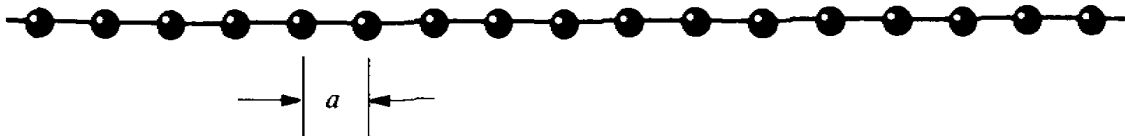


Fale w ośrodku o strukturze periodycznej:

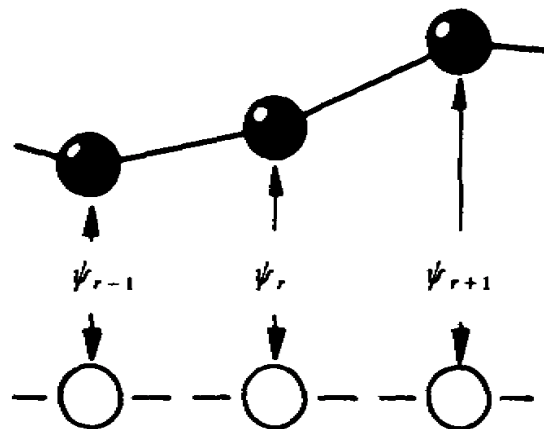
Na ogół rozmiary nieciągłości ośrodka $\ll \lambda$, z punktu widzenia ruchu falowego do zaniedbania;

Ale np. dla ruchu fal elastycznych o dużej częstotliwości w kryształach - nieciągłości nie można zaniedbać.

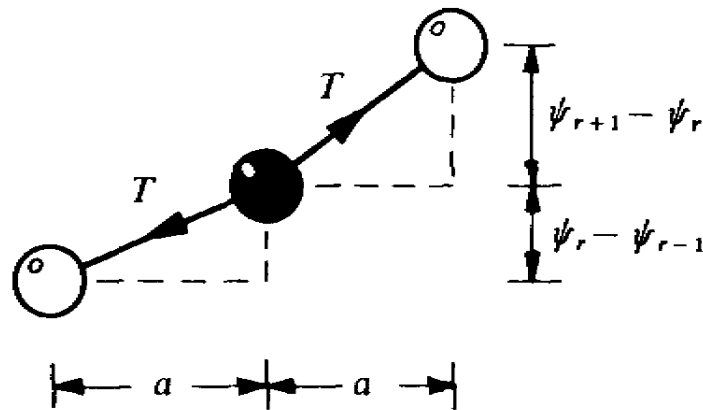
Zakładamy: struna idealnie elastyczna z rozłożonymi regularnie ciężarkami o masie m każdy.



W równowadze struna jest rozciągnięta tak, że napięcie wynosi T , odległość między masami wynosi a .



Równanie ruchu masy m_r :



$$m\ddot{\Psi}_r \cong -\frac{T(\Psi_r - \Psi_{r-1})}{a} + \frac{T(\Psi_{r+1} - \Psi_r)}{a}$$

$$m\ddot{\Psi} = \frac{T}{a}(\Psi_{r-1} - 2\Psi_r + \Psi_{r+1})$$

Zakładamy sinusoidalny kształt struny.

Odległość masy m_r od masy m_0 ($z = 0$) jest $z = ra$.

Dla wychyleń Ψ mamy:

$$\begin{aligned}\Psi_{r-1} &= A\cos[\omega t - k(r-1)a] = \\ &= A[\cos(\omega t - kra)\cos ka - \sin(\omega t - kra)\sin ka]\end{aligned}$$

$$\Psi_r = A\cos(\omega t - kra)$$

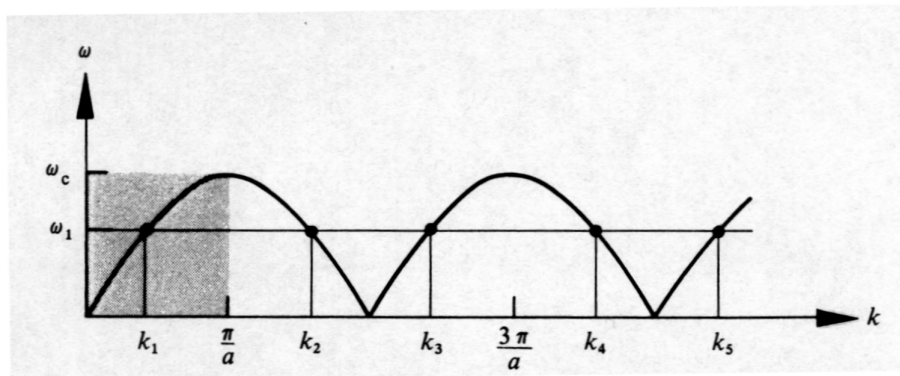
$$\begin{aligned}\Psi_{r+1} &= A\cos[\omega t - k(r+1)a] = \\ &= A[\cos(\omega t - kra)\cos ka + \sin(\omega t - kra)\sin ka]\end{aligned}$$

Dla masy r : $\ddot{\Psi}_r = -\omega^2 \Psi_r \Rightarrow \omega = \omega_c \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$

$$\omega_c \equiv 2\left(\frac{T}{ma}\right)^{1/2}$$

Fale biegnące:

Krzywa dyspersji



-powtarza się wzdłuż osi k

Częstości ω_1 odpowiada nieskończony zbiór różnych wektorów falowych $k_1, k_2 \dots$

Do opisu ruchu struny wystarczy jednak znajomość części zakreskowanej.

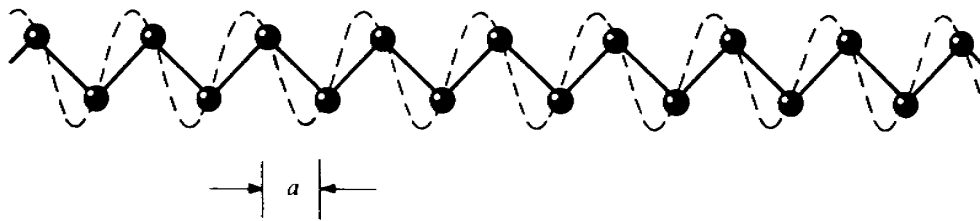
Pierwsze maksimum dla $k = T/a$ odpowiada $\lambda = 2a$.

Wtedy: $\Psi_r = A \cos(\omega t - r\pi)$

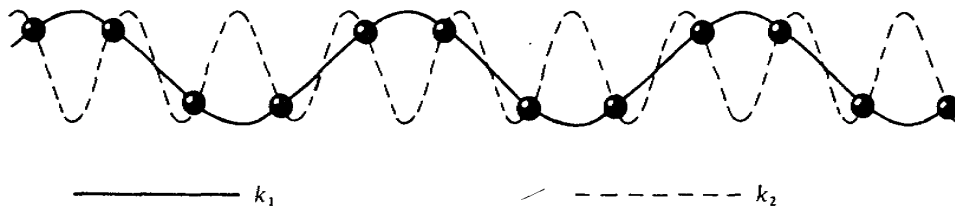
$$\Psi_{r-1} = A \cos[\omega t - (r-1)\pi] = -\Psi_r$$

$$\Psi_{r+1} = A \cos[\omega t - (r+1)\pi] = -\Psi_r$$

- sąsiednie masy drgają w przeciwfazie.



Dla $k > \frac{\pi}{a} \rightarrow \lambda < 2a$ ruch może być opisany równie dobrze przez falę o $\lambda > 2a$.



Do opisu fali wystarczy znajomość krzywej dyspersji dla $|k| \leq \pi/a$ (pierwsza strefa Brillouina)

Dla małych częstości $\lambda \gg a \Rightarrow ka \ll 1$

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cong \frac{ka}{2} \quad \omega \cong \left(\frac{Ta}{m}\right)^{1/2} k$$

$$\frac{a}{m} \equiv \mu \Rightarrow \omega \cong \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} k \text{ - jak dla elastycznej struny}$$

jednorodnej.

Fale stojące:

- dwie masy zamocowane, badamy ruch mas pomiędzy nimi.

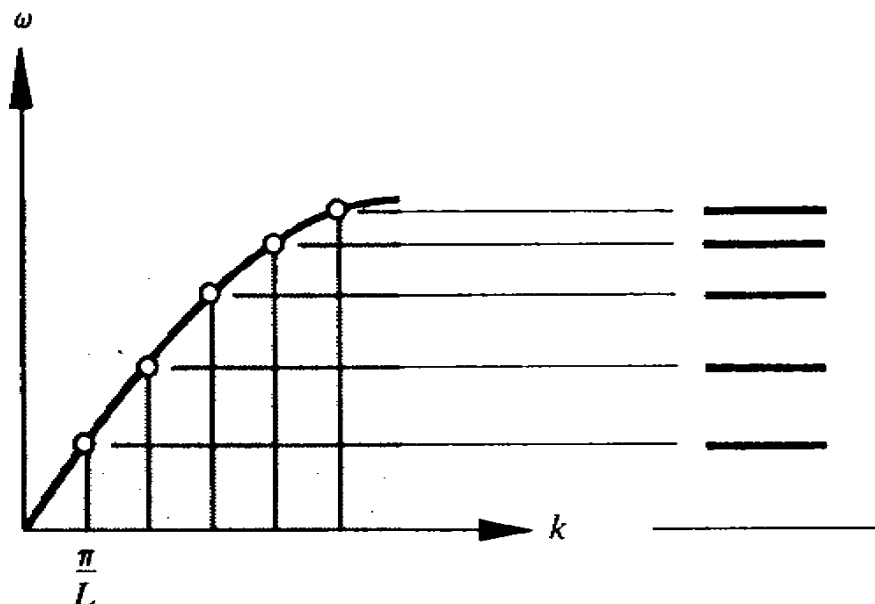
Funkcje własne jak dla obustronnie zamocowanej struny.

$$\omega_n = \omega_f \sin \frac{1}{2} k a$$

Maksymalna wartość $k_m = \frac{\pi}{a}$.

Dla kryształów typowa wartość

$$\nu_{\max} = \frac{\omega}{2\pi} \cong 3 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$



Częstości własne struny z pięcioma masami – tylko pięć!

Liczba modów równa liczbie współrzędnych normalnych.

Struna z N masami zamocowana na końcach ma długość $(N+1)a$

$$k_n = \frac{n\pi}{(N+1)a} \quad n = 1, 2, 3...$$

Funkcja własna opisująca falę stojącą:

$n = N + 1$ (w naszym przykładzie $N=5$)

$$u_{N+1}(z) = \sin k_{N+1}z = \sin \frac{\pi z}{a}$$

- znaczenie fizyczne w położeniach mas:

$$u_{N+1}(ra) = \sin r\pi = 0$$

- fala stojąca w postaci braku ruchu (rysunek na następnej stronie – $n=6$).

$$\underline{n = N + 2}$$

$$n = N + 2 = 2(N+1) - N \quad (*)$$

$$\sin\left(2r\pi - \frac{Nr\pi}{N+1}\right) = -\sin\left(\frac{Nr\pi}{N+1}\right)$$

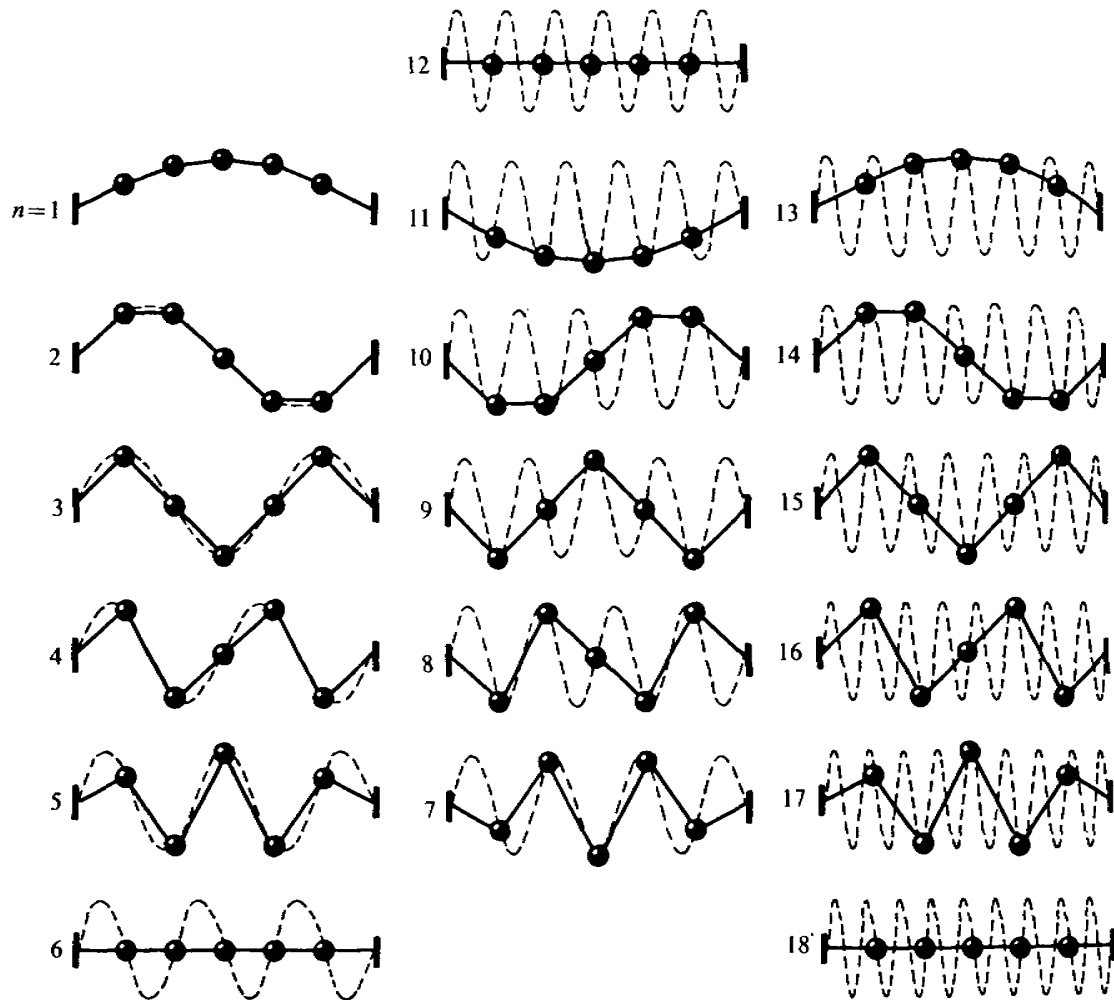
$$u_{N+2}(ra) = -\sin\left(\frac{Nr\pi}{N+1}\right) = -u_N(ra)$$

Fala stojąca $(N+2)$ taka jak (N) (p.rys. $n=5$ i $n=7$).

$$Z (*) \text{ dla } r = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_{N+2} = \omega_N$$

Istnieje tylko N fizycznie rozróżnialnych modów (w przestrzeni $3N$).

Wszystkie mody dają się opisać przez fale stojące o długości $2a$ i dłuższe.



itd.

Struna z dwoma rodzajami mas:

M w położeniach $2r-1, 2r+1...$

m w położeniach $2r, 2r + 2 \dots$

$$m\ddot{\Psi}_{2r} = \frac{T}{a}(\Psi_{2r+1} + \Psi_{2r-1} - 2\Psi_{2r})$$

$$M\ddot{\Psi}_{2r+1} = \frac{T}{a}(\Psi_{2r+2} + \Psi_{2r-1} - 2\Psi_{r+1})$$

$$\Psi_{2r} = A_m e^{i(\omega t - 2rka)}$$

$$\Psi_{2r+1} = A_M e^{i[\omega t - (2r+1)ka]}$$

$$-\omega^2 mA_m = \frac{TA_M}{a}(e^{-ika} + e^{ika}) - \frac{2TA_m}{a}$$

$$-\omega^2 MA_M = \frac{TA_m}{a}(e^{-ika} + e^{ika}) - \frac{2TA_M}{a}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{T}{a}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \pm \frac{T}{a}\left[\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2 ka}{mM}\right]^{1/2}$$

Niech (+) i $m > M$:

$$\omega^2 = \frac{2T}{a}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \quad \text{dla } k = 0$$

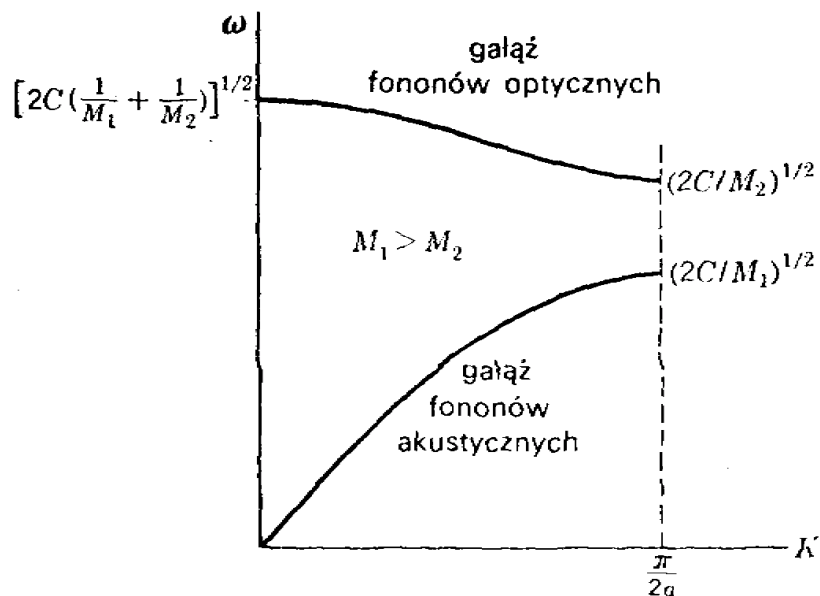
$$\omega^2 = \frac{2T}{aM} \quad \text{dla } k_M = \frac{\pi}{2a} \quad (\text{minimalna długość fali})$$

$$\lambda = 4a)$$

Niech (-):

$$\omega^2 = \frac{2Tk^2 a^2}{a(M+m)} \quad \text{dla małych } k$$

$$\omega^2 = \frac{2T}{am} \quad \text{dla } k = \frac{\pi}{2a}$$



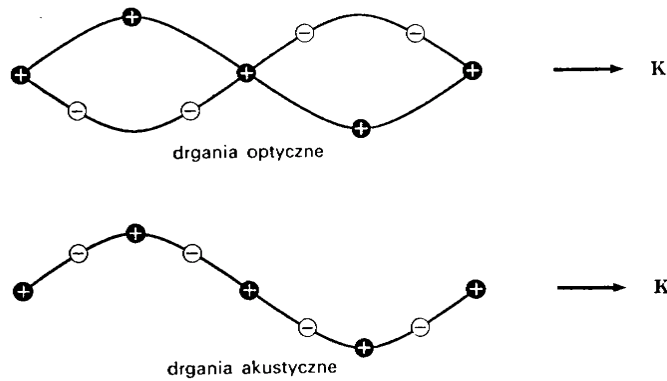
Górna krzywa – gałąź optyczna, dolna – gałąź akustyczna.

Dla gałęzi optycznej, przy dużych λ (małych k)

$$A_m/A_M = -M/m$$

- atomy drgają w przeciwfazie, środek masy nie porusza się.

Dla gałęzi akustycznej, przy dużych λ , $A_m = A_M$ - ruch w jedną stronę.

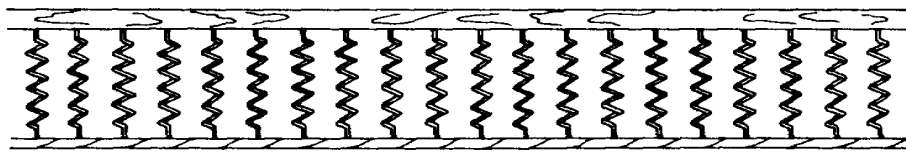


Fala zanikająca:

Z krzywej dyspersji (1) wynika, że nie ma wektorów falowych dla $\omega > \omega_c$.

Dla innych systemów może nie być rozwiązań dla $\omega > \omega'_c$ (odcięcie niskich częstotliwości).

Odcięcie niskich częstotliwości:



Sprężyny dają dodatkową siłę zwrotną.

Na odcinek struny Δz działa dodatkowa siła -

$$(\sigma \Delta z) \Psi(z, t)$$

(σ - sztywność na jednostkę długości).

Równanie ruchu:

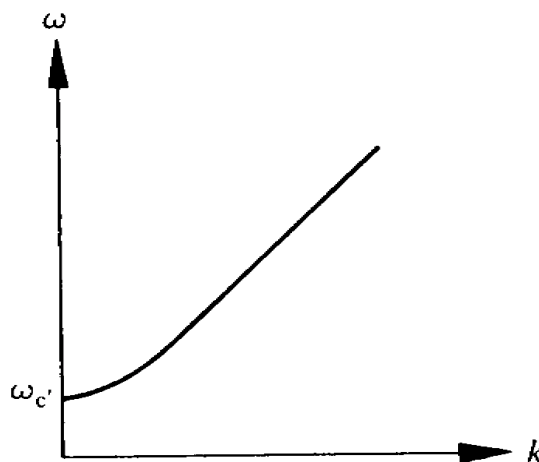
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \cong \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\sigma}{\mu} \Psi$$

Równanie Kleina-Gordona:
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \omega_c'^2 \Psi$$

$$\omega_c'^2 = \frac{\sigma}{\mu}$$

Stąd związek dyspersyjny:

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_c'^2$$



Dla $\omega = \omega_c'$ - odcięcie niskich energii.

Dla $\sigma = 0$, $\omega_c' = 0 \Rightarrow$ struna elastyczna.

Dla $\omega \gg \omega_c' \Rightarrow \sim$ struna elastyczna.

Aby związek dyspersyjny był spełniony dla $\omega < \omega_c'$ musi być:

$$k = \frac{(\omega^2 - \omega_c'^2)^{1/2}}{c} \quad k - \text{urojone.}$$

Podstawiając $k_1 = 0$ do funkcji falowej fali zanikającej:

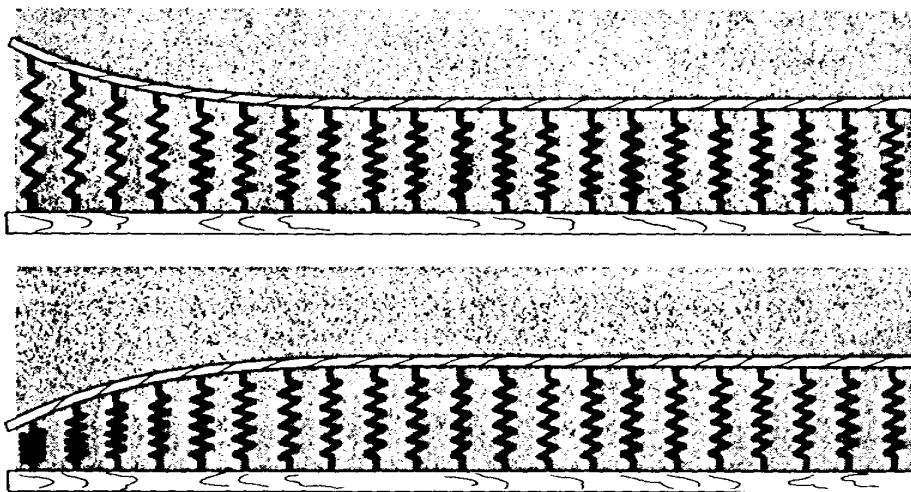
$$\Psi = \exp(-k_2 z) \operatorname{Re}\{D \exp[i(\omega t - k_1 z)]\}$$

dostajemy:

$$\Psi = \exp(-k_2 z) \operatorname{Re}[D \exp(i\omega t)]$$

(1) Faza nie zależy od z - wszystkie punkty sprężyny drgają w fazie – jak dla fali stojącej.

(2) Kształt sprężyny jest dla określonego momentu czasu wykładniczy (a nie sinusoidalny)



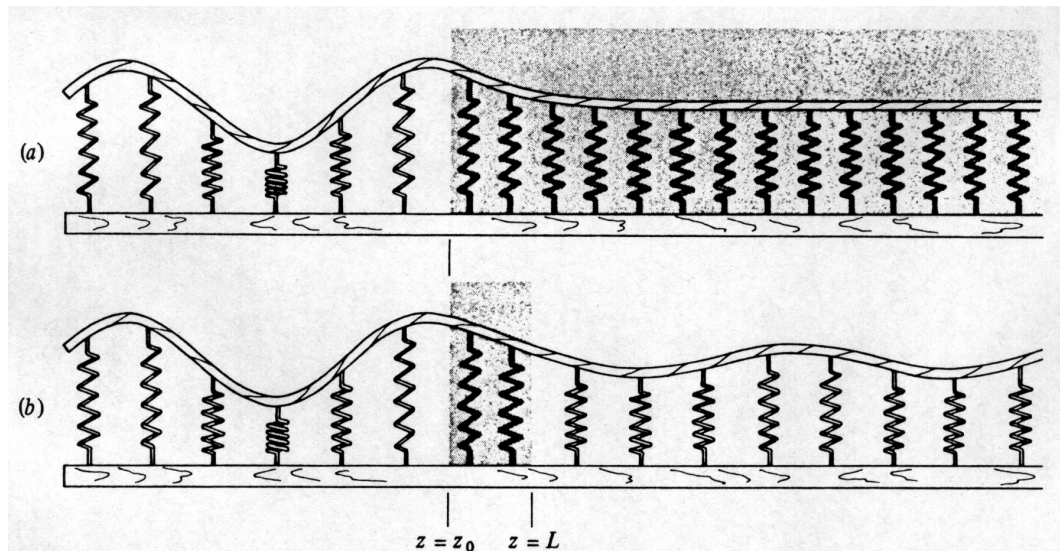
- fala zanikająca – punkty leżące dużo dalej niż $1/k_2$ nie będą się poruszać.

Działa jak filtr górnoprzepustowy.

Odbicie i tunelowanie:

Fala zanikająca, tak jak fala stojąca nie przenosi energii

– od obszaru w którym występuje będzie odbijać się fala biegnąca o częstotliwości ω mniejszej od częstotliwości odcięcia.



Przez punkt $z = z_0$ nie ma transportu energii, nie ma też tłumienia $\Rightarrow$ fala ulega całkowitemu odbiciu $\Rightarrow$ warunki do powstania fali stojącej dla $z < z_0$.

Położenie węzła (strzałki) zależy od σ, μ w obszarze $z > z_0$.

Jeśli obszar obcinający od dołu jest wąski, a fala może się rozchodzić po obu jego stronach, w obszarze $z > 1$ - fala biegnąca.

$(L \sim 1/k_2)$ - zjawisko tunelowania (przechodzenie przez obszar wzbroniony).

Odcięcie wysokich częstotliwości:

Dla $\omega > \omega_c$ związek dyspersyjny daje $\sin \frac{1}{2}ka > 1$

$\Rightarrow k$ - zespolone.

$$k = k_1 - ik_2$$

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \sin\left(\frac{1}{2}k_1a - i\frac{1}{2}k_2a\right) = \sin\left(\frac{1}{2}k_1a\right)\cos\left(i\frac{1}{2}k_2a\right) + \\ - \cos\left(\frac{1}{2}k_1a\right)\sin\left(i\frac{1}{2}k_2a\right)$$

Czynnik $\sin\left(i\frac{1}{2}k_2a\right)$ - urojony, pozostałe rzeczywiste.

$$\frac{\omega}{\omega_c} - \text{rzeczywiste} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{2}k_1a\right) = 0 \quad k_1a = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$$

$$\text{Dla } k_1a = \pi \Rightarrow k_1 = \frac{\pi}{a}$$

$$\text{Ale było, że } k = \frac{\pi}{a} \text{ dla } \omega = \omega_c \Rightarrow \underline{k = \left(\frac{\pi}{a}\right) - ik_2}$$

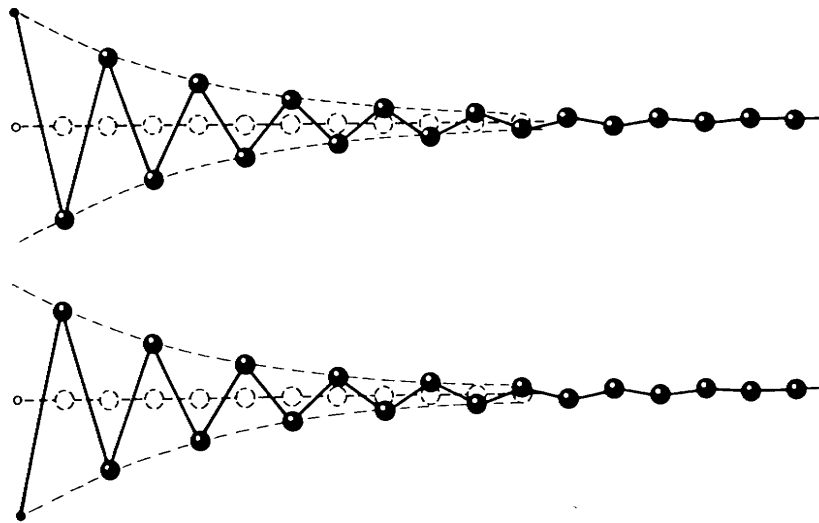
Jak rozchodzi się fala?

Wstawmy $k_1 = \pi/a$, $z = ra$ do równania fali tłumionej:

$$\Psi(r, a) = \exp(-k_2ra) \operatorname{Re}\{D \exp[i(\omega t - r\pi)]\}$$

- różnica w stosunku do układu odcinającego niskie częstotliwości $\Rightarrow$ sąsiednie masy drgają w przeciwfazie (czynniki $\exp(-ir\pi)$).

$\Rightarrow$ Drgania jak dla fali biegnącej o długości $2a$ zanikające wykładniczo (razy e na dystansie $1/k_2$).



Układ działa jak filtr dolnoprzepustowy.