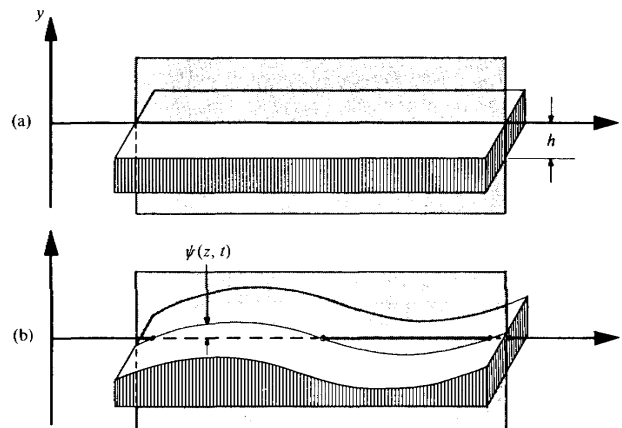


Fale wodne:

Model:

- długi kanał o prostokątnym przekroju i głębokości h ,
- ruch fali wzdłuż z , niezależny od x , wychylenia wzdłuż y ,



- woda nieściśliwa (w fali 1 m wzrost ρ o $\sim 0,05\%$),
- brak lepkości.

y, z - współrzędne cząstki w równowadze,

$\Psi_y(y, z, t)$, $\Psi_z(y, z, t)$ - wychylenie cząstki z położenia równowagi.

Chcemy poznać $\Psi_y(t)$, $\Psi_z(t)$ dla wszystkich y, z .

Założenia:

- Warunki stacjonarne $\Rightarrow \Psi_y, \Psi_z$ - funkcje harmoniczne o częstości ω .

- Faza Ψ_y, Ψ_z zależy od z , nie zależy od y .
- Przesunięcie fazowe Ψ_y względem Ψ_z równe $\pi/2 \Rightarrow \Psi_z$ ma maksymalną wartość dla Ψ_y równego zero – największe nachylenie powierzchni, największa zmiana położenia cząstek.
- Amplitudy nie zależą od z , mogą zależeć od y .

$$\begin{aligned} \Psi_y(y, z, t) &= A_y(y) \cos(\omega t - kz) \\ \Rightarrow \Psi_z(y, z, t) &= A_z(y) \sin(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (1)$$

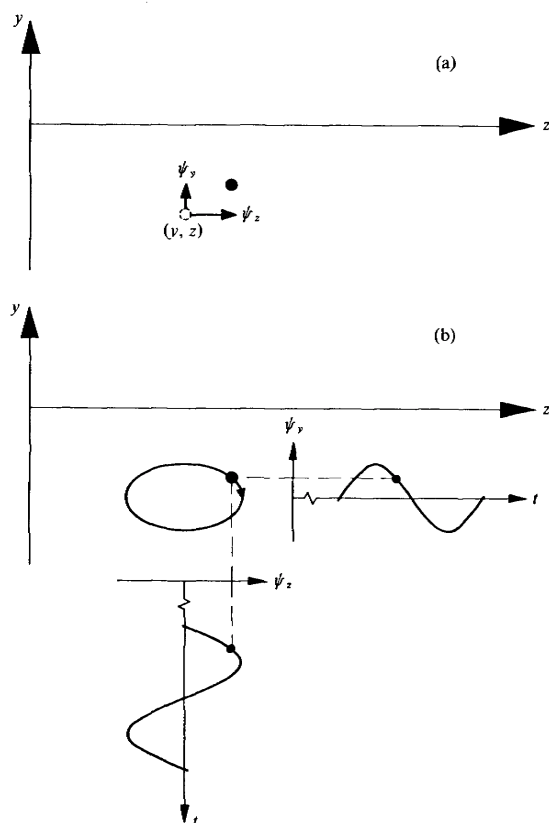
Dla dowolnych y, z, t :

$$(\Psi_y / A_y)^2 + (\Psi_z / A_z)^2 = 1$$

- równanie elipsy z osiami głównymi wzdłuż Ψ_y, Ψ_z .

Ich stosunek zależy od A_x, A_y .

"Drgania i fale" III rok Fizyki BC

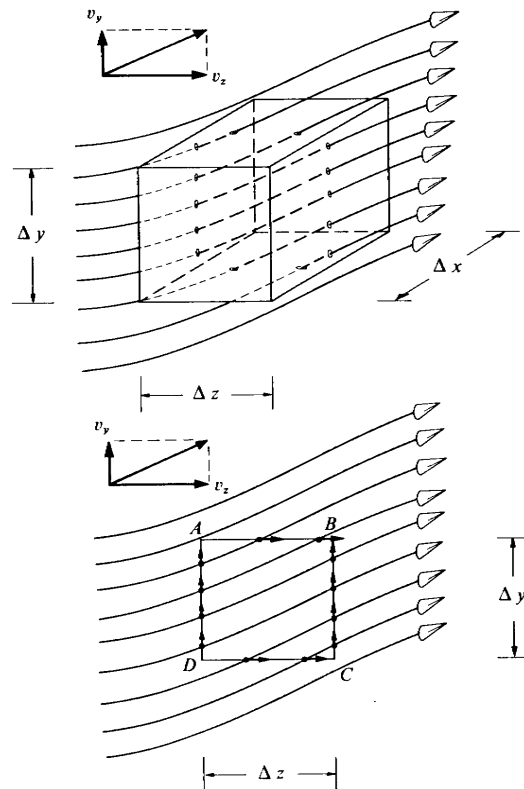


Dla małych wychyleń prędkość w punkcie y, z jest:

$$\begin{aligned} c_y(y, z, t) &\cong -\omega A_y(y) \sin(\omega t - kz) \\ c_z(y, z, t) &\cong -\omega A_z(y) \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (2)$$

Warunki:

"Drgania i fale" III rok Fizyki BC



(1) Brak ściśliwości – stała masa w zamkniętej objętości.

Masa wody przez ścianę w jednostce czasu $m = \rho \cdot S \cdot c$

Przez ściany boczne – nie ma przepływu.

Przez dolną i górną: $\Delta x \Delta z (\partial c_y / \partial y) \Delta y$.

Przez przednią i tylną: $\Delta x \Delta y (\partial c_z / \partial z) \Delta z$.

$$\frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

(2) brak lepkości.

Woda w spoczynku, wzbudzona fala – przy braku lepkości nie ma wirów.

Cyrkulacja równa zero.

Wzdłuż AB i CD : $\Delta z(\partial c_z / \partial y) \Delta y$

Wzdłuż BC i DA : $-\Delta y(\partial c_y / \partial z) \Delta z$

$$\frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Szukamy $A_y(y); A_z(y)$.

(2) $\rightarrow$ (3) i skracając przez $\omega \sin(\omega t - kz)$

$$\frac{dA_y}{dy} - kA_z(y) = 0 \quad (5)$$

(2) $\rightarrow$ (4)

$$\frac{dA_z}{dy} - kA_y(y) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dy} \rightarrow \frac{d^2 A_y}{dy^2} - k \left(\frac{dA_z}{dy} \right) = 0$$

$$(6) \rightarrow \frac{d^2 A_y}{dy^2} - k^2 A_y = 0$$

$$\Rightarrow A_y(y) = A' e^{ky} + B' e^{-ky} \quad (7)$$

A', B' - stałe dowolne.

Warunki brzegowe na powierzchni i na dnie:

Powierzchnia ($y = 0$), fala sinusoidalna:

$$\Psi_y(0, z, t) = \Psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$$

$$(7) \text{ do } (1) \Rightarrow A_y(0) = A' + B' = A \quad (8)$$

Dno ($y = -h$), nie ma ruchu pionowego:

$$A_y(-h) = A'e^{-kh} + B'e^{kh} = 0 \quad (9)$$

$$\text{Stąd: } A' = \frac{Ae^{kh}}{e^{kh} - e^{-kh}}$$

$$B' = \frac{Ae^{-kh}}{e^{kh} - e^{-kh}}$$

$$\text{z (7): } A_y(y) = \frac{A[e^{k(h+y)} - e^{-k(h+y)}]}{e^{kh} - e^{-kh}} \quad (10a)$$

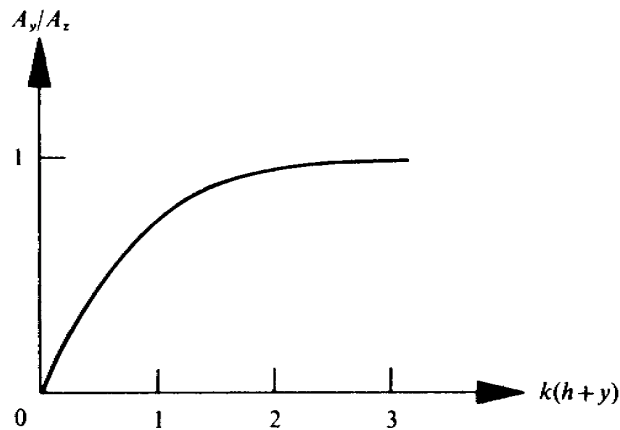
$$\text{czyli } A_y(y) = \frac{A \sinh[k(h+y)]}{\sinh kh} \quad (10b)$$

$$(10b) \rightarrow (5) \quad A_z(y) = \frac{A[e^{k(h+y)} + e^{-k(h+y)}]}{e^{kh} - e^{-kh}} \quad (11a)$$

$$A_z(y) = \frac{A \cosh[k(h+y)]}{\sinh kh} \quad (11b)$$

Stosunek osi elipsy ($A_y(y)/A_z(y)$):

$$r(y) = \tanh[k(h+y)]; \quad r \leq 1$$



- dłuższa oś pozioma - im głębiej, tym elipsa bardziej płaska, aż do prostej na dnie (zaniedbujemy tarcie o dno).
- pozioma oś też ulega skróceniu, ale wolniej niż pionowa.

W którą stronę obiegana jest elipsa?

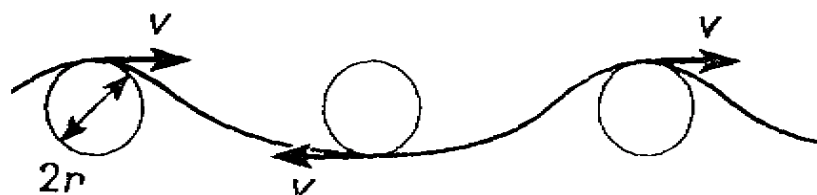
Niech $k > 0$, ruch fali na prawo.

Ψ_z opóźnia się o $\pi/2$ za Ψ_y

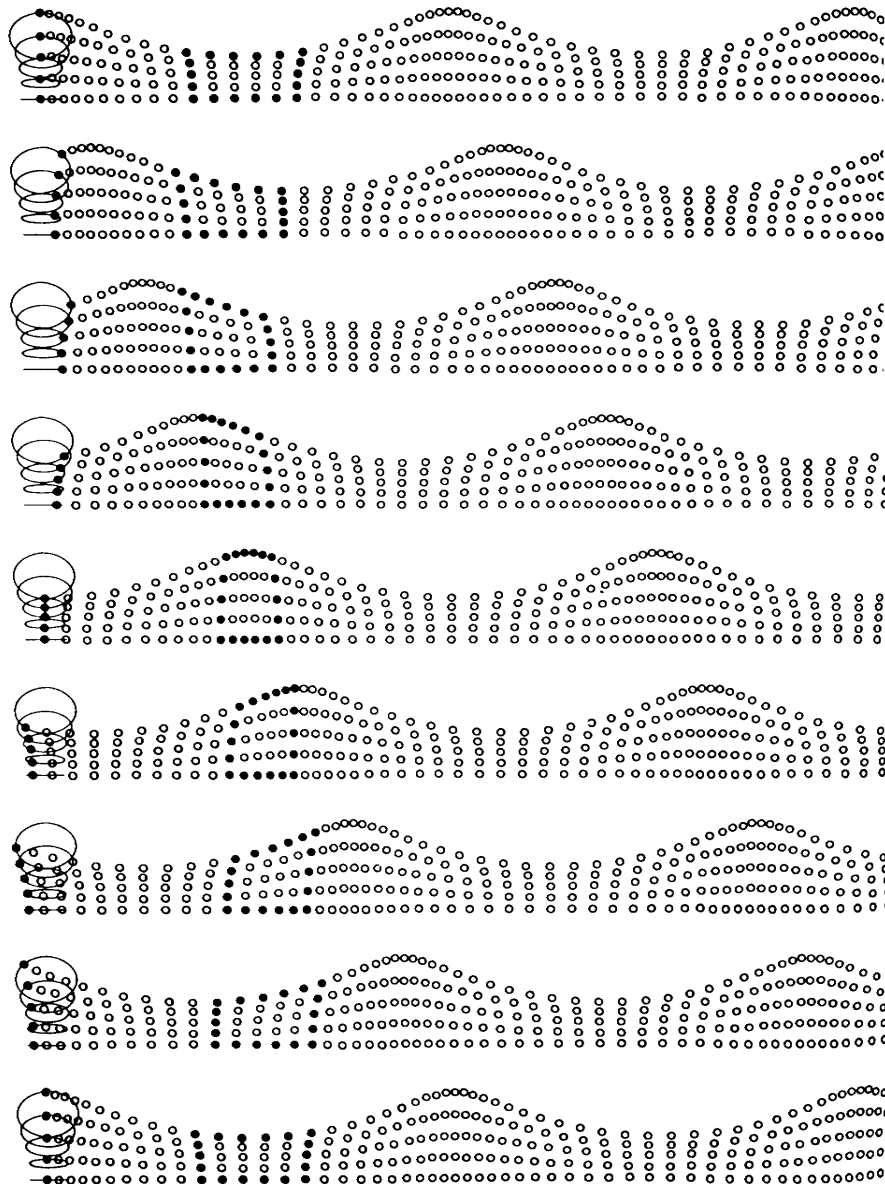
($A_y(y), A_z(y) > 0$, bo $h+y \geq 0$).

Ruch cząstki zgodny z ruchem wskazówek zegara dla fali biegnącej w prawo.

Cząstka na grzbiecie fali porusza się tylko do przodu, w dolinie – tylko do tyłu.

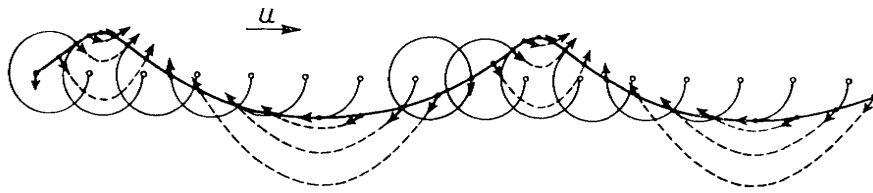


Dla $\lambda = 2\pi h$, tzn. $kh = 1$:



(1) każda cząstka porusza się po elipsie zgodnie z ruchem wskazówek zegara, (2) Woda nie ulega ścisnaniu – obszar ograniczony czarnymi kropkami ma stałą objętość (tu powierzchnię). (3) W wodzie nie ma cyrkulacji – odkształcenie dowolnej „próbki” wody nigdy nie daje rotacji cząstek na obwodzie.

Obraz przybliżony – prawdziwe fale nie są sinusoidalne



Fala na głębokiej wodzie:

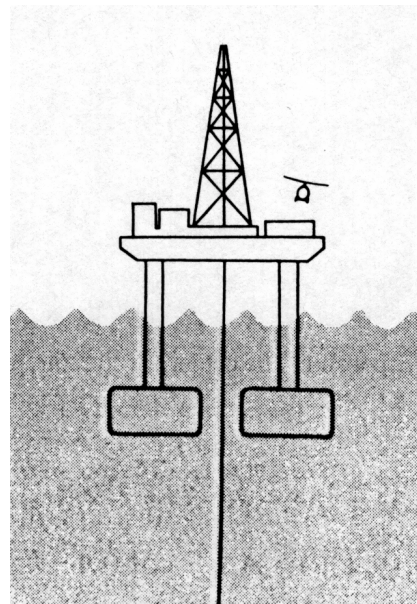
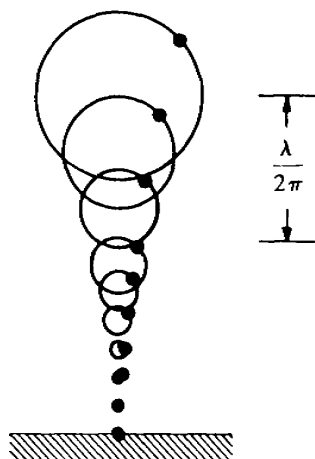
Niech $kh \gg 1$ i $|y| \ll h$ (blisko powierzchni)

$$\sin kh \cong \frac{1}{2} e^{kh}; \quad \sinh[k(h+y)] \cong \cosh[k(h+y)] \approx \frac{1}{2} e^{k(h+y)}$$

$$\Rightarrow \Psi_y(y, z, t) \approx A e^{ky} \cos(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \Psi_z(y, z, t) \approx A e^{ky} \sin(\omega t - kz)$$

- orbity są okręgami, ich promień maleje wykładniczo z głębokością



Na głębokości większej niż $\frac{1}{|k|}$ ruch zanika.

Fala na płytkiej wodzie:

Zakładamy $kh \ll 1 \Rightarrow \sinh kh \cong kh; \cosh[k(h+y)] \cong 1;$

$$\sinh[k(h+y)] \cong k(h+y)$$

$$\Psi_y(y, z, t) \approx A \left(1 + \frac{y}{h}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$\Psi_z(y, z, t) \approx A \left(\frac{1}{kh}\right) \sin(\omega t - kz)$$

Amplituda pozioma praktycznie nie zależy od głębokości i jest bardzo duża. - fala głównie podłużna.

Amplituda pionowa maleje prawie liniowo z głębokością (do zera na dnie).

Woda przelewa się tam i z powrotem.

Ruch opisuje równanie:

$$\begin{aligned} \Psi_z(z, t) &\approx (\omega A/kh) \sin(\omega t - kz) = \\ &= (\omega/kh) \Psi_y(0, z, t) = (\omega/kh) \Psi(z, t) \end{aligned}$$

Dyspersja:

Szukamy związku dyspersyjnego.

Zwykle z równania ruchu, odpowiednik – prawo Bernoulliego.

Stosuje się do warunków stacjonarnych, tzn. prędkość płynu w każdym punkcie nie zależy od czasu.

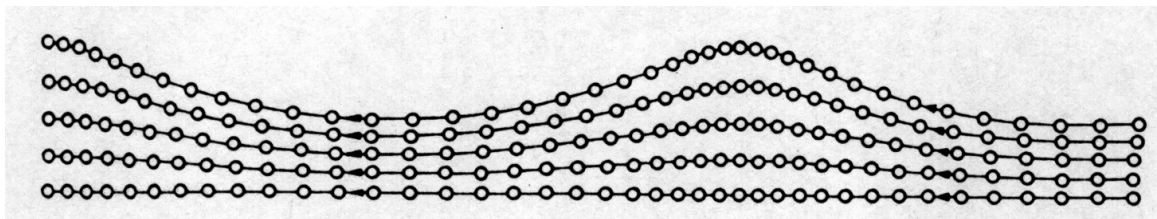
Przejdźmy do układu odniesienia poruszającego się z falą, tzn. z prędkością ω/k .

Nowa współrzędna $z' = z - \frac{\omega t}{k}$

$$c_y(y, z') = \omega A_y(y) \sin kz'$$

$$c_z(y, z') = \omega A_z(y) \cos kz' - \omega/k$$

Nie ma zależności od czasu.



Całkowita energia na jednostkę masy (z prawa Bernouliego):

$$W = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} c^2 + V$$

p - ciśnienie, c - prędkość płynu, V - energia potencjalna na jednostkę masy.

Wzdłuż linii prądu energia stała.

1. Dla linii wzdłuż powierzchni dwie składowe ciśnienia – ciśnienie atmosferyczne p_a i ciśnienie od napięcia powierzchniowego, zależne od krzywizny $\left(\partial^2 \Psi / \partial z^2 \right)^{-1}$.

$$\Rightarrow p = p_a - \sigma \frac{d^2 \psi}{dz^2} \quad (15)$$

σ - napięcie powierzchniowe (0.073 N/m dla granicy woda/powietrze przy 20°C), minus, bo dodatnie $\partial^2 \Psi / \partial z^2$ oznacza wklęsłą powierzchnię, czyli zmniejszenie ciśnienia.

Dla fali sinusoidalnej w poruszającym się układzie odniesienia:

$$\Psi = A \cos kz' \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -k^2 A \cos kz'$$

$$p = p_a + \sigma k^2 A \cos kz' \quad (16)$$

2. Energia kinetyczna:

$$c^2 = c_y^2(0, z') + c_z^2(0, z') =$$

$$= \omega^2 A^2 (\sin^2 kz' + \coth^2(kh) \cos^2(kz')) + (\omega/k)^2 + \quad (17)$$

$$- 2\omega^2 (A/k) \coth(kh) \cos(kz')$$

3. Energia potencjalna:

$$V = g\Psi = gA \cos(kz') \quad \text{tylko od grawitacji} \quad (18).$$

Dla małych amplitud ($kA \ll 1$):

$$W = \frac{p_a}{\rho} + \frac{\sigma k^2}{\rho} A \cos(kz') + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 +$$

$$- \frac{\omega^2}{k} \coth(kh) A \cos(kz') + gA \cos(kz')$$

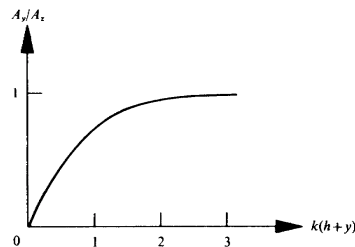
$W \neq f(z) \Rightarrow$ znikanie współczynników przy $\cos kz' \Rightarrow$

$$\frac{\sigma k^2}{\rho} - \frac{\omega^2}{k} \coth(kh) + g = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \tanh(kh)$$

- związek dyspersyjny dla fal na wodzie.

$\omega^2 = f(h)$ poprzez $\tanh(kh)$



Dla głębokiej wody:

$$kh \gg 1 \Rightarrow \tanh(kh) \cong 1$$

- nie ma h w zależności dyspersyjnej.

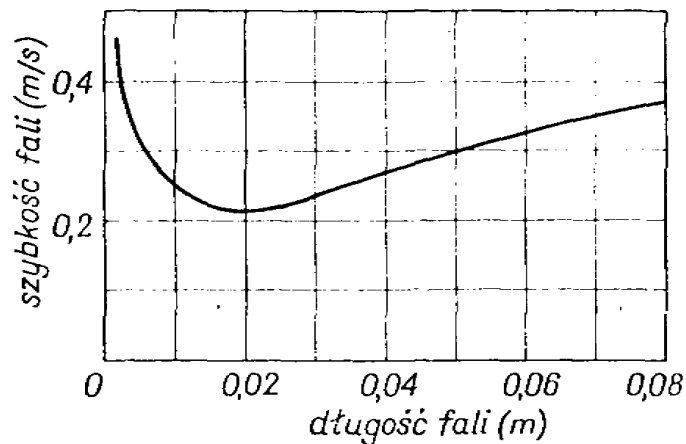
$$\tanh kh = kh - \frac{1}{2}(kh)^3 + \frac{2}{15}(kh)^5 - \dots \quad \text{dla } kh < \pi/2.$$

Dla płytkiej wody:

$$kh \ll 1 \Rightarrow \tanh(kh) \cong kh - \frac{1}{2}(kh)^3$$

W zależności dyspersyjnej dwa człony:

- zależny od g (opadanie wody) i zależny od σ („prostowanie” powierzchni).



Fale kapilarne („zmarszczki na wodzie”):

Równość wkładów do zależności dyspersyjnej

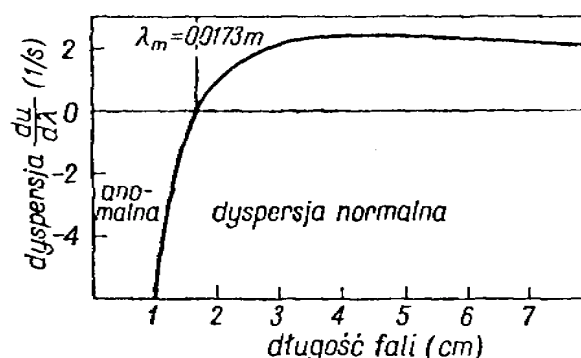
($k^2 = \rho g / \sigma$) daje długość fali:

$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2} \quad (\text{dla wody w } 20^\circ\text{C } \lambda_0 = 17 \text{ mm}).$$

Dla fal dużo krótszych (powierzchnia mocniej pozakrzywiana) decydujące napięcie powierzchniowe.

Zaniedbując człon grawitacyjny i zakładając $kh \gg 1$ (nie spełnione dla bardzo płytkich naczyń)

$$\omega = \left(\frac{\sigma k^3}{\rho} \right)^{1/2} \Rightarrow k^{3/2} \text{ nadliniowe – dyspersja anomalna.}$$



Prędkość fazowa fal kapilarnych:

$$c_f = \frac{\omega}{k} \cong \left(\frac{\sigma k}{\rho} \right)^{1/2} \qquad c_f = \left(\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \right)^{1/2}$$

- najkrótsze fale poruszają się najszybciej.

(Fala o długości $\lambda = 1\text{ mm}$ w wodzie (20°C) ma prędkość 0.68 m/s).

Prędkość grupowa: $c_g = \frac{d\omega}{dk} \cong \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma k}{\rho} \right)^{1/2} \qquad c_g = \frac{3}{2} c_f$

- w obrębie paczki widzimy „zmarszczki” poruszające się do tyłu.

Wodne fale grawitacyjne:

Dla $\lambda \gg 17\text{ mm} \Rightarrow$ można zaniedbać wpływ napięcia powierzchniowego.

$kh \gg 1$ - głęboka woda:

$\Rightarrow \omega \cong (gk)^{1/2}$ - dyspersja normalna

(dla $h > \frac{\lambda}{4}$ - dokładność 10%).

$$c_f \cong \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} = \frac{g}{\omega} \qquad (\text{dokładność} \sim 5\%)$$

$$c_g \cong \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \cong \frac{1}{2} c_f$$

Wzburzenie morza:

Fale o wysokości 10 m i okresie 11 s powstają, jeśli wiatr o prędkości 45 węzłów wieje przez 20 godzin na odcinku 250 km .

(1 węzeł = 1 mila morska/ h)

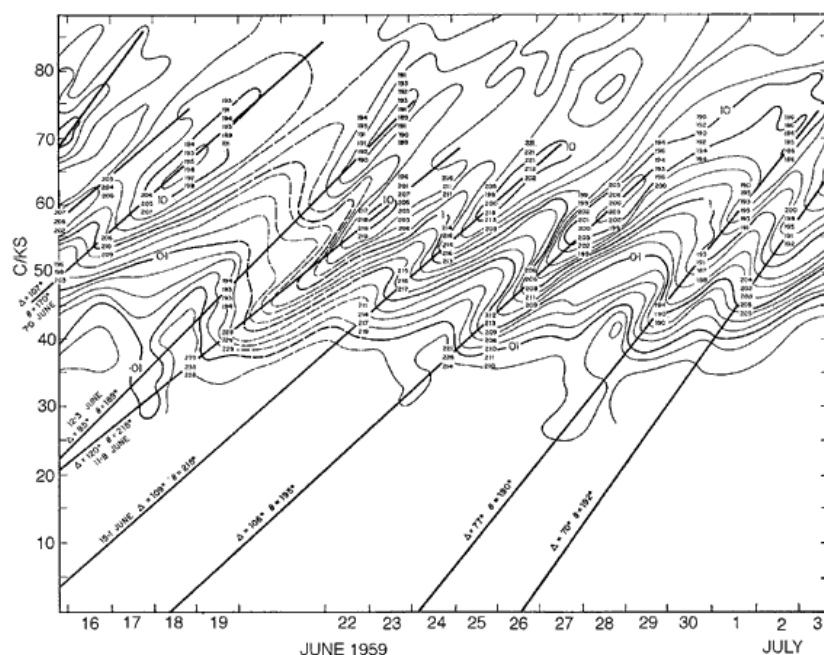
Jeśli fale wywołane daleko – pierwsze dotrą do brzegu najdłuższe. Częstość (np. grzbiety fal):

$$v = \frac{c_f}{\lambda} \Rightarrow v^2 = \frac{g}{2\pi\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{g}{2\pi v^2}$$

$$t - t_0 = \frac{L}{v\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{L}{v(t - t_0)}$$

$$\frac{g}{2\pi v^2} = \frac{L}{v(t - t_0)} \Rightarrow \underline{v = \frac{g}{2\pi L}(t - t_0)}$$

- nachylenie daje L .



$kh \ll 1$ - płytka woda:

$$\omega^2 \cong ghk^2 \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k^2 \right)$$

$$h^2 k^2 \text{ małe} \Rightarrow \omega \cong ck - dk^3 \quad \underline{c \equiv (gh)^{1/2}}$$

$$d = (1/6)ch^2 \quad (d > 0 - \text{dyspersja normalna})$$

Jeśli zaniedbać dyspersję:

$$\omega^2 \cong ghk^2 \quad - \text{dla } h < \lambda/11 \text{ dokładność } 10\%$$

$$\underline{c_f = c_g = c = (gh)^{1/2}} \quad - \text{dokładność } 5\%.$$

Było dla płytkej wody: $\dot{\Psi}_z(z, t) \cong \left(\frac{\omega}{kh} \right) \Psi(z, t)$

$\dot{\Psi}_z(z, t)$ - prędkość podłużna oraz $\Psi(z, t)$ - rozkład wychyleń na powierzchni są w fazie.

Bez dyspersji: $\dot{\Psi}_z = \left(\frac{c}{h} \right) \Psi \cong \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2} \Psi$

prawdziwe dla wszystkich częstotliwości.

Tsunami (trzęsienia Ziemi, wulkany, meteoryty itp.):

Okres 10 min – 2 h (zwykłe fale 5–20 s)

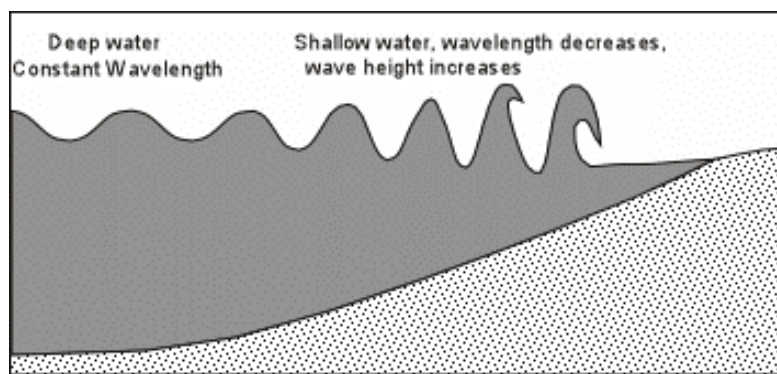
λ - nawet do 500 km (zwykłe fale na oceanie ~ 100 m)

Można rozpatrywać jako fale na płytkiej wodzie nawet na otwartym oceanie $\Rightarrow$ bardzo mała dyspersja

$\Rightarrow$ prędkość $c = \sqrt{gh}$ (dla $h=6100\text{ m} \rightarrow c \cong 900\text{ km/h}$).

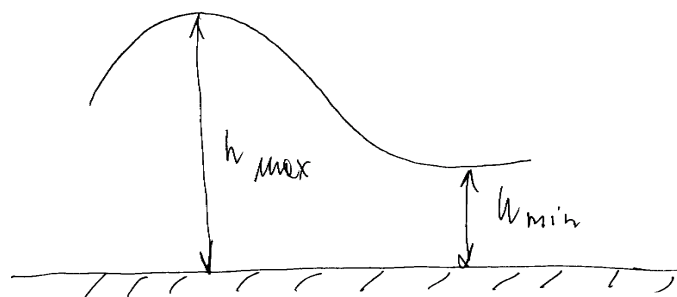
Małe straty energii ($\sim 1/\lambda$).

Przy brzegu – prędkość opada, energia prawie stała $\Rightarrow$ rośnie amplituda (jak $h^{-1/4}$).



Wysokość $\sim 30\text{ m}$ (Alaska 1958 - 60 m)

Łamanie się fal (uproszczenie):



$$\dot{\Psi}_z = \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2} \Psi$$

$\Rightarrow$ góra fali porusza się szybciej niż dół (prawdziwe nie tylko przy brzegu, brzeg wzmacnia efekt).

"Drgania i fale" III rok Fizyki BC

