Fale stojące

Dwie fale w zamocowanej w $z=0$ strunie.

W lewo: $\Psi_r = \Psi_0 \sin(\omega t + kz)$

W prawo: $\Psi_i = \Psi_0 ' \sin(\omega t - kz)$

Z zasady superpozycji:

$$\Psi = \Psi_0 \sin(\omega t + kz) + \Psi_0' \sin(\omega t - kz)$$

Dla $z=0$ $\Psi(z=0) = (\Psi_0 + \Psi_0')\sin\omega t$

Ale $\Psi(z=0) \equiv 0 \Rightarrow \underline{\Psi_0' = -\Psi_0}$ - zmiana fazy

$$\Psi = \Psi_0 \left[\sin(\omega t + kz) - \sin(\omega t - kz)\right]$$

$$\left[\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$$

$$\underline{\Psi = 2\Psi_0 \sin kz \cos\omega t}$$

- nie ma $\omega t \pm kx$, z i t rozdzielone - <u>nie jest to fala biegnąca</u>.

Jest to ruch harmoniczny prosty, którego amplituda, w zależności od położenia, zmienia się jak $A = 2\Psi_0 \sin kz$ - fala stojąca o długości $\lambda = 2\pi/k$.

Gdy $kz = n\pi$ (n- całkowite) $\Rightarrow$ $A=0$

$$\frac{2\pi}{\lambda} z = n\pi \Rightarrow \underline{z = \frac{1}{2} n\lambda} \qquad \leftarrow \text{węzły}$$

Odległość między kolejnymi węzłami - $\dfrac{\lambda}{2}$

Prędkość fali w strunie $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

λ dowolna, jeśli ω dowolne.

Oba końce zamocowane:

Niech: dla $x = L$ - węzeł $\Rightarrow kL = n\pi$

$$L = \frac{1}{2} n\lambda$$

$$\lambda = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3} \ldots \leftarrow$$ ograniczenia na λ!

$$\nu_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ - częstość podstawowa

$$\nu_n = n\nu_1$$

Warunki brzegowe powodują skwantowanie.

Było:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Rightarrow \Psi = f_1(z - ct) + f_2(z + ct)$$

$$(1) \qquad\qquad (2)$$

Dla fali biegnącej (1) lub (2), dla stojącej (1) i (2).

Ogólnie: $\Psi = f(z)\sin\omega t$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\sin\omega t, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 f(z)\sin\omega t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\omega^2}{c^2} f, \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0}$$ równanie dla amplitudy

$$\Rightarrow \quad f(z) = A\sin kz + B\cos kz$$

$$\Psi = (A\sin kx + B\cos kx)\sin\omega t$$

A, B - z warunków początkowych.

<u>Zamocowane oba końce</u>: $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$

$$z = 0 \Rightarrow \Psi_{z=0} = B\sin\omega t = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi = A\sin kz\sin\omega t$$

$$z = L \Rightarrow \Psi_{z=L} = A\sin kL\sin\omega t = 0$$

$$A \neq 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \quad kL = n\pi$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Dwa końce swobodne:

Dla $z = 0$ i $z = L$

Ψ - maksimum, $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = k(A\cos kz - B\sin kz)\sin \omega t$$

$$z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_{z=0} = kA\sin \omega t = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -kB\sin kz \sin \omega t$$

$$z = L \Rightarrow \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_{z=L} = -kB\sin kL \sin \omega t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin kL = 0 \quad kL = n\pi$$

$$\underline{\lambda = \frac{2L}{n}}$$

$$\underline{\nu_n = \frac{c}{\lambda} = n(c/2L)}$$

$\nu_1 = c/2L$ i jego harmoniki

$$\underline{\Psi = B\cos kz \sin \omega t}$$

$$\left(\nu_{\Pi} \propto d / L^2,\ \nu_{O} \propto R / L^2,\right)$$

Jeden koniec swobodny:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & z=0 \Rightarrow \dfrac{\partial \Psi}{\partial z}=0 \\ (2) & z=L \Rightarrow \Psi=0\end{array}\right\}$$

$$(1) \quad \Rightarrow A=0$$

$$\Psi = B\cos kz \sin \omega t$$

$$(2) \quad \Rightarrow \Psi_{(z=L)} = B\cos kL \sin \omega t = 0$$

$$\cos kL = 0$$

$$kL = (2n+1)\pi/2$$

$$\underline{\lambda = \frac{4L}{2n+1}}$$

$$\underline{\nu = \frac{c}{\lambda} = (2n+1)\frac{c}{4L}} \qquad (\nu_1,\, 3\nu_1,\, 5\nu_1)$$

Ogólnie:

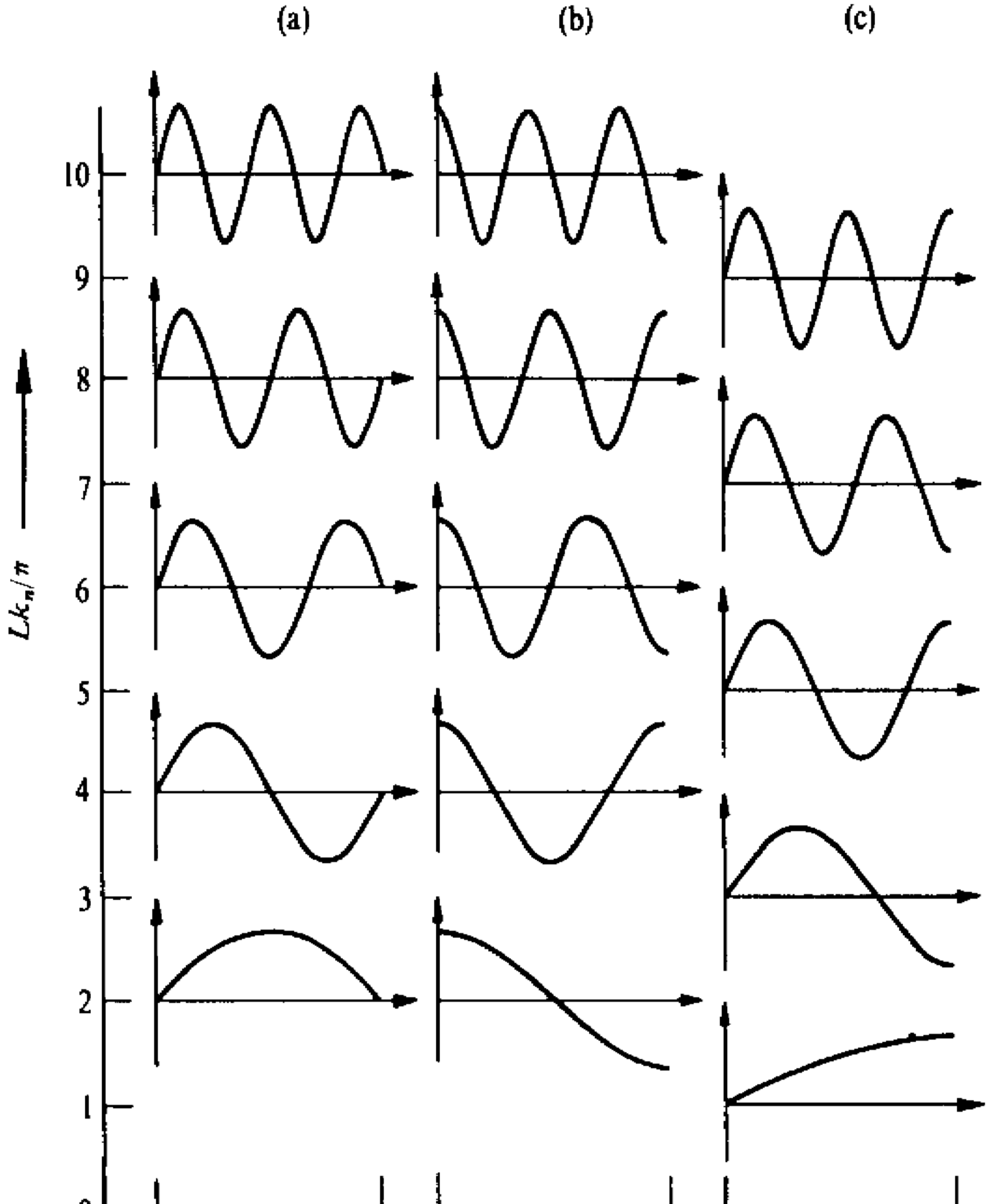
$$\Psi(z,t) = A_n u_n(z)\cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

$u_n(z)$ - funkcje własne układu,

harmoniczne w przestrzeni, o długościach λ_n (liczbach falowych k_n) określonych przez warunki brzegowe.

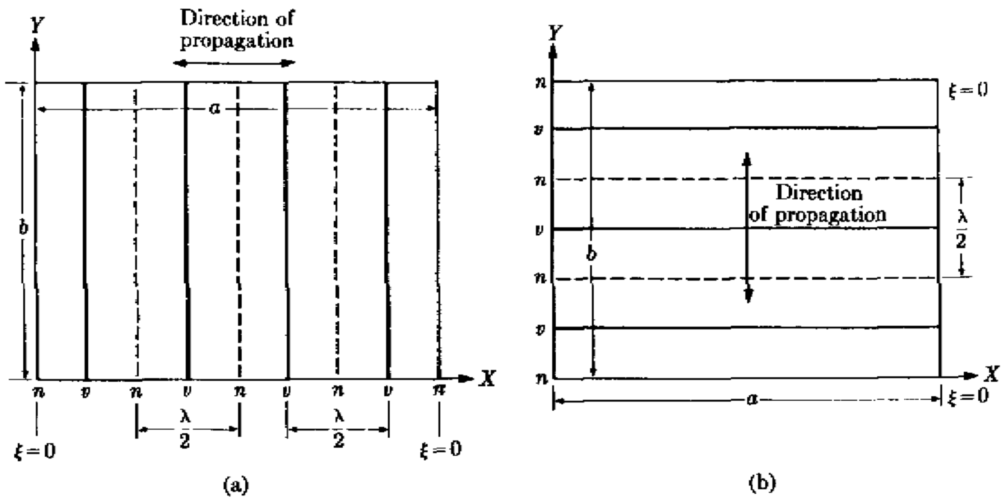
Częstości własne:

$$\underline{\nu_n = \frac{c}{2\pi} k_n}$$


(a)
(b)
(c)
Lk_n/π
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
L
0
L
0
L

Fale stojące w dwu wymiarach:

Dwa boki zamocowane:



$$ka = n\pi \qquad\qquad kb = n\pi$$

$$\lambda = \frac{2a}{n} \qquad\qquad \lambda = \frac{2b}{n}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = n(c/2a) \qquad\qquad \nu = \frac{c}{\lambda} = n(c/2b)$$

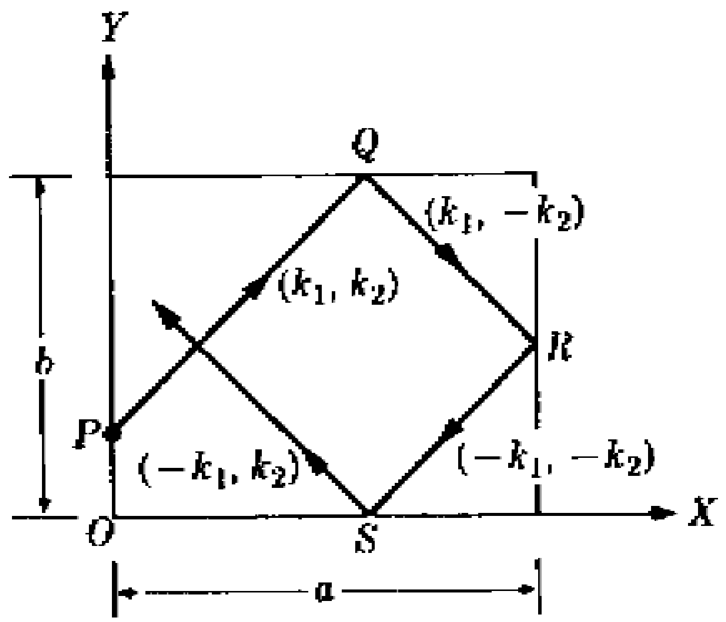
$$\xi = A\sin kx \sin \omega t \qquad\qquad \xi = A\sin ky \sin \omega t$$

Cztery boki zamocowane:

Fala w dwu wymiarach $\xi = \xi_0 \sin\left[\omega t - \left(k_1 x + k_2 y\right)\right]$

$$\overline{k} = \left[k_x, k_y\right]$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$



Cztery fale: $k_1, k_2;\ k_1, -k_2;\ -k_1, -k_2;\ -k_1, k_2;$

interferują tak, aby: $\left.\begin{matrix} \xi(x=0) = \xi(x=a) = 0 \\ \xi(y=0) = \xi(y=b) = 0 \end{matrix}\right\}$

$$\Downarrow$$

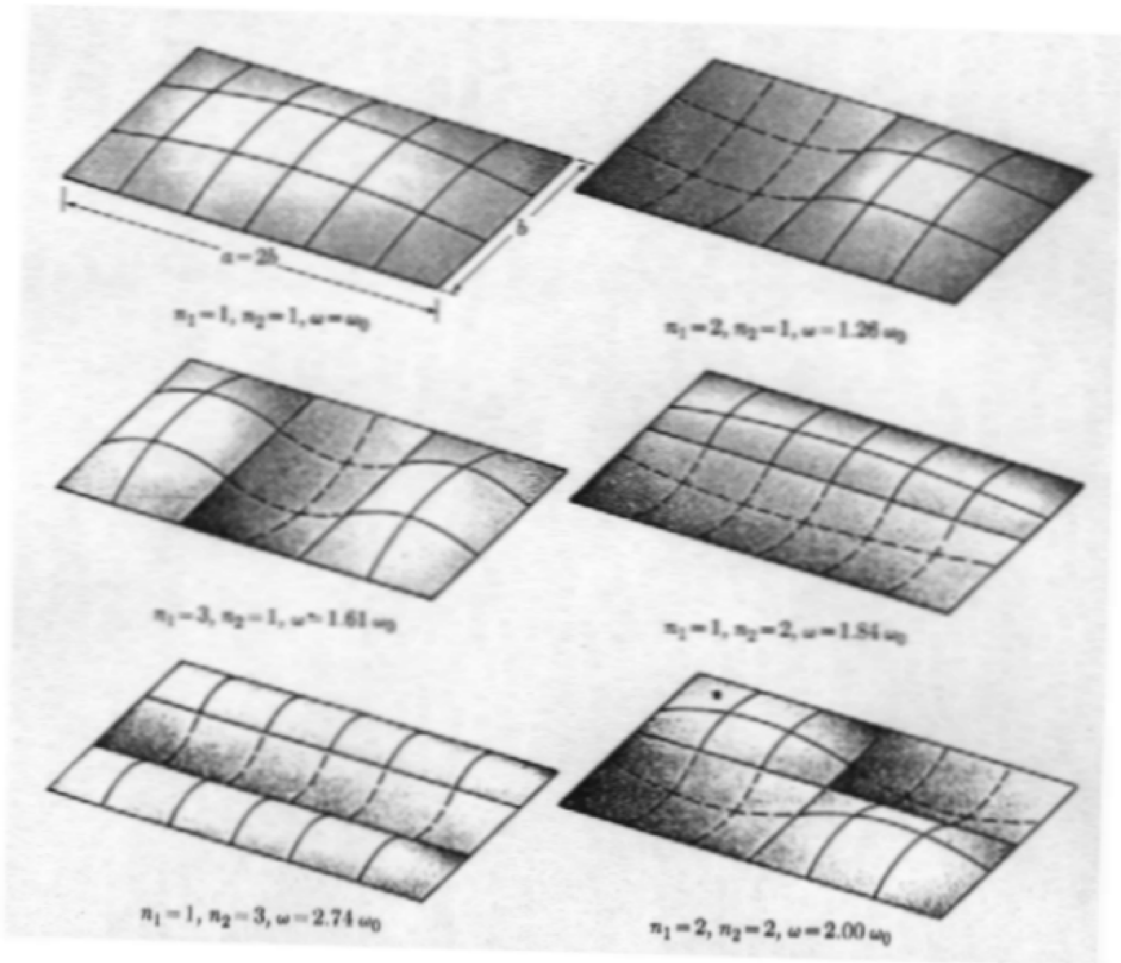
$$k_1 a = n_1 \pi \Rightarrow k_1 = \frac{n_1 \pi}{a}$$

$$k_2 b = n_2 \pi \Rightarrow k_2 = \frac{n_2 \pi}{b}$$

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}$$

$$\nu = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}$$



Fale stojące w membranie kwadratowej:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -k^2 u(x,y) \qquad k = \omega/c$$

Niech $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 XY$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$

$f(x)$ $\qquad f(y)$ $\qquad$ stała

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2, \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2$$

a) $X = B\cos(k_x x)$ $\qquad$ b) $X = B\sin(k_x x)$

Ze znikania na granicy:

a) $$\begin{cases} k_{xn} a = \dfrac{\pi}{2} n & (n = 1,3,5\ldots) \\ X_n = B_n \cos\left(\dfrac{\pi}{2a} nx\right) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} k_{xn}a = \dfrac{\pi}{2}n & (n = 2, 4, 6...) \\ X_n = B_n \sin\left(\dfrac{\pi}{2a}nx\right) \end{cases} \qquad k_{xn} = \frac{\pi}{2a}n$$

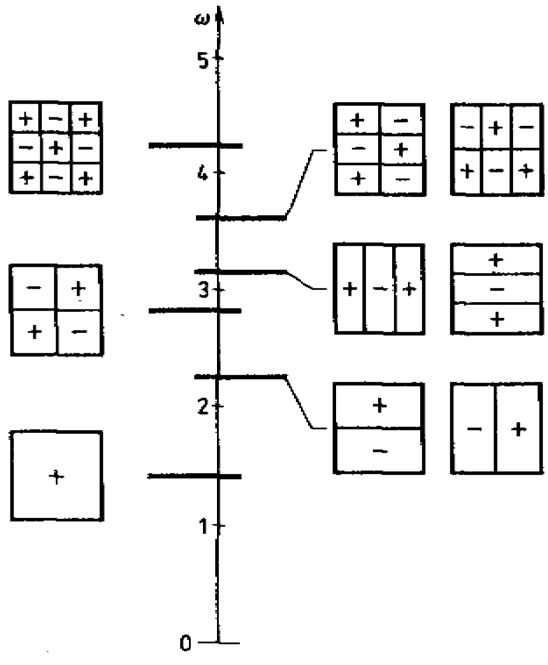
Dla Y: $k_{ym} = \dfrac{\pi}{2a}m$

$$k = \sqrt{k_{xn}^2 + k_{ym}^2} = \frac{\pi}{2a}\sqrt{n^2 + m^2}$$

$$\omega = kc$$

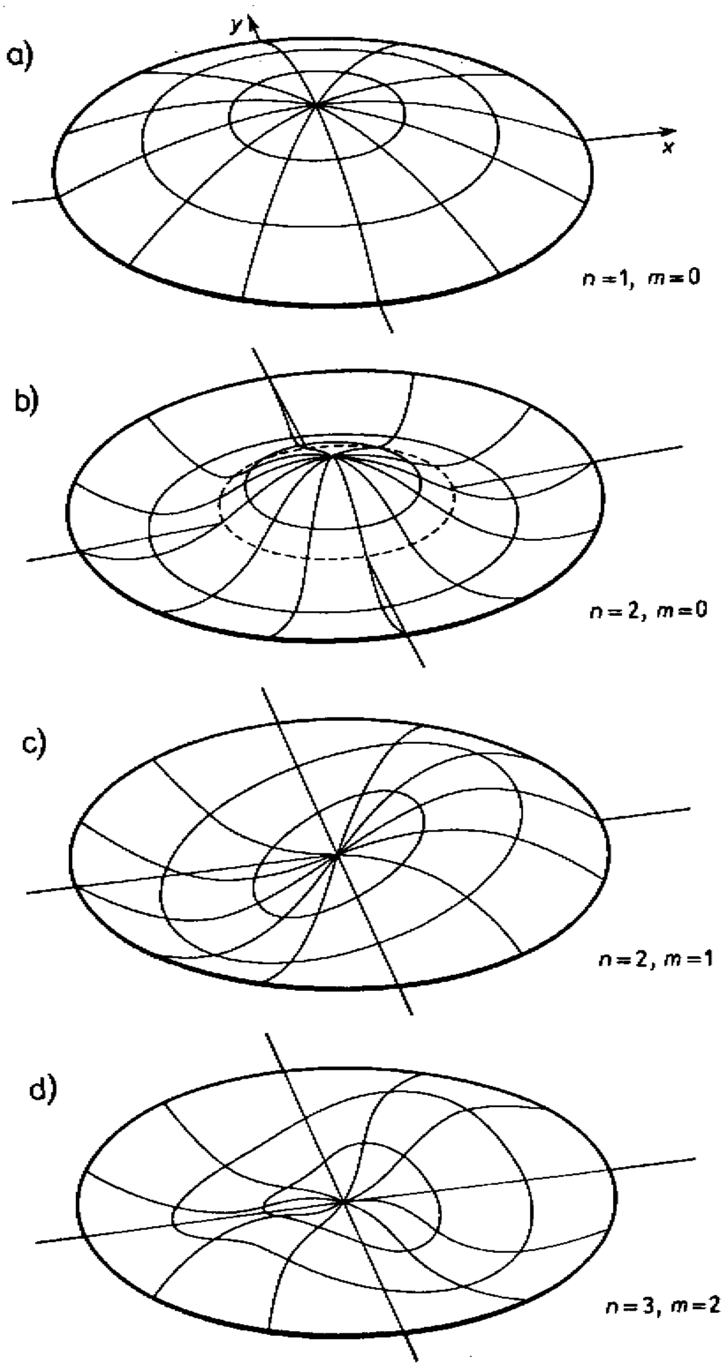
$$\underline{\omega_{nm} = \frac{\pi c}{2a}\sqrt{n^2 + m^2}}$$

Kwantyzacja częstości, dwie „liczby kwantowe” m i n.
Degeneracja – tej samej częstości odpowiadają różne rodzaje drgań np. $n=1 \quad m=2, \quad n=2 \quad m=1$



Membrana kołowa:

„Liczby kwantowe": całkowita liczba linii węzłowych $\underline{n}$ i liczba prostych przechodzących przez środek $\underline{m}$ $(n \geq m+1)$.



Funkcje falowe (we współrzędnych biegunowych ρ, φ):

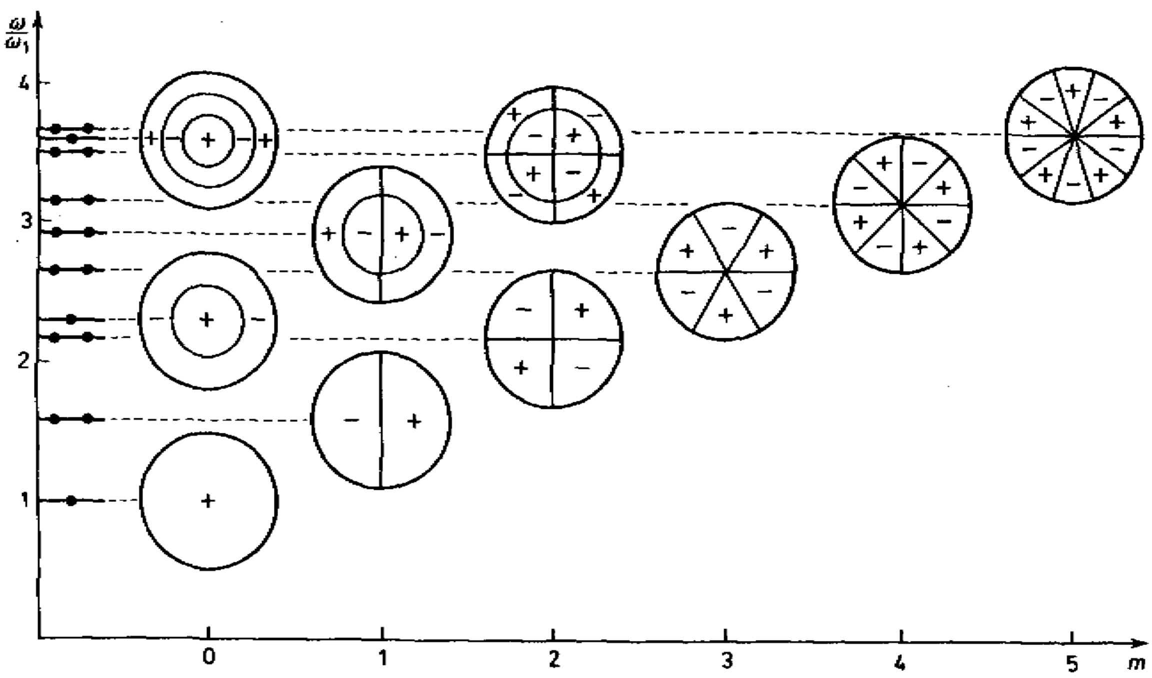
1. $m = 0$ - pełna symetria obrotowa

$$\Psi_{n,0}(\bar{r},t) = P_{n0}(\rho)\cos(\omega_{n0}t)$$

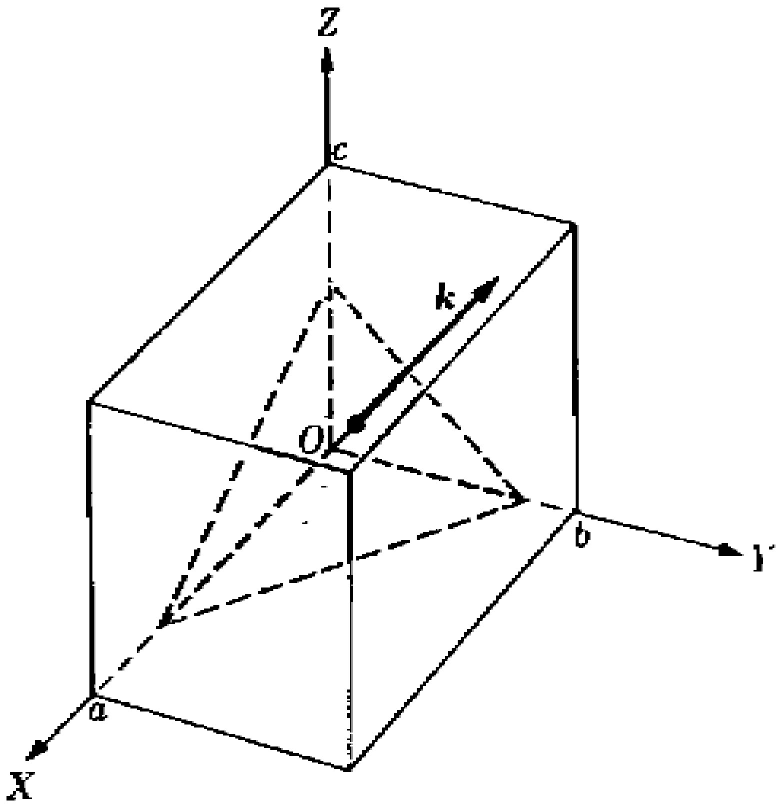
2. $m \neq 0$ - dwie liniowo niezależne funkcje falowe:

$$f(\bar{r},t)\begin{cases}\Psi_{nm}^{(1)} = P_{nm}(\rho)\cos(m\varphi)\cos(\omega_{nm}t) \\ \Psi_{nm}^{(2)} = \underbrace{P_{nm}(\rho)\sin(m\varphi)}_{u_{nm}(\bar{r})}\cos(\omega_{nm}t)\end{cases}$$

$$\Psi_{nm}(\bar{r},t) = u_{nm}(\bar{r})\cos(\omega_{nm}t)$$



Fala stojąca w trzech wymiarach:



- kombinacja ośmiu fal $\left(\pm k_1,\ \pm k_2,\ \pm k_3\right)$, $\xi = 0$ na wszystkich ścianach

$$k_1 a = n_1 \pi \qquad k_2 b = n_2 \pi \qquad k_3 c = n_3 \pi$$

$$k_1 = n_1 \frac{\pi}{a} \qquad k_2 = n_2 \frac{\pi}{a} \qquad k_3 = n_3 \frac{\pi}{a}$$

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$$

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}$$

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}$$