu}$$

	<i>Single slit</i>	<i>Circular aperture</i>
	<i>m</i>	<i>m</i>
First order minimum	1	1.220
Second order minimum	2	2.233
Third order minimum	3	3.238
Fourth order minimum	4	4.241
Fifth order minimum	5	5.243

Zdolność rozdzielcza wg Rayleigha:

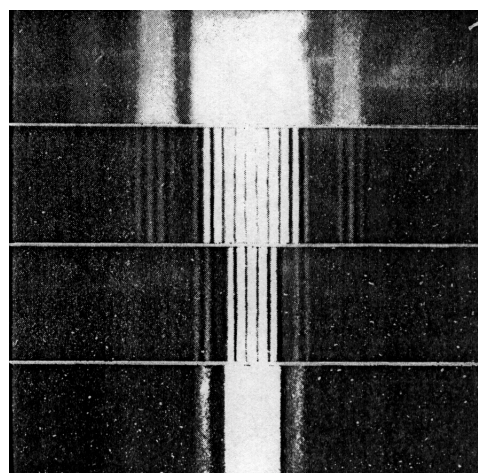
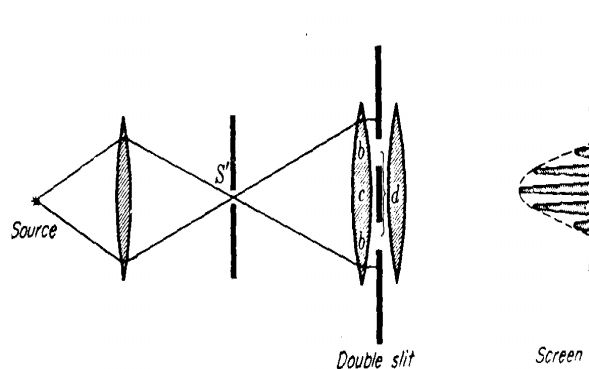


Według Rayleigha najmniejsza odległość kątowa dwu obiektów, aby były rozróżnialne, musi wynosić:

$$\theta_{\min} = \sin^{-1} 1.22 \lambda / D$$

$$\underline{\theta_{\min} \cong 1.22 \lambda / D}$$

Podwójna szczelina:

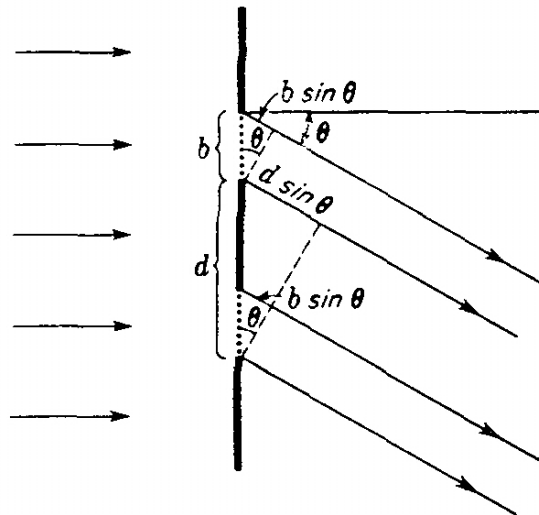


Jedna wązsza
szczelina

Dwie wązsze
szczeliny

Jedna szersza
szczelina

Dwie szersze
szczeliny



Całkujemy $d/2 - b/2$ do $d/2 + b/2$:

$$A = \frac{2a}{xk \sin \theta} \left\{ \sin \left[\frac{1}{2} k(d+b) \sin \theta \right] + \right. \\ \left. - \sin \left[\frac{1}{2} k(d-b) \sin \theta \right] \right\} [\sin(\omega t - kx)]$$

$$A = \frac{2ba \sin \beta}{x \beta} \cos \gamma \sin(\omega t - kx)$$

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta$$

$$\gamma = \frac{1}{2} kd \sin \theta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2 \gamma$$

zero: $\beta = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$

zero: $\pi/2, 3\pi/2 \dots$

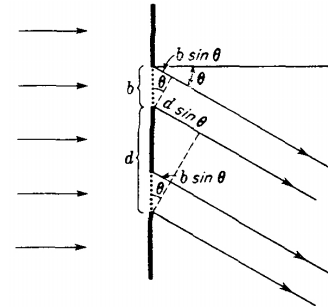
dyfrakcja/interferencja

β i γ są zależne:

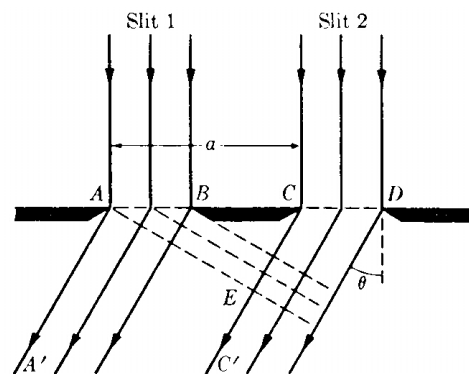
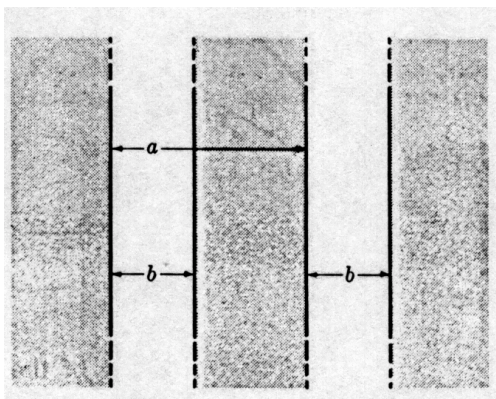
$$b \sin \theta \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta = 2\beta$$

$$d \sin \theta \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2\gamma (= \delta)$$

$$\frac{\delta}{2\beta} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{d}{b}$$



Dyfrakcja Fraunhofera na dwu szczelinach – wektorowo:



$$I = f(\theta) = ?$$

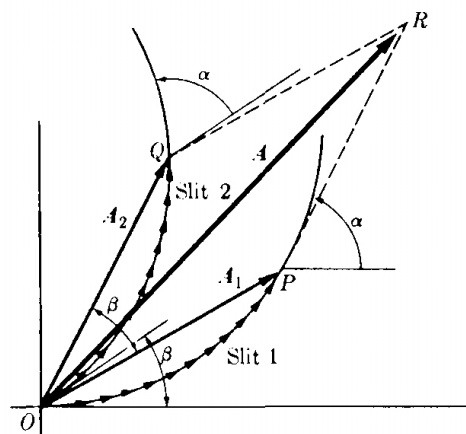
$$\alpha = \frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda}$$

$$A_1 = A_0 \frac{\sin[\pi b \sin(\theta/\lambda)]}{\pi b \sin(\theta/\lambda)}$$

Miedzy AA' i CC' :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} CE = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \beta};$$



Niech $A_1 = A_2$: $A = A_1 \sqrt{2(1 + \cos \beta)} = 2A_1 \cos \frac{\beta}{2}$

$$A = 2A_0 \frac{\sin[\pi b \sin(\theta/\lambda)]}{\pi b \sin(\theta/\lambda)} \cos \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin[\pi b \sin(\theta/\lambda)]}{\pi b \sin(\theta/\lambda)} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

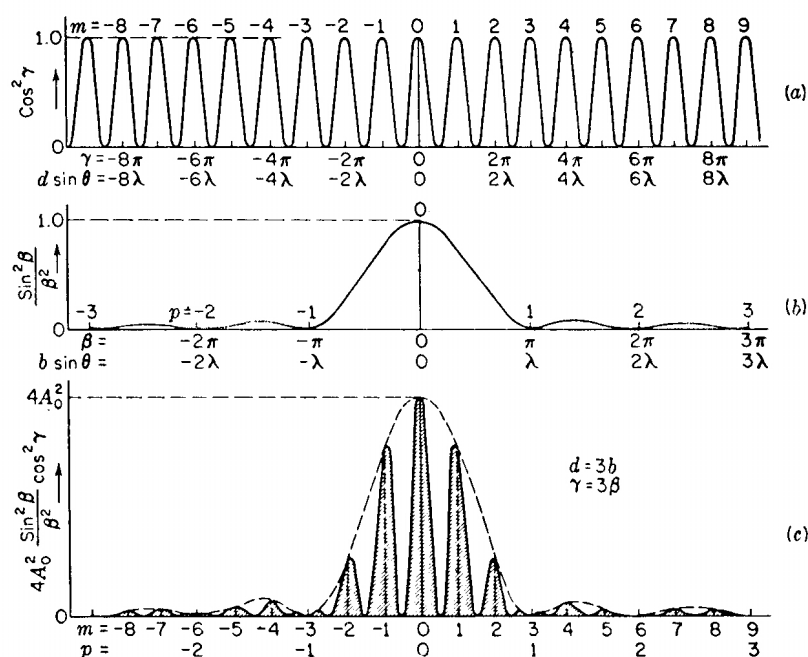
Pojedyncza szczelina: $I_D = I_0 \left[\frac{\sin[\pi b \sin(\theta/\lambda)]}{\pi b \sin(\theta/\lambda)} \right]^2$

Interferencja z dwu źródeł: $I_I = I_0 \cos^2 \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$

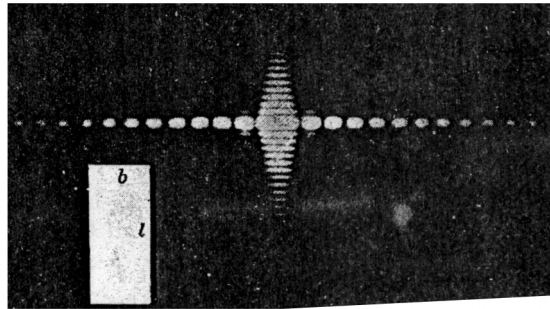
$$I = I_D \cdot I_I$$

właściwości dyfrakcyjne
pojedynczej szczeliny

różnica faz, bo różna
odległość od szczelin



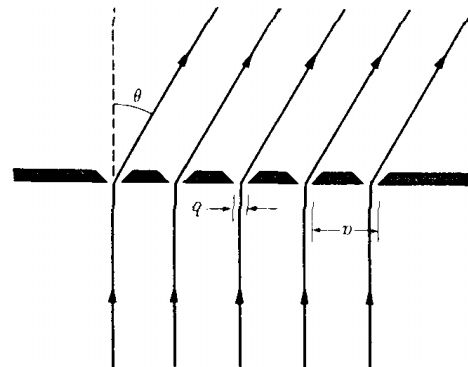
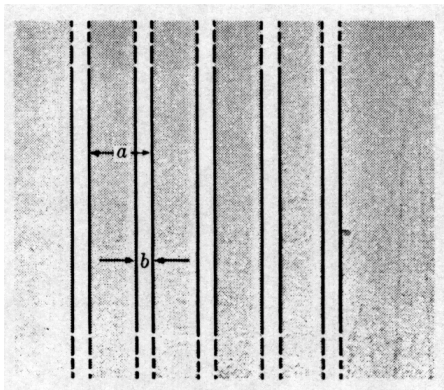
Dyfrakcja na prostokątnym otworze:



$$I \sim b^2 \ell^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2}$$

$\beta = \pi b \sin \frac{\theta}{\lambda}$; $\gamma = \pi \ell \sin \frac{\Omega}{\lambda}$ θ i Ω mierzone w
poziomie i pionie od prostej prostopadłej do szczeliny.

Siatka dyfrakcyjna:



$$Ae^{i\varphi} = a(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots) = a \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

$$A^2 = a^2 \frac{(1 - e^{iN\delta})(1 - e^{-iN\delta})}{(1 - e^{i\delta})(1 - e^{-i\delta})} = a^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2(\alpha/2) \Rightarrow$$

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = a^2 \frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2 \gamma}$$

$$\gamma = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

a^2 - natężenie od pojedynczej szczeliny:

$$a^2 = A_0^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}; \quad A_0 = s/x$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \underbrace{\frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2 \gamma}}_{\nearrow}$$

czynnik interferencyjny dla N szczelin

Maksimum: N^2 dla $\gamma = 0, \pi, 2\pi \dots$

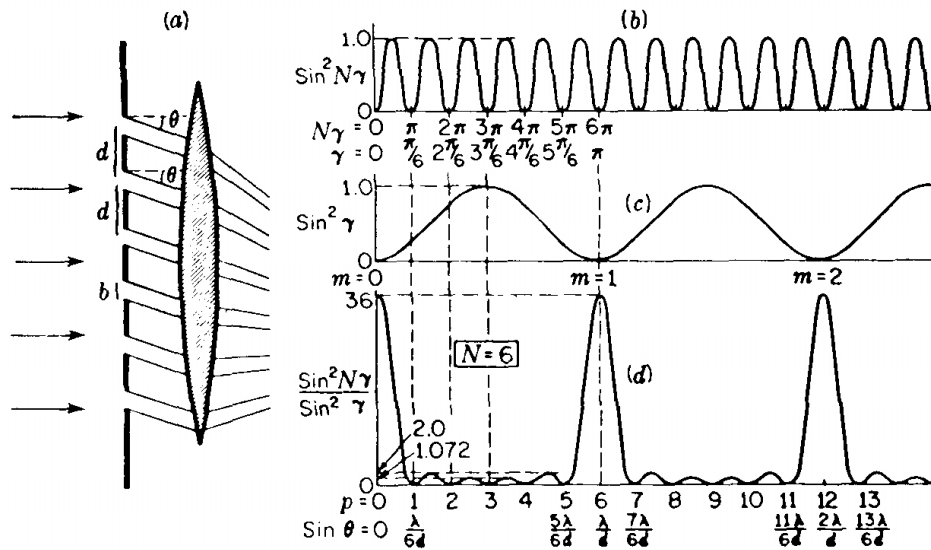
tzn. ($d \sin \theta = 0, \lambda, \dots = m\lambda$)

Minima: $N\gamma = 0, \pi, 2\pi \dots p\pi$

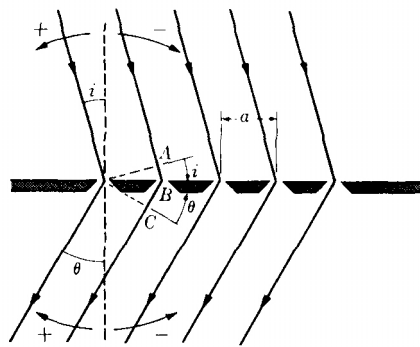
(dla $p = 0, N, 2N$ - główne maksima)

$$\underline{\gamma = p\pi/N}$$

- bez $p = mN$ (m -rzęd)



Wiązka ukośna:



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (AB + BC) = \frac{2\pi a (\sin i + \sin \theta)}{\lambda}$$

Maksimum: $d(\sin i + \sin \theta) = m\lambda$ równanie siatki

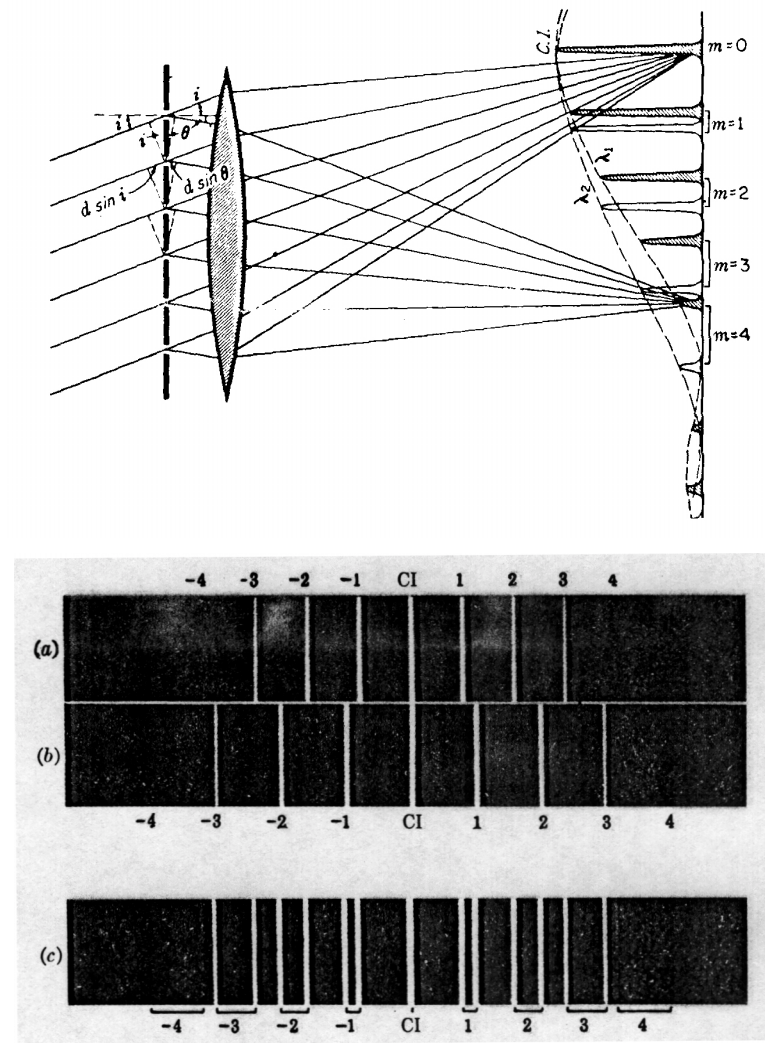
Dla $m = 0$: $\sin \theta = -\sin i$, $\theta = -i$ - wzdłuż prostej

$$2d \sin \frac{1}{2}(i + \theta) \cos \frac{1}{2}(i - \theta) = m\lambda$$

Odchylenie $D = i + \theta$ dla rzędu m :

$$\sin \frac{1}{2}D = \frac{m\lambda}{2a} \sec \frac{1}{2}(i - \theta) \quad D_{\min}: \theta = i \Rightarrow \sin i = n\lambda/2a$$

Dyfrakcja światła białego na siatce:



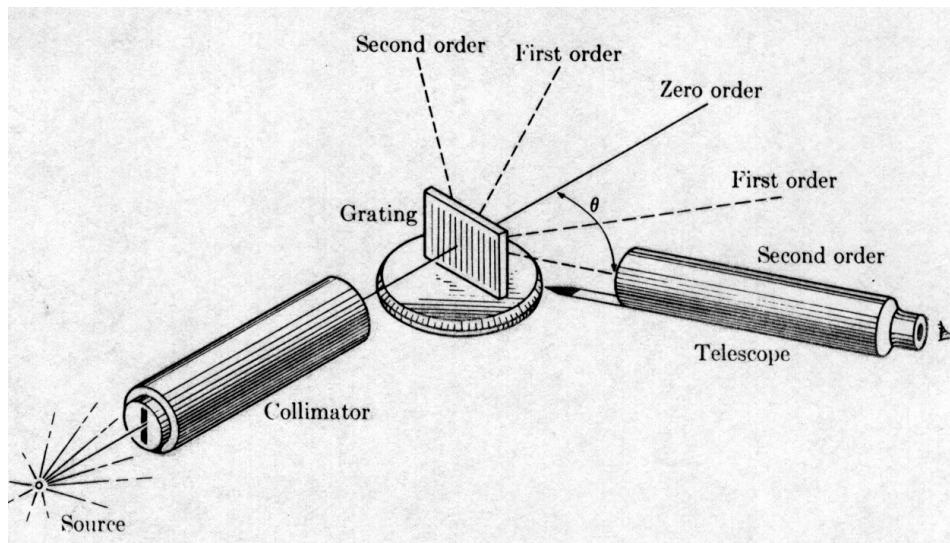
(a) $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$; (b) $\lambda_2 = 500 \text{ nm}$; (c) λ_1 i λ_2

Widmo 1, 2, 3 4 rzędu - dla danego rzędu: większe odchylenie dla większej długości fali ($\sin \theta = m\lambda/d$).

Dyspersja siatki:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

Spektrometr:



Zdolność rozdzielcza siatki: $R = \lambda / \Delta\lambda$

$\Delta\lambda$ - minimalna różnica długości fali, którą można rozdzielić przy długości fali λ .

Obrazy dla sąsiednich długości fali mają spełniać kryterium Rayleigha.

Maksimum główne rzędu m dla $\lambda + \Delta\lambda$ musi być w pierwszym minimum rzędu m dla λ :

$$mN\lambda + \lambda = mN(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \underline{\lambda / \Delta\lambda = m \cdot N}$$

Przykład: siatka 20000 linii, $D_{Na} : 589 \text{ nm}$ i $589,6 \text{ nm}$

$$\lambda_{sr} = 589,3 \text{ nm}; \Delta\lambda_{Na} = 0,6 \text{ nm}$$

$$R = Nm = 2 \cdot 10^4 \text{ (1 rząd)}$$

$$\Delta\lambda = \lambda / R = \frac{589,3}{2 \cdot 10^4} = 0,029 \text{ nm} < 0,6 \text{ nm}$$