

FALE ELEKTROMAGNETYCZNE W PRÓŻNI:

Równania Maxwella:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \bar{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ρ - gęstość ładunku

$\bar{j}$ - gęstość prądu

ϵ_0 - przenikalność elektryczna próżni = $8,8542 \times 10^{-12}$ F/m

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni = $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

$$\bar{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \bar{\nabla} \varphi = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{a} = \operatorname{div} \bar{a}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{a} = \operatorname{rot} \bar{a}$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Równania Maxwella w próżni:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad | \operatorname{rot}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad | \operatorname{rot}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{A}) - \Delta \bar{A}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{E}) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{rot}\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \end{aligned}}$$

- Pole elektryczne i magnetyczne może rozchodzić się w postaci fali
- Prędkość fazowa fali w próżni

$$\underline{c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

$$\operatorname{rot} \bar{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$(\operatorname{rot} \bar{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$(\operatorname{rot} \bar{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$(\operatorname{rot} \bar{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$(\operatorname{rot} \bar{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$(\operatorname{rot} \bar{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\operatorname{rot} \bar{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_y = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

- Analogicznie dla $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

Płaskie fale elektromagnetyczne w próżni:

Niech kierunek propagacji ($\hat{z}$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{E} &= \hat{x}E_x(z,t) + \hat{y}E_y(z,t) + \hat{z}E_z(z,t) \\ \vec{B} &= \hat{x}B_x(z,t) + \hat{y}B_y(z,t) + \hat{z}B_z(z,t) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial z} = 0$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0$$

$\Downarrow$

$$\underline{E_z \neq f(z,t)} \Rightarrow E_z \text{ stałe} \Rightarrow \text{niech zero}$$

Analogicznie:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$\Downarrow$

$$\underline{B_z \neq f(z,t)}$$

B_z stałe $\Rightarrow$ zero

$\Downarrow$

Płaskie fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi.

Dla fali płaskiej: $E_x(z,t)$, $E_y(z,t)$, $E_z = \text{const}(0)$

$B_x(z,t)$, $B_y(z,t)$, $B_z = \text{const}(0)$

Z (4) i (3):

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = (\operatorname{rot} \vec{B})_x \Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = (\operatorname{rot} \vec{B})_y \Rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = (\operatorname{rot} \vec{E})_x \Rightarrow -\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = (\operatorname{rot} \vec{E})_y \Rightarrow -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Sprzężone parami

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Do opisu elektromagnetycznej fali płaskiej wystarczy jeden z tych układów równań.

$$\text{Np. } E_y = 0, \quad B_x = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_x(z \mp ct) \\ B_y &= B_y(z \mp ct) \end{aligned} \right\}$$

Niech

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz + \alpha_1)$$

$$B_y = B_0 \cos(\omega t - kz + \alpha_2)$$

α_1, α_2 - faza początkowa $(t = 0, k = 0)$

$$-\frac{1}{c^2} \omega E_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_1) = -kB_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_2)$$

$$-\omega B_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_2) = -kE_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_1)$$

$$\omega = kc \Rightarrow \frac{1}{c^2} kc E_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_1) = kB_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_2)$$

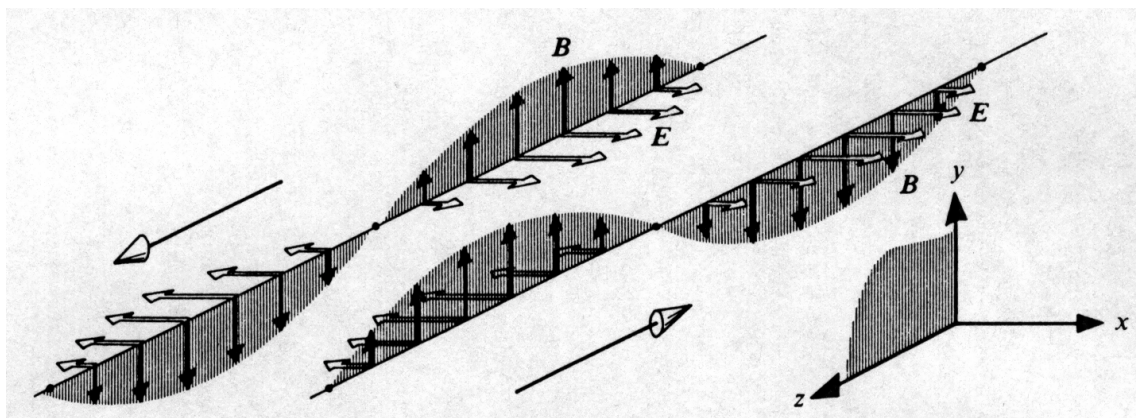
$$kc B_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_2) = kE_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_1)$$

$$E_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_1) = cB_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_2)$$

$$E_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_2) = cB_0 \sin(\omega t - kz + \alpha_1)$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha_1 = \alpha_2}; \quad \underline{E_0 = cB_0} \quad \frac{E_0}{B_0} = c \quad \Rightarrow \frac{E}{B} \quad (\text{SI})$$

B i E drgają w fazie (przeciwfazie), a stosunek amplitud jest c .



Polaryzacja:

Drgania $E(B)$ w jednej płaszczyźnie

- fala spolaryzowana liniowo
- kierunek polaryzacji = kierunek drgań wektora elektrycznego

Inne rozwiązanie – stała długość wektorów E i B , rotujących wokół kierunku propagacji-polaryzacja kołowa.

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_0 \sin(kz - \omega t) \\ E_x &= \pm E_0 \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} B_y &= \mp B_0 \cos(kz - \omega t) \\ B_x &= \pm B_0 \sin(kz - \omega t) \end{aligned} \right\}$$

Dla amplitud różnych = eliptyczna.

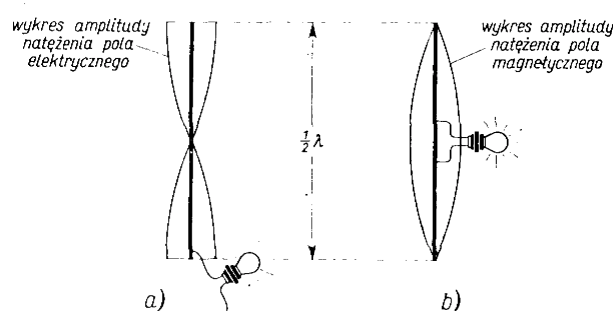
Stojąca fala harmoniczna:

Niech $E_x(z, t) = A \cos \omega t \cos kz$

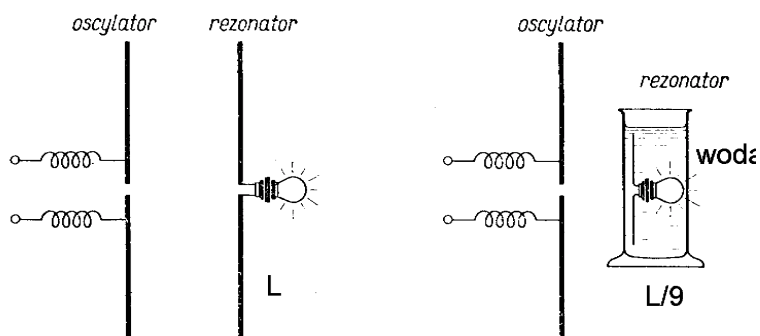
$$\Rightarrow B_y(z, t) = A \sin \omega t \sin kz = E_x(z - \lambda/4, t - \tau/4)$$

$$\vec{E} \perp \vec{B}; \vec{E}, \vec{B} \perp \hat{z}$$

- przesunięcie o 90° w przestrzeni i w czasie.

Fala stojąca w dipolu:

Wpływ ośrodka:

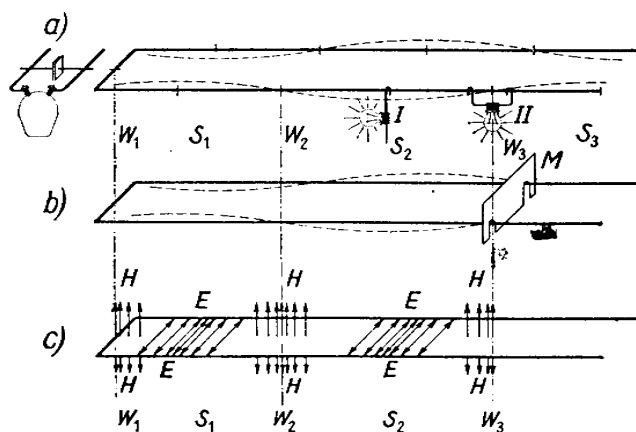
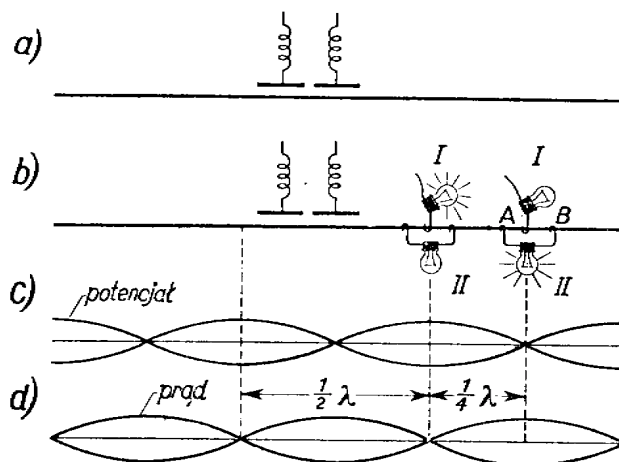


$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

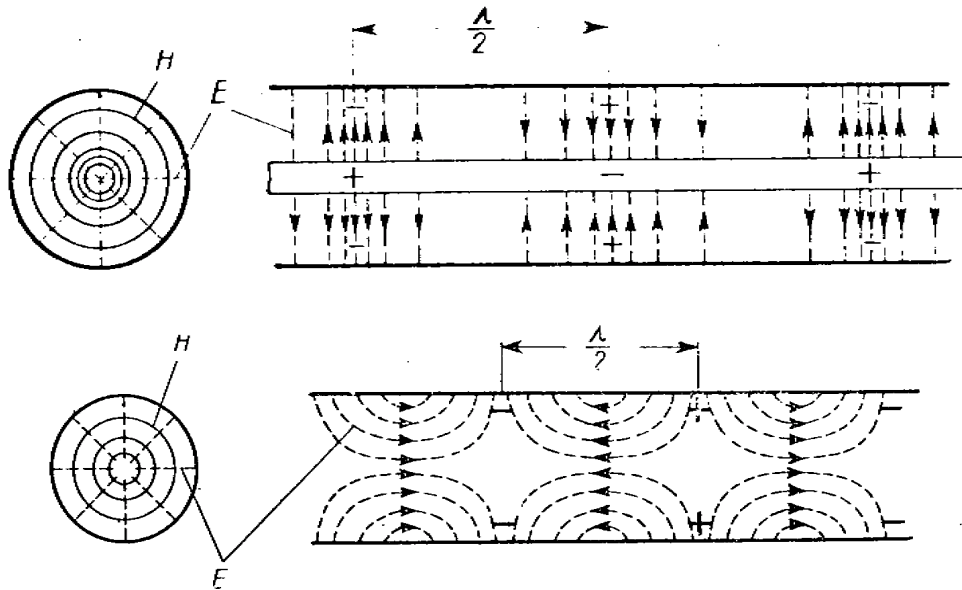
$$\frac{1}{c'^2} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu$$

$$\lambda_0 = cT; \quad \lambda_0 = c'T; \quad \lambda = \frac{c' \lambda_0}{c} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}$$

Fala stojąca w linii dwuprzewodowej - druty Lechera:



Linia współosiowa:



Energia i pęd fali elektromagnetycznej:

$$w_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$B = \frac{E}{c} = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} E$$

Natężenie (energia przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu):

$$I = w \cdot c = c \epsilon_0 E^2$$

Dla fali harmonicznej:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad \Leftarrow \quad \langle E_0^2 \sin^2 k(x - ct) \rangle = \frac{E_0^2}{2}$$

Natężenie jasnego światła słonecznego na powierzchni Ziemi: $\sim 1 \text{ kW/m}^2$.

$$\Rightarrow E_0 \cong 1 \text{ kV/m}; B_0 \cong E_0/c = 3 \mu\text{T}$$

- na ogół efekty związane z polem magnetycznym fali można pominąć (pole ziemskie $\sim 60 \mu\text{T}$).

Opór falowy:

$$I = \frac{E_0^2}{2\mathfrak{Z}_0}; \quad \mathfrak{Z}_0 = \left| \frac{E}{H} \right| = \left| \frac{E}{B/\mu_0} \right| = \mu_0 c = \left(\mu_0 / \epsilon_0 \right)^{1/2}$$

$\overline{H}$ - natężenie pola magnetycznego, $\mathfrak{Z}_0 = 376,7 \Omega$ - impedancja charakterystyczna właściwa (opór falowy)

Energia fal elektromagnetycznych:

Gęstość energii:

$$w(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0 \overline{E}^2}{2} + \frac{\overline{B}^2}{2\mu_0}$$

Szukamy wielkości, która opisuje transport energii przez falę elektromagnetyczną i spełnia równanie

$$\text{ciągłości} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div} \vec{S}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon_0 \overline{E} \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \overline{B} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\text{R.M.:} \quad \text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \epsilon_0 \bar{E} \cdot \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{rot } \bar{B} - \frac{1}{\mu_0} \bar{B} \text{rot } \bar{E} = \\ &= \frac{1}{\mu_0} (\bar{E} \text{rot } \bar{B} - \bar{B} \text{rot } \bar{E}) \end{aligned}$$

$$\text{div}(\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \text{rot } \bar{A} - \bar{A} \text{rot } \bar{B}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\bar{E} \times \bar{B}) \qquad \frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2$$

$$\underline{\bar{S} = (\bar{E} \times \bar{B})}$$

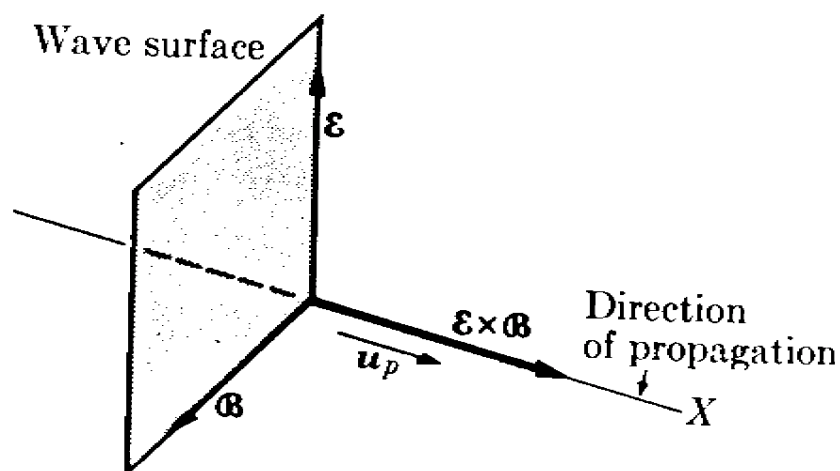
Szukamy $\bar{E} \times \bar{B}$

$$\text{Długość:} \quad |\bar{E} \times \bar{B}| = EB = \frac{1}{c} E^2$$

$$\text{Długość wektora } \underline{c\bar{E} \times \bar{B}} = |c\bar{E} \times \bar{B}| = E^2$$

$$\underline{\bar{S} = c^2 \epsilon_0 \bar{E} \times \bar{B}} \quad - \text{ wektor Poyntinga}$$

$$I = c \epsilon_0 E^2 \Rightarrow \quad |\bar{S}| = I \quad - \text{ natężenie}$$



Strumień wektora Poyntinga przez powierzchnię P:

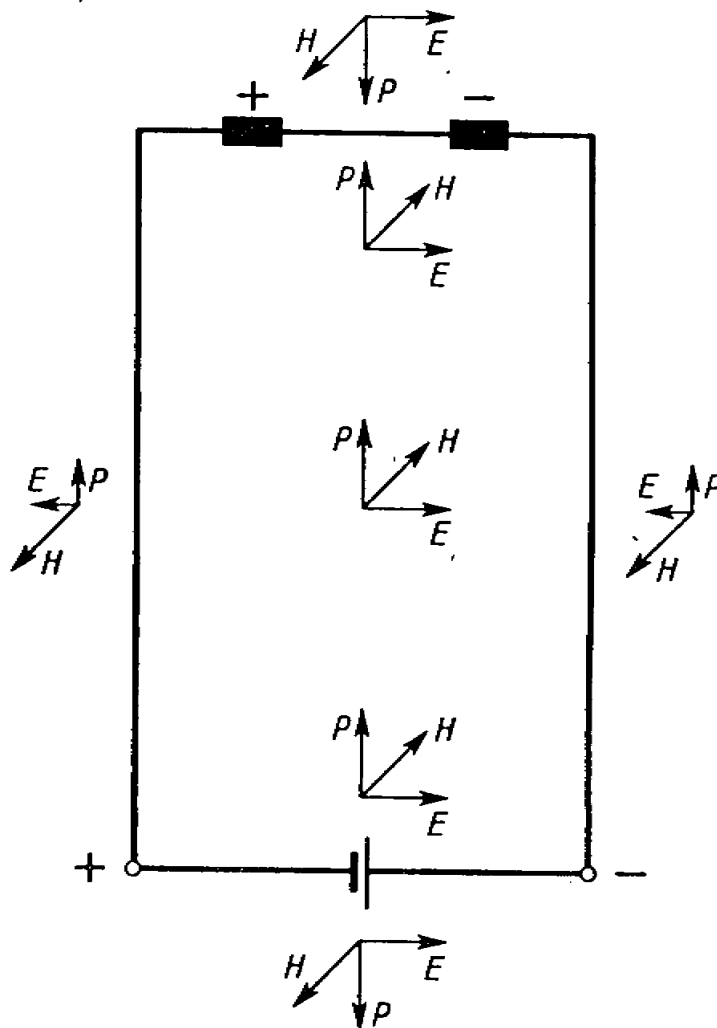
$$\int_P c^2 \epsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B}) \cdot \bar{u}_N dP = \frac{dW}{dt}$$

- energia przechodząca przez powierzchnię P w jednostce czasu.

Niech $\bar{E} = \bar{E}_0 \cos(kx - \omega t)$ - funkcja harmoniczna

$$S = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Dla „zwykłego” obwodu:



Pęd fali elektromagnetycznej:

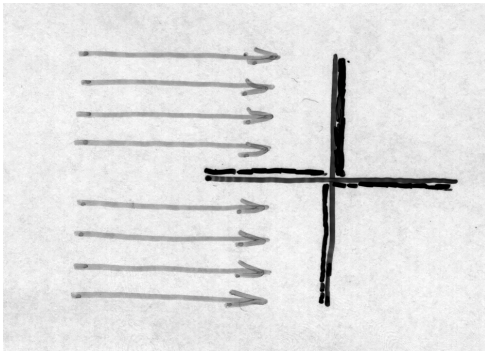
$$\text{Było: } \bar{p} = \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \underline{\underline{v = \frac{c^2 \bar{p}}{E}}}$$

$$v = c \Rightarrow \quad \underline{\underline{p = \frac{E}{c}}}$$

$$p = \frac{w}{c} = \frac{\epsilon_0 E^2}{c} = \epsilon_0 |\bar{E} \times \bar{B}| \quad \text{pęd na jednostkę objętości}$$

$$\underline{\underline{\bar{p} = \epsilon_0 \bar{E} \times \bar{B}}}$$

Radiometr Crookesa (skrzydełka wiatraczka poczerwione z jednej strony, posrebrzone z drugiej):



$$\Delta p = p_2 - (-p_1)$$

$$\underline{\underline{\Delta p = p_2 + p_1}}$$

Uwaga: efekt radiometryczny!

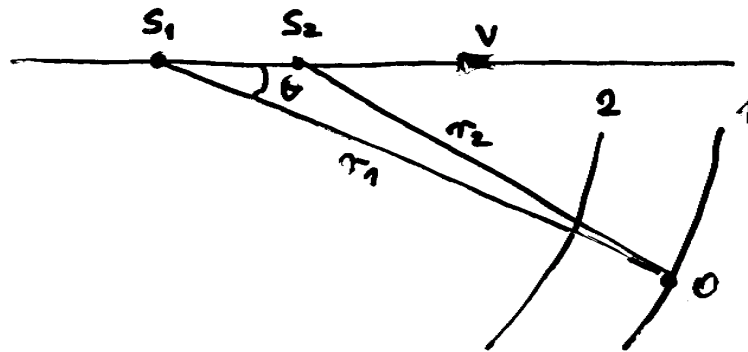
Moment pędu:

$$I = \hat{\omega} \frac{W}{\omega} \quad \text{dla fali spolaryzowanej kołowo, dla}$$

spolaryzowanej liniowo - zero.

Zjawisko Dopplera dla fal elektromagnetycznych:

1. Nie ma ośrodka – tylko prędkość względna źródła i obserwatora!
2. Prędkość propagacji c – transformacja Lorentza.



Rozważamy w układzie związanym z obserwatorem.

Dla $t = 0$ sygnał z S_1 . Do O dotrze: $t = \frac{r_1}{c}$.

Sygnał z S_2 dla $t = \Delta t_s$. Do O dotrze dla $t = \Delta t_s + \frac{r_2}{c}$.

Różnica czasów w O: $\Delta t_0 = \Delta t_s + \frac{r_2}{c} - \frac{r_1}{c}$

Niech S_1 daleko od O: $r_1 - r_2 = \overline{S_1 S_2} \cos \theta$

$$\Delta t_0 = \Delta t_s - \frac{\overline{S_1 S_2}}{c} \cos \theta$$

$$\overline{S_1 S_2} = v \cdot \Delta t_s$$

$$\Delta t_0 = \Delta t_s \left(1 - \frac{v}{c} \right) \cos \theta$$

Niech ν_s - częstość źródła; $\frac{1}{\nu_s}$ - czas dzielący wysłanie

dwóch sygnałów przez źródło

- różnica czasów własnych

Δt_s - czas dzielący te same zdarzenia w układzie O.

$$\frac{1}{\nu_s} = \Delta t_s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t_0 = \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\nu_s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\nu_{obs} = \frac{1}{\Delta t_0}$$

$$\nu_{obs} = \nu_s \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$\theta = 0 \rightarrow$ ruch źródła w kierunku obserwatora:

$$\nu_{obs} = \nu_s \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

$v > 0$ (zbliżanie) $\Rightarrow \nu_{obs} > \nu_s$ ku niebieskiemu

$v < 0$ (oddalanie) $\Rightarrow \nu_{obs} < \nu_s$ ku czerwieni

$v \ll c$:

$$\nu_{obs} \cong \nu_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right)$$

Bez członów $\frac{v^2}{c^2}$

$$\nu_{obs} \cong \nu_s \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_s} = \frac{v}{c} \quad \Delta \nu = \nu_{obs} - \nu_s$$

$\theta = 90^\circ$ - poprzeczny efekt Dopplera

$$\nu_{obs} = \nu_s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dla $v \ll c$:

$$\nu_{obs} \cong \nu_s \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad \text{kwadratowy}$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_s} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Ives, Stillwell (1938) – linie emisyjne atomów poruszających się z $v \cong 0,5c$.

- rozszerzający się Wszechświat
- Dopplerowskie poszerzenie linii widmowych:

$$\delta \nu_D = 2\nu_0 \frac{v}{c}; \quad v\text{-prędkość cząsteczek (najbardziej}$$

prawdopodobna) – chłodzenie atomów.

Promieniowanie drgającego dipola elektrycznego:

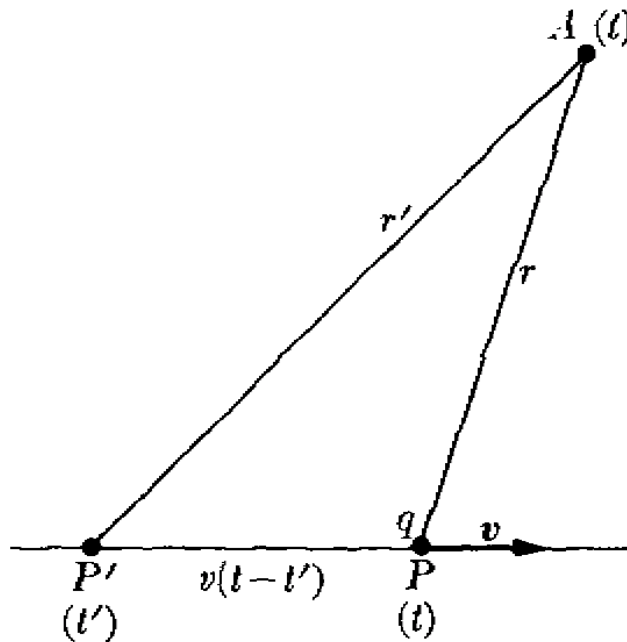
Niech moment elektryczny dipola

$$D = D_0 \sin \omega t$$

Dla stałego D – pole elektryczne stałe.

Dla oscylującego – oscylujące elektryczne oraz
magnetyczne (R.M.).

Dla obszaru bliskiego dipola ($\bar{r}$ - małe) – można
pominąć efekty opóźnieniowe (retardacyjne).



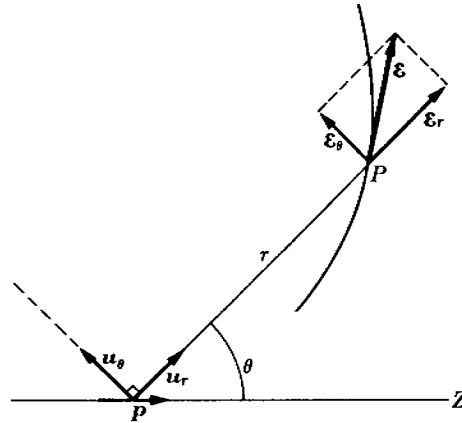
$$A(t) \leftarrow P(t)$$

$$A(t) \leftarrow P'(t')$$

$$c(t-t') = r' = P'A$$

$$v(t-t') = P'P$$

Kiedy można pominąć?



$$E_r = \frac{2D \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad E_\theta = \frac{D \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{2D_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \omega t & E_\theta &= \frac{2D_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \omega t \end{aligned} \right\}$$

Dla dużych odległości – w strefie falowej:

$$\left\{ \begin{aligned} E &\sim \frac{1}{r} && (\sim \text{symetria osiowa}) \\ \vec{E} \perp \vec{r}, \quad E_r &= 0 && (\text{fala lokalnie płaska}) \end{aligned} \right.$$

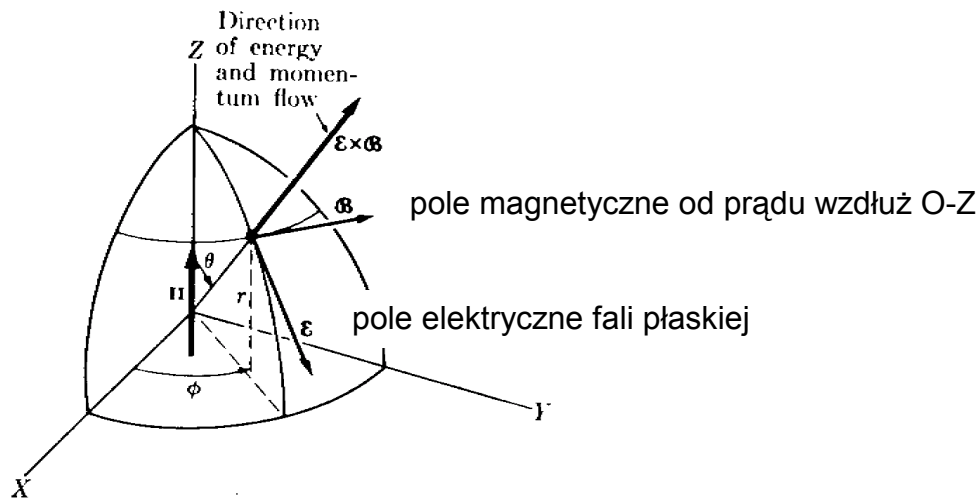
Rozwiązania:

$$E_\theta = \frac{D_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin(kr - \omega t) = E$$

$$B = \frac{1}{c} E = \frac{D_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c r} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin(kr - \omega t)$$

$$E, B = 0 \text{ dla } \theta = 0, \pi$$

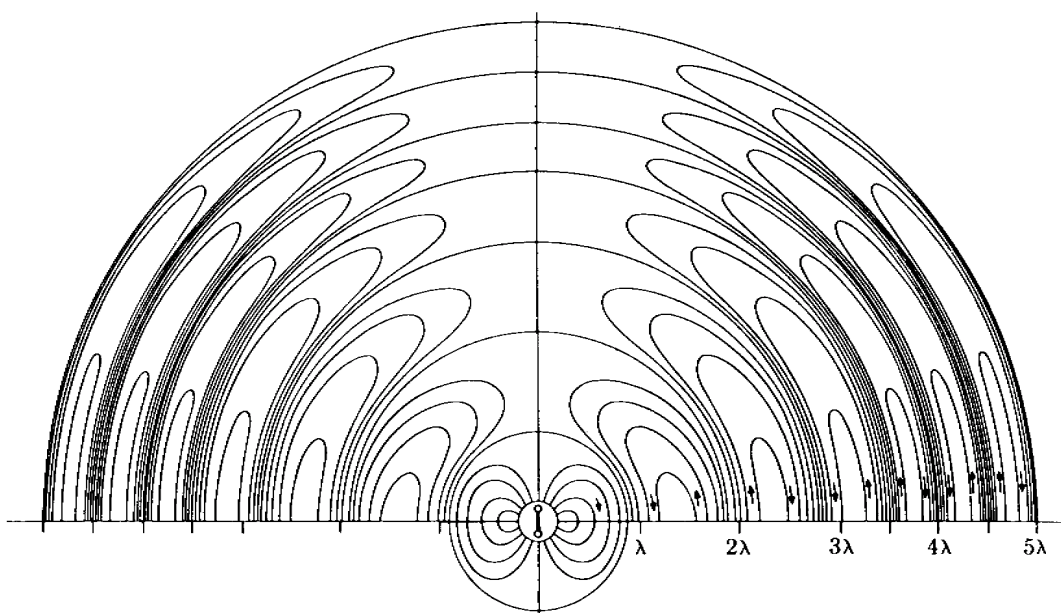
Maksimum dla $\theta = \frac{\pi}{2}$ (płaszczyzna X-Y)



Fala E liniowo spolaryzowana w płaszczyźnie południkowej.

Kierunek $\vec{E} \times \vec{B}$ - wzdłuż $\vec{r}$ - energia „wypływa” z dipola. Aby drgał – trzeba mu dostarczać energię!

Linie sił pola elektrycznego wytwarzanego przez drgający dipol (w płaszczyźnie południkowej):



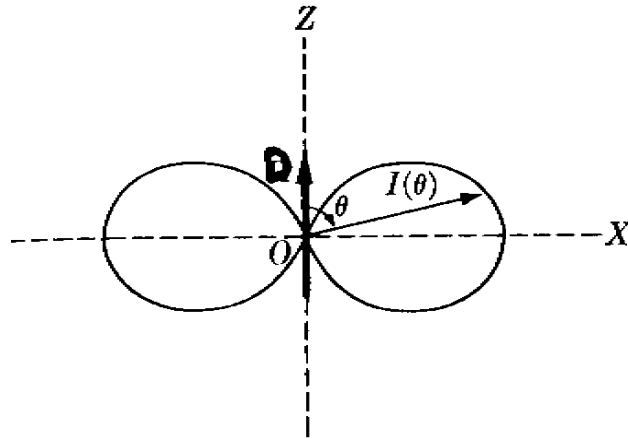
W dużej odległości:

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \frac{D_0^2 \sin^2 \theta \omega^4}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^4} \sin^2(kr - \omega t)$$

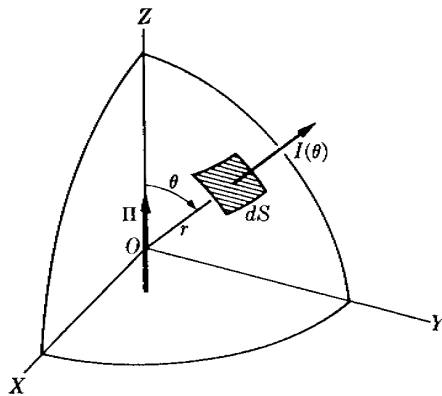
$$\langle w \rangle = \frac{D_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c^4 \varepsilon_0 r^2}$$

$$(I = cw) \Rightarrow \quad I(\theta) = \frac{D_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0 r^2} \sin^2 \theta$$

$I(\theta) \sim \frac{1}{r^2}$, maksimum w płaszczyźnie równikowej.



Energia całkowita, emitowana w ciągu sekundy:



$$\frac{dW}{dt} = \int_{Sfera} I(\theta) ds$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_{Sfera} I(\theta) ds$$

↓

$$\frac{dW}{dt} = \frac{D_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

Dla drgającego ładunku q : $D = q \cdot z$;

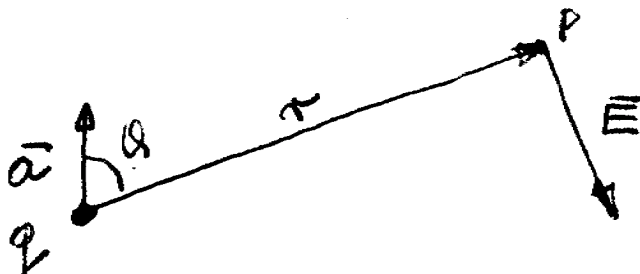
$$z = z_0 \sin \omega t; \quad D = qz_0 \sin \omega t; \quad D_0 = qz_0; \quad D = D_0 \sin \omega t$$

Np. elektron w atomie: $\frac{dW}{dt} = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3};$

$$z_0 \sim 10^{-10} \text{ m}, e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad \frac{dW}{dt} \sim 10^{-74} \omega^4 \text{ [W]};$$

$$\omega_{opt} = 10^{14} \text{ Hz}; \quad \frac{dW}{dt} \approx 10^{-18} \text{ W} \approx 10 \frac{\text{eV}}{\text{s}}$$

Promieniowanie ładunku punktowego:



Pole promieniowania w odległości r od ładunku q :

$$\vec{E}_{prom}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2 r} \vec{a}_{\perp} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$E_{prom}(r, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2 r} a \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \quad v \ll c$$

$$S = c^2 \epsilon_0 E B = c \epsilon_0 E^2 = c \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2 r} a \sin \theta \right)^2$$

$$S = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin \theta$$

$$\frac{d\omega}{dt} = P = \oint S ds \quad \text{- moc całkowita}$$

$$ds = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

$$\underline{\underline{P = \frac{1}{6\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{c^3} a^2}}}$$

Dipol:

$$D = D_0 \sin \omega t$$



$$z = z_0 \sin \omega t ; \quad D_0 = q z_0$$

$$a = -\omega^2 z_0 \sin \omega t = -\frac{\omega^2 D_0}{q} \sin \omega t$$

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2 r} \left[-\frac{\omega^2 D_0}{q} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2 D_0 \sin \omega t}{c^2 r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\text{Moc: } \bar{P} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3} \overline{a^2} \quad \bar{P} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{D_0^2 \omega^4}{c^3} \quad \underline{\underline{\sim \omega^4}}$$

Promieniowanie anteny:

Drut o długości z_0 , $q = q_0 \cos \omega t$

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad I_0 = q_0 \omega \quad D_0 = q_0 z_0 = I_0 \frac{z_0}{\omega}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{I_0^2 \omega^2 z_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} - \text{moc, którą trzeba doprowadzić do anteny}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) I_0^2$$

$$(\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2) \Rightarrow R - \text{opór falowy anteny}$$

$$R = \frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{z_0}{\lambda} \right)^2 \quad R = 787 \left(\frac{z_0}{\lambda} \right)^2 \Omega$$

Dla $z_0 = 30 \text{ m}$, $\nu = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$, $I_0 = 20 \text{ A}$

$$\omega = 3,14 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}, \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = 600 \text{ m} \quad \underline{\underline{\frac{dE}{dt} = R I_s^2 \cong 400 \text{ W}}}$$