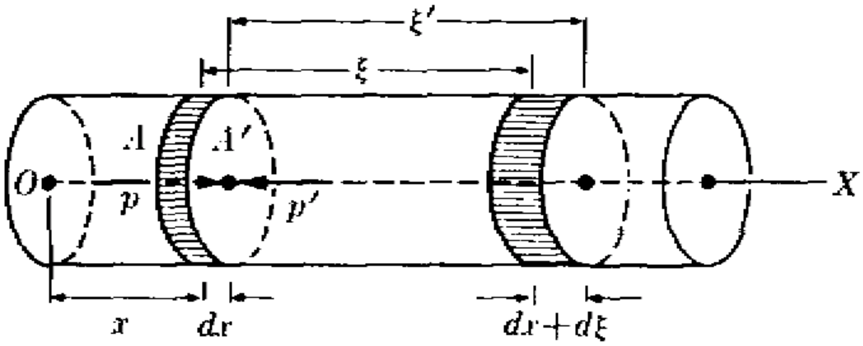
Fale sprężyste w gazie

- zmiany ciśnienia $\rightarrow$ zmiany gęstości (bo ściśliwe)



p_0, ρ_0 - ciśnienie i gęstość w równowadze.

$p_0, \rho_0 \neq f(x)$

W równowadze masa w $A - A'$: $\rho_0 A dx$

Po zaburzeniu p: $\rho A(dx + d\xi)$

Z zachowania masy (ściśliwość- $\rho_0 \rightarrow \rho$):

$$\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A dx$$

$$\Downarrow$$

$$\rho\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \rho_0$$

$$\Downarrow$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

Niech $\frac{\partial \xi}{\partial x} << 1$

$$\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1} \cong 1-\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\rho = \rho_0\left(1-\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

Z równania stanu: $p = f(\rho)$

Rozwijam p w pobliżu p_0:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right) + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2\left(\frac{d^2 p}{d\rho^2}\right)$$

Dla małych zmian gęstości:

$$p \approx p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)$$

$\kappa \equiv \rho_0\left(\frac{dp}{d\rho}\right)$ - moduł sprężystości objętościowej

$[\kappa]$=1Nm^{-2}

$$p = p_0 + \kappa\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)$$

- odpowiednik prawa Hooke'a dla płynów.

Było $\rho - \rho_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$

$$p = p_0 + \kappa \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{p = p_0 - \kappa \frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

- związek między ciśnieniem w dowolnym punkcie w gazie i deformacją w tym punkcie.

Równanie ruchu:

Masa elementu objętości: $\rho_0 A dx$

Przyspieszenie: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

Wypadkowa siła w kierunku x:

$(p - p')A = -A dp \qquad (dp = p' - p)$

$$\underline{-A dp = (\rho_0 A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

$$\underline{\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

– związek dwu pól: pola przemieszczeń i pola ciśnień.

Było $p = p_0 - \kappa \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$ równanie falowe

↑ fala przemieszczeń

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$ fala ciśnienia (skalarna)

Analogicznie:

$$\underline{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}}$$ fala gęstości

Jeśli adiabatycznie (bez przepływu ciepła z obszarów ściśniętych do rozrzedzonych:)

$$\left.\begin{aligned} &\underline{p = C\rho^\gamma} \\ &\frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1} \\ &\kappa = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 = \gamma C \rho_0^\gamma = \gamma p_0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}}$$ (γ~1.40)

$$pV = NRT, \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{NRT}{m} = \frac{RT}{M}$$ (M – masa molowa)

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \alpha\sqrt{T}$$

$$c \neq f(p); \qquad c \propto T^{1/2}$$

Dla dźwięku w powietrzu $(0°C)$: $331{,}45\ m/s$

$$\alpha = \sqrt{\gamma \frac{R}{M}} = 20{,}055$$

$$\underline{\upsilon = 20{,}055\sqrt{T}}\ m/s$$

<u>Ciśnienie akustyczne:</u>

$$\Psi_p \equiv p - p_0; \qquad p_0 \neq f(x,t)$$

$$\underline{\frac{\partial \Psi_p}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0}\frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial z^2}}$$

- fala ciśnienia akustycznego.

$$\Psi_p = -\kappa\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$ - wychylenie w przestrzeni

$$\Psi_p = \frac{\kappa}{c}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)$$ - wychylenie w czasie

Wzrost ciśnienia Ψ_p daje siła $\Psi_p \cdot a$

$\Rightarrow$ impedancja charakterystyczna:

$$F = a \cdot \Psi_p; \quad F = a \cdot c \cdot \rho \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$Z_0 = a \cdot c \cdot \rho$$

(charakteryzuje kolumnę o przekroju a)

Impedancja akustyczna (opór falowy):

$Z_s = \dfrac{Z_0}{a} = \dfrac{\gamma p}{c} = c \cdot \rho$ - charakteryzuje ośrodek.

Impedancja akustyczna właściwa powietrza

$Z_s \cong 400\ kg/m^2 s$, wody $1{,}4 \cdot 10^6\ kg/m^2 s$.

Dla fali o tej samej częstości i amplitudzie ciśnienie akustyczne w wodzie jest 3500 razy większe niż w powietrzu.

<u>Natężenie fali:</u>

$$P(z,t) = \pm \left(\frac{a^2}{Z_0} \right) \Psi_p^2 = \pm \left(\frac{a^2}{Z_A} \right) \Psi_p^2$$

Moc na jednostkę powierzchni:

$$\frac{P(z,t)}{a} = \pm \frac{\Psi_p^2}{Z_A} \qquad I(z,t) = \frac{\Psi_{p0}^2}{2Z_A}$$

Akustyczna fala stojąca:

Dla fali stojącej było ($z=0$ - zamocowanie):

$$\Psi = A\sin kz\cos(\omega t+\varphi)$$

Dla fali akustycznej:

$$\Psi_p = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$\Psi_p = -\left(\frac{kA}{\kappa}\right)\cos kz\cos(\omega t+\varphi) = -A_p\cos kz\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A_p \equiv \frac{kA}{\kappa}$$

Maksima Ψ_p przesunięte w stosunku do maksimów Ψ o $\pi/2$.

Zamknięty koniec piszczałki $\rightarrow$ węzeł wychylenia, strzałka ciśnienia.

Otwarty koniec piszczałki $\rightarrow$ węzeł ciśnienia (ciśnienie zewnętrzne stałe), strzałka wychylenia

Rozkład ciśnień jak dla struny, ale węzły ciśnienia przy otwartym końcu (trochę ponad), strzałki ciśnienia - przy zamkniętym.

Dla piszczałki obustronnie otwartej:

$$\nu = \frac{c}{2(L+d)} \quad d \sim r \text{ (promień piszczałki)}$$