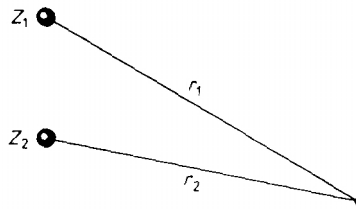


## Interferencja.

Dwa źródła punktowe:



$$U_1(\vec{r}, t) = A(\vec{r}_1) \cos(k\vec{r}_1 - \omega t)$$

$$U_2(\vec{r}, t) = A(\vec{r}_2) \cos(k\vec{r}_2 - \omega t)$$

$$\text{Dla } 3D: A(\vec{r}) = \frac{A}{r}$$

$$\text{Dla } 2D: A(\vec{r}) = \frac{A}{\sqrt{r}}$$

$$\text{Dla dużych } r_1, r_2: A(\vec{r}_1) \approx A(\vec{r}_2) \cong A\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = A(r_{sr.})$$

$$r_1, r_2 \sim 10d \Rightarrow \text{błąd: } 3D-10\%$$

$$2D-5\%$$

$$\tilde{U}_1(\vec{r}, t) \cong A(\vec{r}_{sr}) e^{i(k\vec{r}_1 - \omega t)}$$

$$\tilde{U}_2(\vec{r}, t) \cong A(\vec{r}_{sr}) e^{i(k\vec{r}_2 - \omega t)}$$

W wyniku interferencji:

$$\bar{U}(\vec{r}, t) = \tilde{U}_1(\vec{r}, t) + \tilde{U}_2(\vec{r}, t)$$

$$\bar{U}(\vec{r}, t) \cong A(\vec{r}_{sr}) e^{-i\omega t} (e^{ik\vec{r}_1} + e^{ik\vec{r}_2})$$

$$r_1 = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2} = r_{sr} + \frac{r_1 - r_2}{2}$$

$$r_2 = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{r_1 - r_2}{2} = r_{sr} - \frac{r_1 - r_2}{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{r}, t) &\cong A(\bar{r}_{sr}) e^{i(kr_{sr} - \omega t)} \left( e^{ik \frac{r_1 - r_2}{2}} + e^{-ik \frac{r_1 - r_2}{2}} \right) = \\ &= 2A(r_{sr}) e^{i(kr_{sr} - \omega t)} \cos k \frac{r_1 - r_2}{2} \end{aligned}$$

$$U(\bar{r}, t) \cong 2A(r_{sr}) \cos(kr_{sr} - \omega t) * \cos k \left( \frac{r_1 - r_2}{2} \right)$$


  
Fala kulista (kołowa)  
wybiegająca ze środka  
między źródłami


  
Przestrzenna  
modulacja

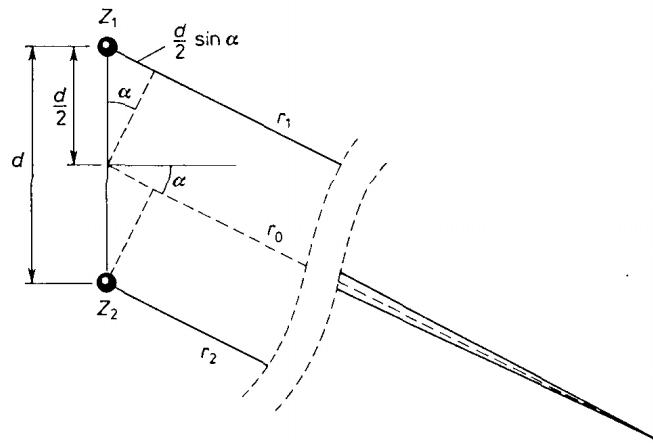
Maksima dla:

$$\begin{aligned} \cos k \frac{r_1 - r_2}{2} = \pm 1 \quad k \frac{r_1 - r_2}{2} = n\pi \quad \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} = n\pi \\ \underline{r_1 - r_2 = n\lambda.} \end{aligned}$$

Wygaszanie dla:

$$\begin{aligned} \cos k \frac{r_1 - r_2}{2} = 0 \quad k \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{2n+1}{2} \pi \\ \underline{r_1 - r_2 = \frac{2n+1}{2} \lambda.} \end{aligned}$$

Dla  $r_1, r_2$  dużych:



$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_0 + \frac{d}{2} \sin \alpha \\ r_2 &= r_0 - \frac{d}{2} \sin \alpha \end{aligned} \right\} r_1 - r_2 = d \sin \alpha$$

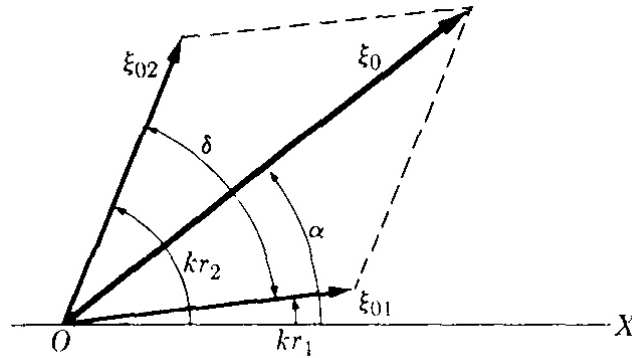
Maksima:  $\underline{d \sin \alpha = n \lambda}$

Minima:  $\underline{d \sin \alpha = \frac{2n+1}{2} \lambda}$

Dla  $\alpha = 0$ ,  $r_1 - r_2 = 0$ , -zerowe maksimum

Pierwsze minimum:  $d \sin \alpha = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\lambda}{2d}$

$\Rightarrow$  dla  $d < \frac{\lambda}{2}$  - nie ma minimum, nie ma interferencji



$$A_1 = A_{01} \sin(\omega t - kr_1)$$

$$A_2 = A_{02} \sin(\omega t - kr_2)$$

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = A_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$A_0 = \sqrt{A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02}\cos\delta}$$

$$A_{01} - A_{02} \leq A \leq A_{01} + A_{02}$$

$$\begin{cases} \delta = 2n\pi & \text{- konstruktywna} \\ \delta = (2n+1)\pi & \text{- destruktywna} \end{cases}$$

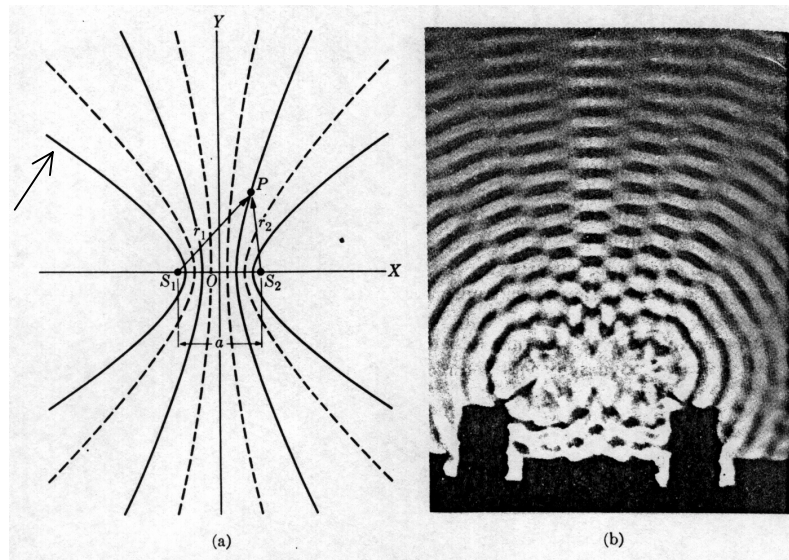
$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) &= 2n\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) &= (2n+1)\pi \end{aligned} \right\}$$

$$r_1 - r_2 = n\lambda; \quad r_1 - r_2 = (2n+1)\lambda$$

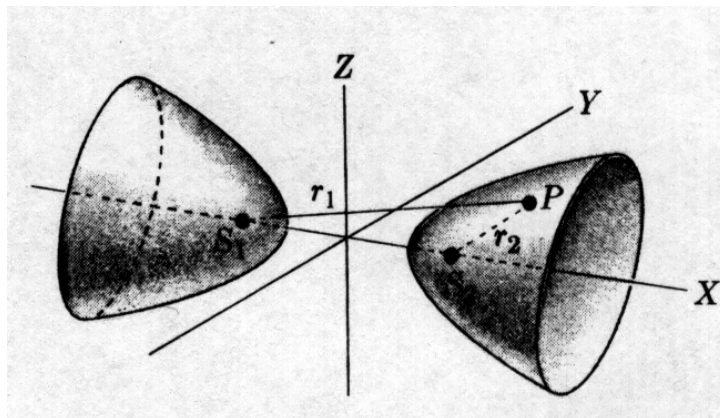


Dla 2D: hiperbole  $r_1 - r_2 = \pm\lambda, \pm 2\lambda \dots$

Linie strzałek



Dla 3D – hiperboloidy



Natężenie:

$$A_0^2 = A_{01}^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02}\cos\delta$$

$$\underline{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta}$$

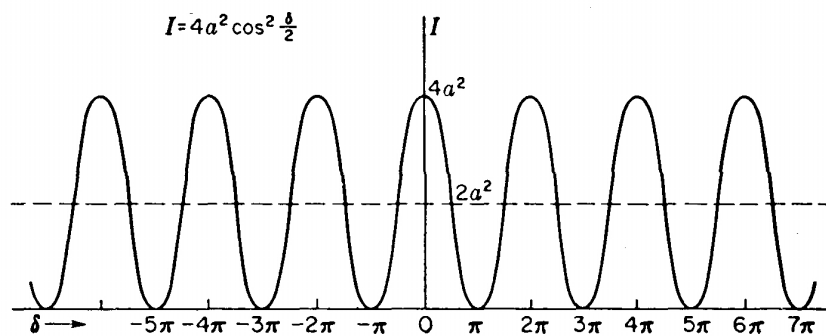
$$I = \langle A^2 \rangle \Rightarrow \text{dla } \langle \cos\delta \rangle = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

Gdy  $\delta$  stała w czasie  $\Rightarrow$  fale spójne  $\Rightarrow$  interferencja.

Niech  $A_{01} \cong A_{02}$

$$I = 2I_0[1 + \cos k(r_2 - r_1)] \quad \delta \equiv k(r_2 - r_1); \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\underline{I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}}$$



Dwa źródła  $\rightarrow$  energia  $2A_0^2$ , tu oscyluje między 0 i  $4A_0^2$ .

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2A_0^2 (1 + \cos \delta) d\delta = \\ &= \frac{A_0^2}{\pi} [\delta + \sin \delta]_0^{2\pi} = \frac{A_0^2 \cdot 2\pi}{\pi} = 2A_0^2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$  redystrybucja energii

Niech  $d \ll \lambda$  ( $kd \ll 1$ ), źródła w fazie.

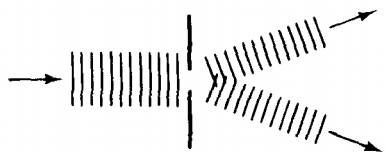
$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{kd \sin \alpha}{2} \approx 4I_0$$

- dwa źródła można zastąpić jednym o amplitudzie  $2A_0$ .
- Nie ma redystrybucji, jest wzrost mocy promieniowanej
- efekt zmiany impedancji.

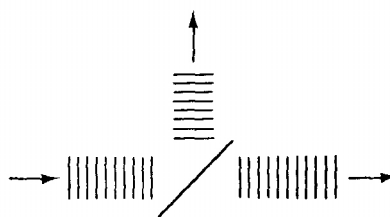
### Interferencja światła:

Warunki obserwacji: światło choćby częściowo spójne, porównywalne amplitudy.

Podział frontu fali

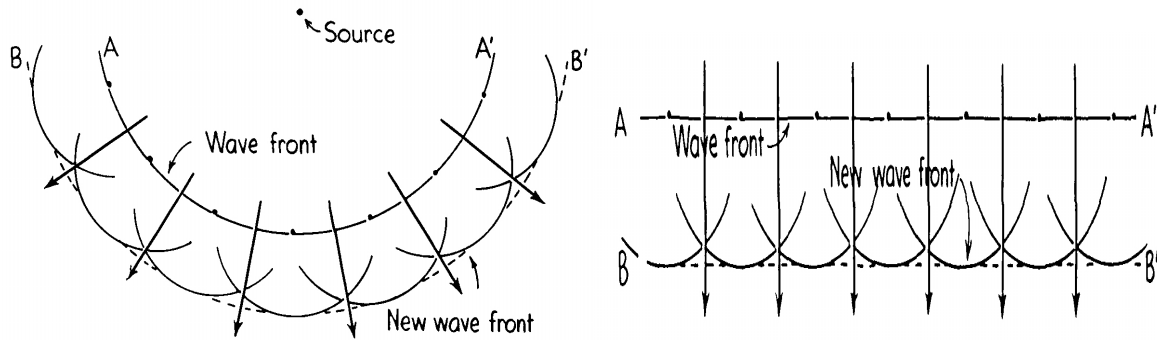


Podział amplitudy

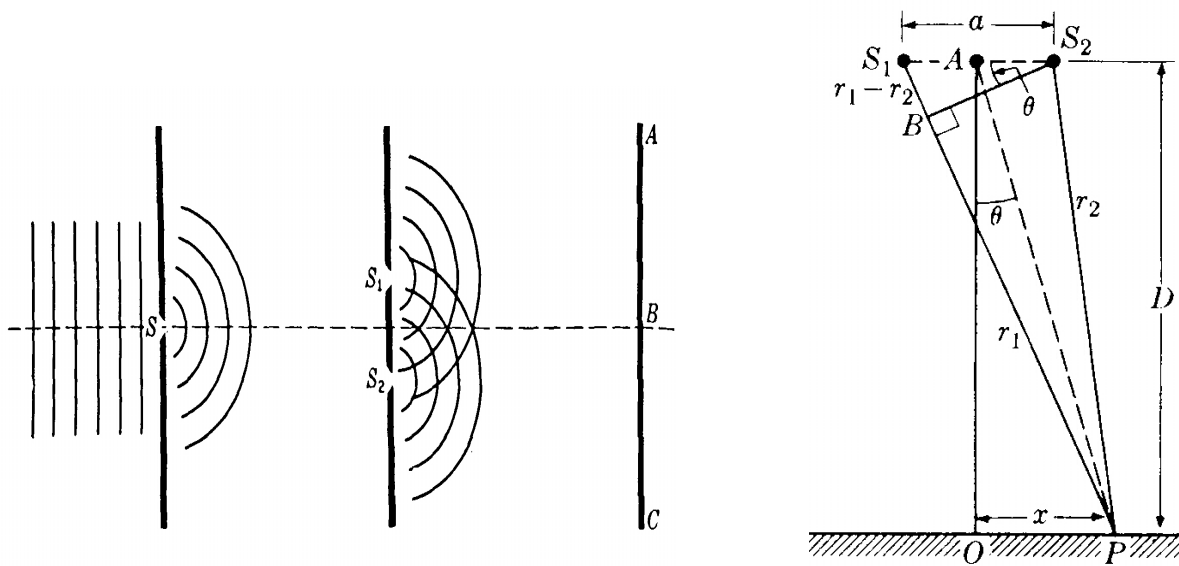


|                           |                              |
|---------------------------|------------------------------|
| Podwójna szczelina Younga | Interferometr Michelsona     |
| Bipryzmat Fresnela        | Interferometr Jamina         |
| Zwierciadła Fresnela      | Interferometr Fabry-Perot    |
| Zwierciadło Lloyd'a       | Interferometr Macha-Zehndera |
| Soczewka Billeta          |                              |

### Zasada Huygensa-Fresnela:



### Doświadczenie Younga ( $a \gg \lambda$ , $a \ll D$ ):



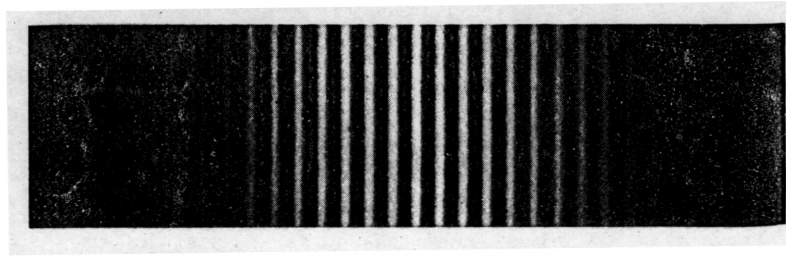
Dla małych  $\theta \rightarrow \sin \theta \cong \theta \cong \tan \theta = \frac{x}{D}$

$$r_1 - r_2 = a \sin \theta = \frac{a x}{D} \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a x}{D} \right)$$

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right) = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi a x}{D \lambda} \right); \quad I_0 = I(\theta = 0)$$

Maksima:  $\pi a \sin \theta / \lambda = n\pi \Rightarrow a \sin \theta = n\lambda$

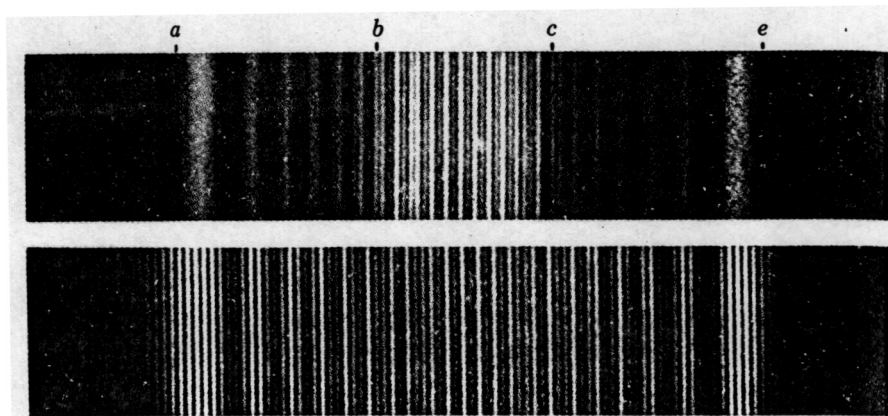
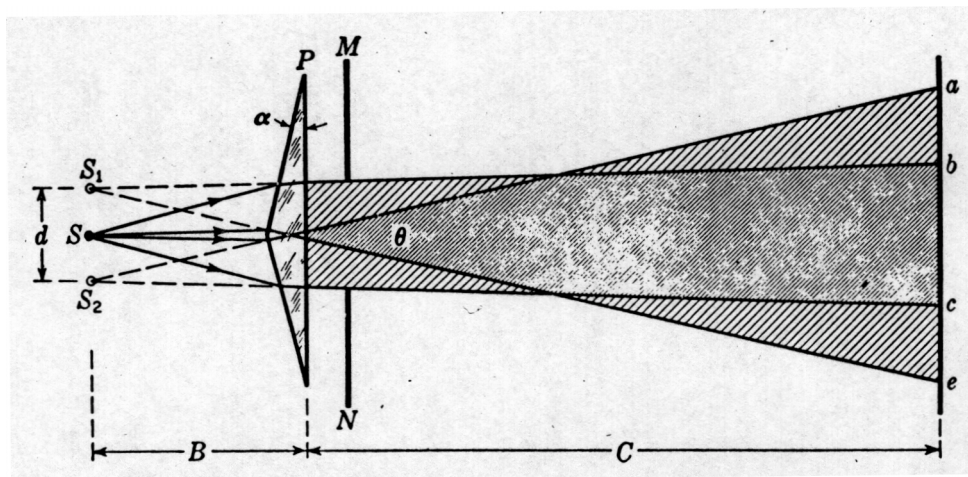
$$\pi a x / D \lambda = n\pi \Rightarrow x = (nD/a)\lambda$$



Odległość maksimów:

$$\Delta x = \left( \frac{D}{a} \right) \lambda \Rightarrow \text{pomiar } \lambda$$

Bipryzmat Fresnela:

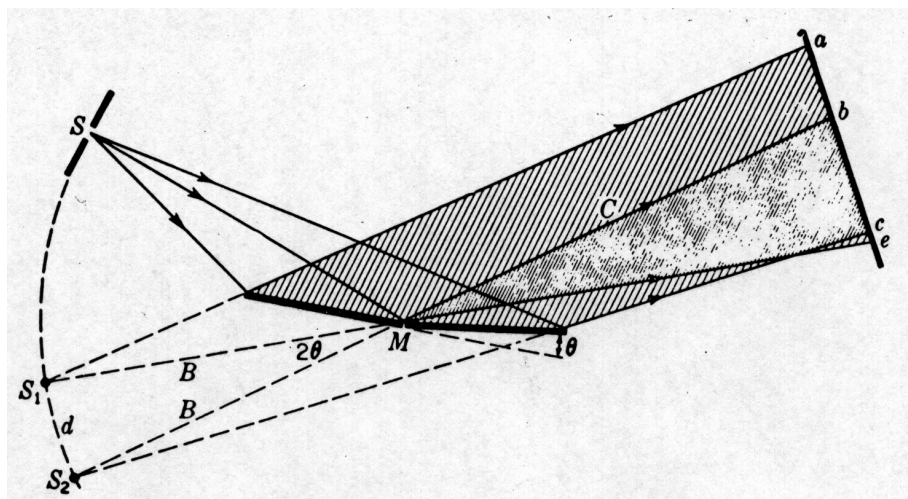


$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{B + C}$$

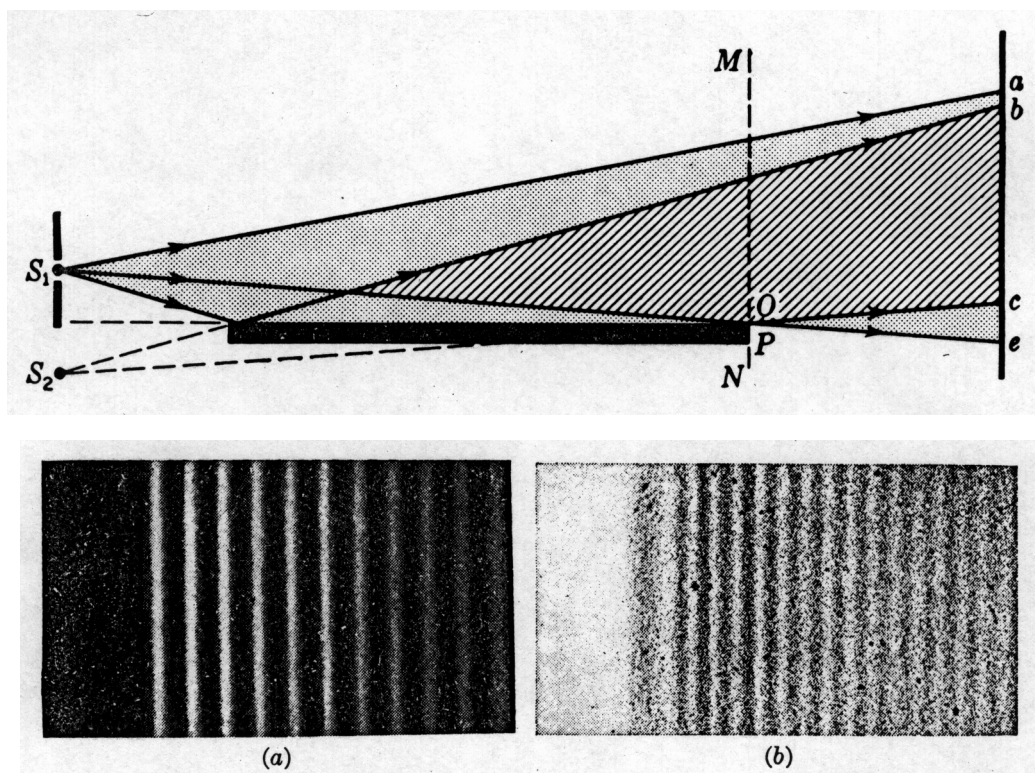
$\Delta x$  – odległość między prążkami

Zwierciadła Fresnela:





### Zwierciadło Lloyd'a:



(a) Światło widzialne (435.8 nm)

(b) Promieniowanie rentgenowskie (0.833 nm)

Na ekranie  $M - N$  w punkcie  $O$  widać czarny prążek tzn. między promieniem padającym i odbitym od ośrodka optycznie gęstszego występuje różnica faz  $\pi$ .

W interferencji o położeniu prążków decyduje:

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(r_1 - r_2)$$


 bo była próżnia  $\Rightarrow c$

Jeśli ośrodek, w którym prędkość fazowa fali jest  $v$ , to charakteryzujemy go współczynnikiem załamania

$$\underline{n = c/v}$$

Dla fali o częstotliwości  $\nu$ :

$$\lambda_0 = c/\nu; \lambda = v/\nu \Rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{v} \cdot \lambda$$

$$\underline{\lambda = \lambda_0/n}$$

Jeśli fale biegną przez dwa ośrodki, o współczynnikach załamania  $n_1$  i  $n_2$ :

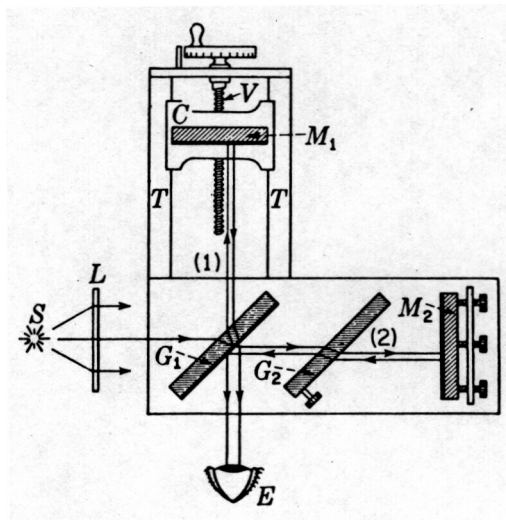
$$\underline{\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_1 r_1 - n_2 r_2)}$$

Droga optyczna:

$$\boxed{\Delta = n \cdot r}$$

Taką drogę przebiega fala w próżni, w czasie, w którym fala w ośrodku przebiega drogę  $r$ .

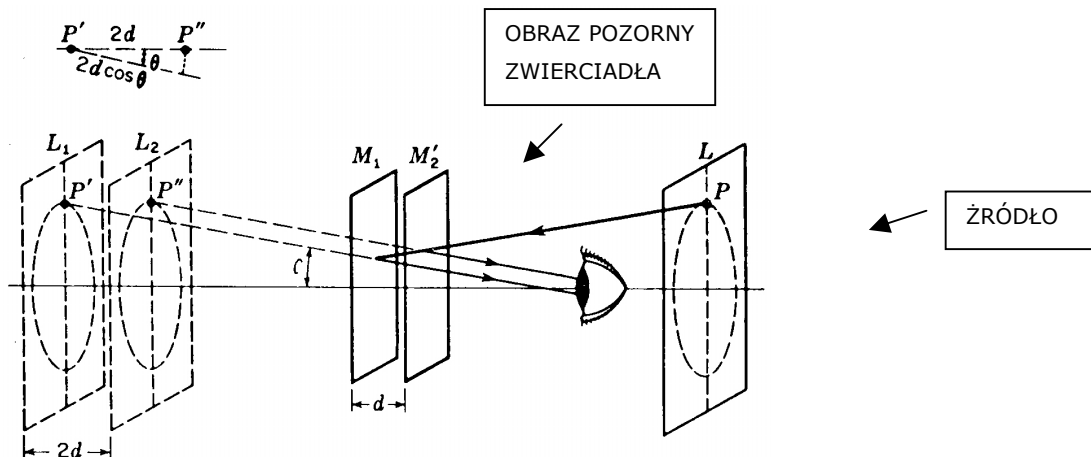
Interferometr Michelsona:



$M_1, M_2$  - zwierciadła

$G_1$  - płytką półprzepuszczalną

$G_2$  - płytką kompensującą



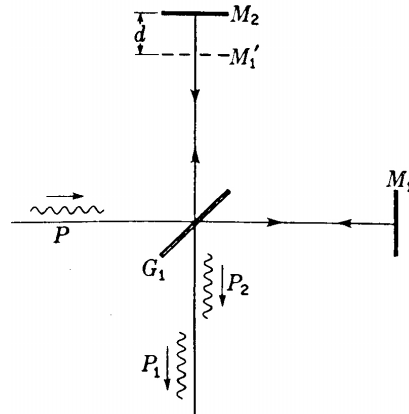
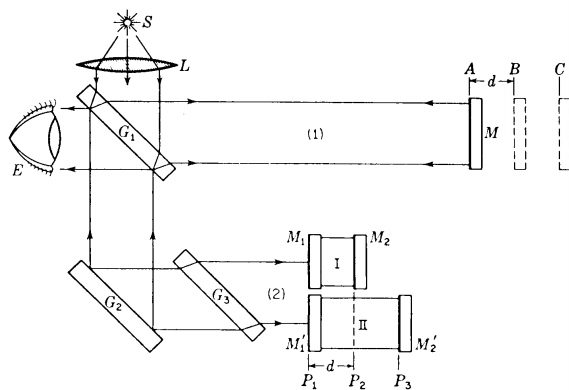
$$2d \cos \theta = m\lambda \Rightarrow \text{maksima dla } \theta = 0 \rightarrow \boxed{2d = m\lambda}$$

Pomiary:

- szerokości i struktury subtelnej linii widmowych
- długości lub przemieszczenia mierzonego w długościach fali
- współczynnika załamania

Pomiar długości:



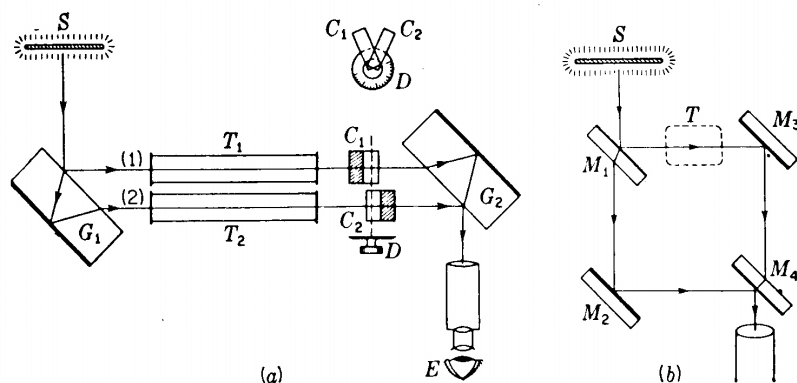


$$\begin{aligned} 2d_1 &= m_1 \lambda \\ 2d_2 &= m_2 \lambda \end{aligned} \Rightarrow d_1 - d_2 = (m_1 - m_2) \frac{\lambda}{2} \pm 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$$

$$\lambda_0 = 605.780211 \text{ nm (pomarańczowa linia kryptonu)}$$

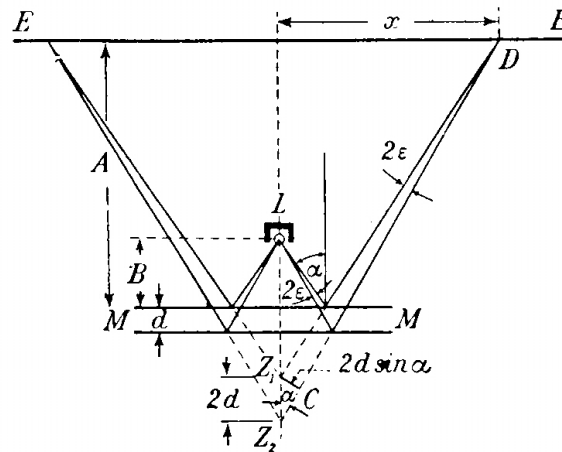
$$\underline{1\text{m} = 1650763.73 \lambda_0}$$

Pomiar współczynnika załamania:

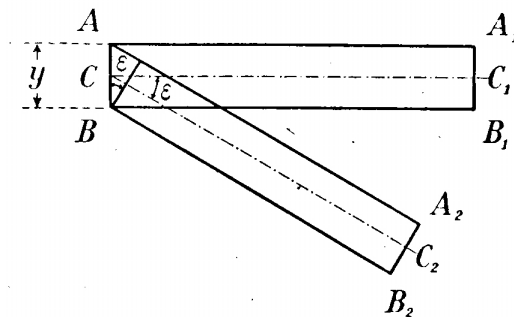


(a) The Jamin and (b) the Mach-Zehnder interferometer.

Doświadczenie Pohla:



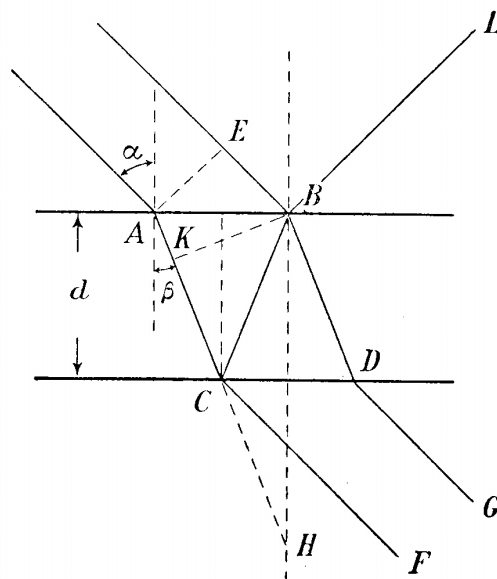
Uwaga: Rozciągnięte źródło światła.



$\delta = y \sin \varepsilon \Rightarrow$  warunek interferencji:  $y \sin \varepsilon \ll \lambda/2$

$\varepsilon \approx \sin \varepsilon \approx d \sin 2\alpha/2A \quad (\approx 10^{-6} \Rightarrow \text{źródło } \sim \text{cm})$

Interferencja światła w warstwach:



Światło przechodzące:

$$\delta = (AC + CB)n - EB$$

$$CB = CH \Rightarrow AC + CB = AC + CH = AH$$

$nAK = EB$  - równe drogi optyczne (przebyte w tym samym czasie)

$$\delta = nAH - nAK = nHK \quad nHK = 2nd \cos \beta$$

$$\underline{\delta = 2nd \cos \beta}$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta \Rightarrow \underline{\delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Przy odbiciu od granicy szkło-powietrze – bez zmiany fazy.

$$\text{Maksima: } 2nd \cos \beta = m\lambda \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\text{Minima: } 2nd \cos \beta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, \dots$$

Światło odbite:

$$(AC + CB)n - EB = 2nd \cos \beta$$

Przy odbiciu od granicy powietrze/szkło - zmiana fazy o  $\lambda/2$  - interferencja konstruktywna na destruktywną.

$$\text{Maksima: } 2nd \cos \beta - \lambda/2 = m\lambda$$

$$2nd \cos \beta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

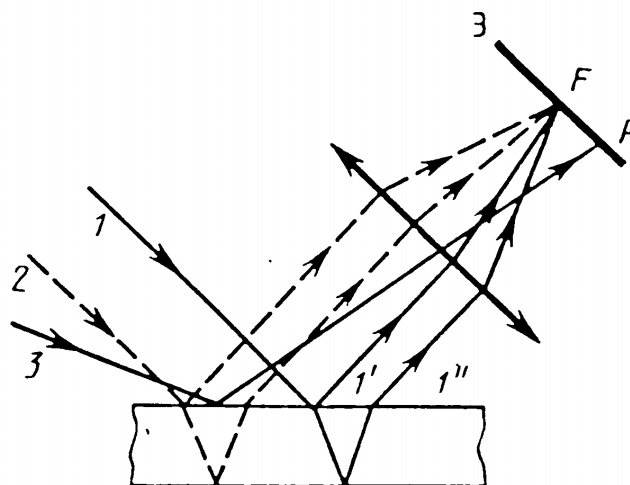
Minima:  $2nd \cos \beta = m\lambda$

Obraz interferencyjny zależy od:

- a) kąta padania  $\alpha$ ,
- b) grubości warstwy  $d$ ,
- c) długości fali  $\lambda$

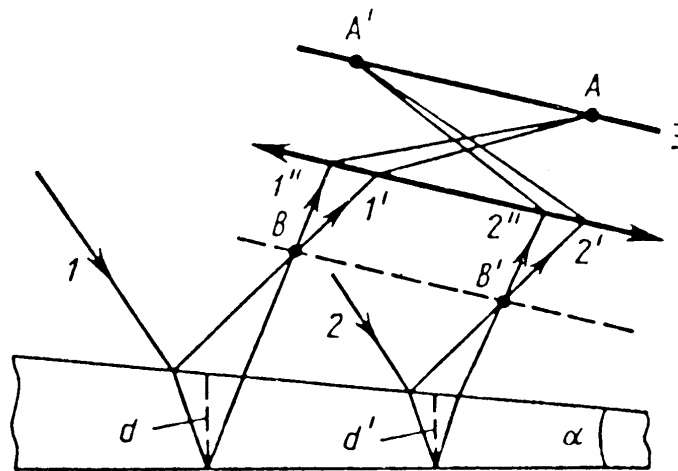
- zmienne  $\alpha$  - prążki jednakowego nachylenia,
- zmienne  $d$  - prążki jednakowej grubości,
- zmienne  $\lambda$  - prążki jednakowej barwy.

Prążki jednakowego nachylenia:



- lokalizowane w nieskończoności; obserwacja za pomocą soczewki- dla soczewki o osi optycznej prostopadłej do warstwy – okręgi koncentryczne ze środkiem w ognisku soczewki.

Prążki jednakowej grubości:

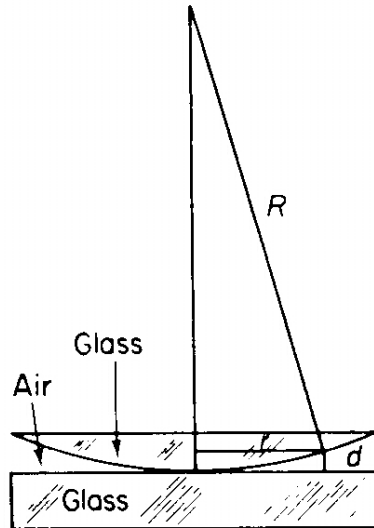


Punkt  $A$  – obraz punktu przecięcia  $B \Rightarrow \Delta(d)$

Punkt  $A'$  – obraz punktu przecięcia  $B' \Rightarrow \Delta(d')$

Powstają prążki odpowiadające jednakowym grubościom klina, lokalizowane w pobliżu jego powierzchni.

Pierścienie Newtona:



$$R^2 = (R - d)^2 + r^2 \cong R^2 - 2Rd + r^2 \quad (d^2 \ll 2Rd)$$

$$d = r^2 / 2R$$

Skok fazy o  $\pi$  :

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}$$

Dla  $\Delta = m' \lambda_0 = 2m'(\lambda_0/2)$  - maksima

$\Delta = (m' + 1/2)\lambda_0 = (2m' + 1)(\lambda_0/2)$  - minima

$$\underline{\Delta = m \lambda_0 / 2}$$

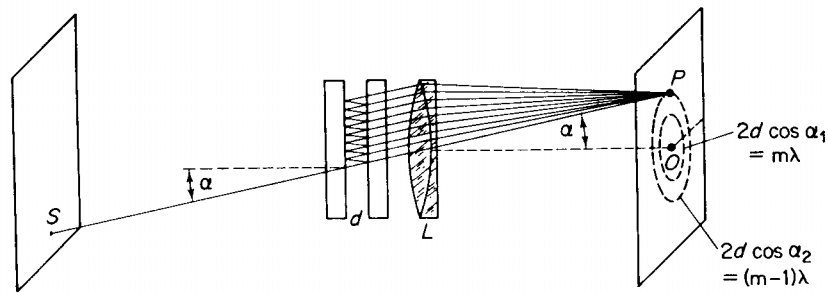
$m$  parzyste – maksima, nieparzyste – minima.

$$r = \sqrt{R \lambda_0 (m - 1) / 2}$$

Dla  $m = 1$ ,  $r = 0$  - minimum, bo skok fazy o  $\pi$ .

### Interferometr Fabry-Perot

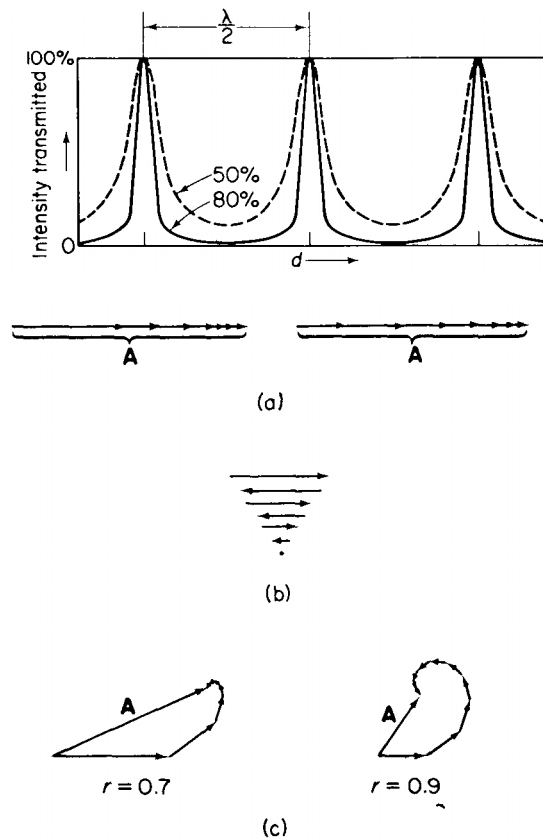
Interferencja światła przechodzącego przez warstwę powietrza znajdującą się między dwiema posrebrzonymi płytkami szklanymi,



Warunek na maksimum:

$$2d \cos \alpha = m\lambda$$

Wąskie prążki – duża rozdzielczość.



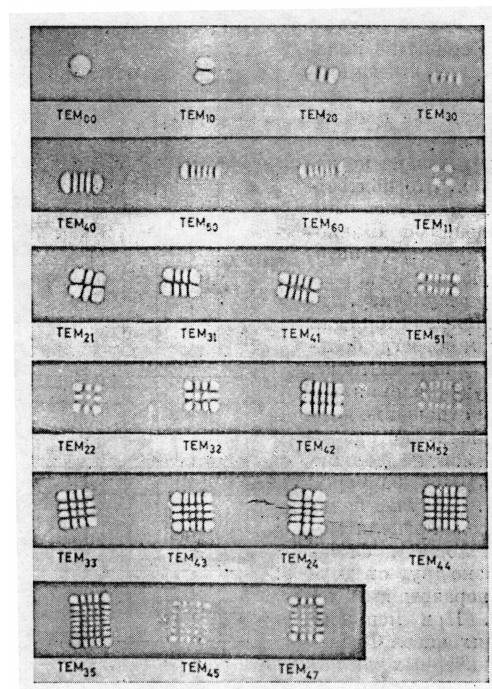
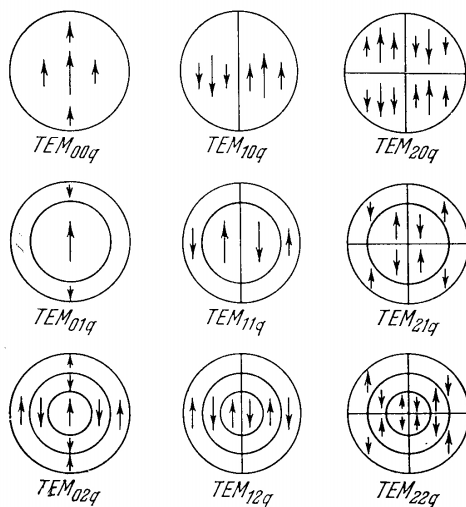
Interferometr Fabry-Perot jako rezonator:

Ogólnie: obszar ograniczony dwiema płaszczyznami o wysokim, różnym od 100% współczynniku odbicia.

Dla  $2d \cos \alpha = m\lambda$  - fala stojąca (dla fal rozchodzących się wzdłuż osi) – prawdziwe tylko jeżeli rozmiary zwierciadeł duże w porównaniu z ich odległością.

W praktyce:- efekty dyfrakcyjne na zwierciadłach, straty energii w wyniku rozpraszania na niejednorodnościach ośrodka, niedoskonałość zwierciadeł

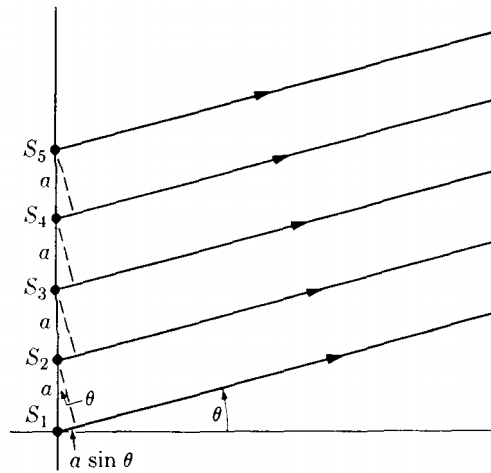
Dostaje się rozwiązania dla modów własnych  $T_{n,m}$  ( $n$  - symetria kątowna,  $m$  - symetria radialna).



W „zwykłym” interferometrze  $F - P$  bardzo gęste mody zlewają się.

Interferencja wielowiązkowa:





$$E_1 = a e^{i\omega t}$$

$$E_2 = a e^{i(\omega t + \delta)}$$

$$\delta = ka \sin \theta$$

...

$$E_m = a e^{i[\omega t + (m-1)\delta]}$$

...

$$E_N = a e^{i[\omega t + (N-1)\delta]}$$

Wypadkowa: 
$$E = \sum_{m=1}^N E_m$$

$$E = a e^{i\omega t} \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)\delta}$$

$$E = a e^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} = \tilde{A} e^{i\omega t}$$

Amplituda zespolona: 
$$\tilde{A} = a(1 - e^{iN\delta}) / (1 - e^{i\delta})$$

Niech:  $\tilde{A} = A e^{i\alpha}$  - A - amplituda

$\alpha$  - faza początkowa

Amplituda drgań wypadkowych w kwadracie:

$$\tilde{A}\tilde{A}^* = Ae^{i\alpha} Ae^{-i\alpha} = A^2$$

$$\begin{aligned} A^2 = \tilde{A}\tilde{A}^* &= a^2 \frac{(1 - e^{iN\delta})(1 - e^{-iN\delta})}{(1 - e^{i\delta})(1 - e^{-i\delta})} = \\ &= a^2 \frac{2 - e^{iN\delta} - e^{-iN\delta}}{2 - e^{i\delta} - e^{-i\delta}} = a^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} = a^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \end{aligned}$$

$$\underline{I(\delta) = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}} \quad (*)$$

$I_0$  - natężenie pojedynczego promienia

Dla  $\delta = 2\pi m$  ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ) (\*) jest nieokreślone.

Z reguły de l'Hospitala:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} &= \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{2\sin(N\delta/2)\cos(N\delta/2) \cdot N/2}{2\sin(\delta/2)\cos(\delta/2) \cdot 1/2} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{N \cos N\delta}{\cos \delta} = N^2$$

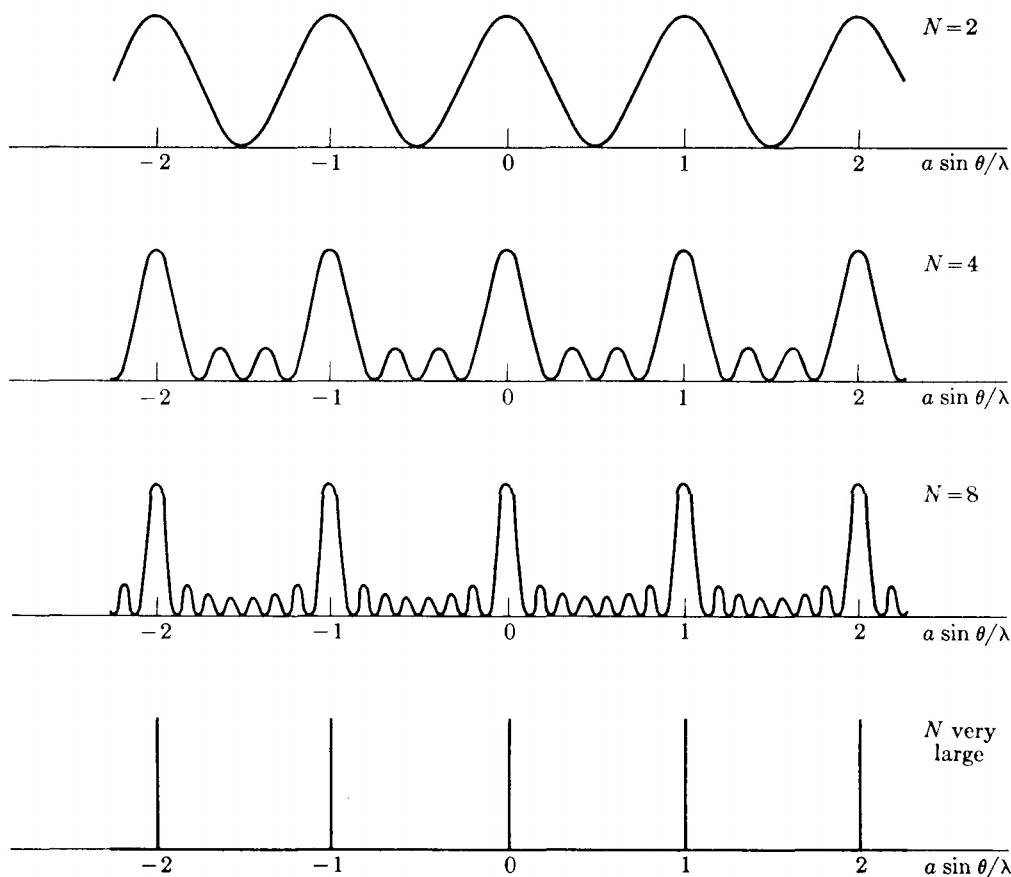
Dla  $\delta = 2\pi m$  ( $\Delta = m\lambda_0$ ):

$$\underline{I = I_0 N^2} \text{ maksima główne rzędu } m.$$

Między maksimum zerowym ( $m = 0$ ) i pierwszym ( $m = 1$ )  $\delta$  zmienia się od 0 do  $2\pi$ ;  $0 \leq \delta/2 \leq \pi$ .

$\Rightarrow \sin^2 \delta/2 \neq 0$  poza końcami odcinka  $(0, \pi)$

$\Rightarrow \sin^2 N \delta/2 = 0$  dla  $\pi, 2\pi, \dots, (N-1)\pi \Rightarrow$  między minimami ( $N-2$ ) maksimumów wtórnych o znacznie mniejszym natężeniu.



$N$  jednakowych, zsynchronizowanych źródeł odległych o  $a$  jedno od drugiego.

Dla dużych  $N$  - silna kierunkowość – radio, radioteleskopy.