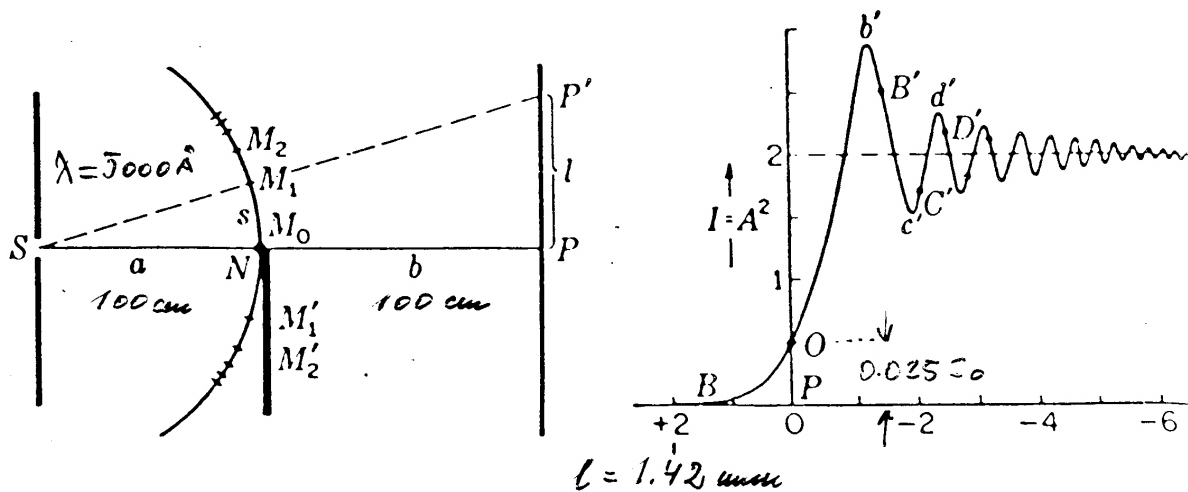


OPTYKA GEOMETRYCZNA



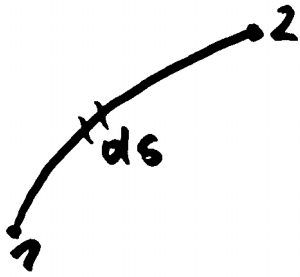
1. W ośrodku jednorodnym światło rozchodzi się prostoliniowo.
2. Przecinające się promienie świetlne nie zaburzają się nawzajem.
3. Prawo odbicia światła.
4. Prawo załamania światła.

ad.1. $\alpha \cong \frac{\lambda}{d}; \quad \alpha \cdot R = \frac{\lambda}{d} \cdot R;$

ad.2. Nie obowiązuje dla bardzo dużych natężeń światła.

Zasada Fermata

Światło (promień) rozchodzi się wzdłuż drogi, dla przebycia której potrzebny jest najkrótszy czas.



$$dt = \frac{ds}{v}$$

v - prędkość światła w danym punkcie ośrodka

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{v}$$

n - bezwzględny współczynnik załamania ośrodka

c - prędkość fali świetlnej w próżni

v - prędkość fali świetlnej w ośrodku

$$dt = \frac{1}{c} n \cdot ds$$

$$\tau = \frac{1}{c} \int_1^2 n ds$$

$$L = \int_1^2 n ds \Rightarrow \text{droga optyczna}$$

W ośrodku jednorodnym

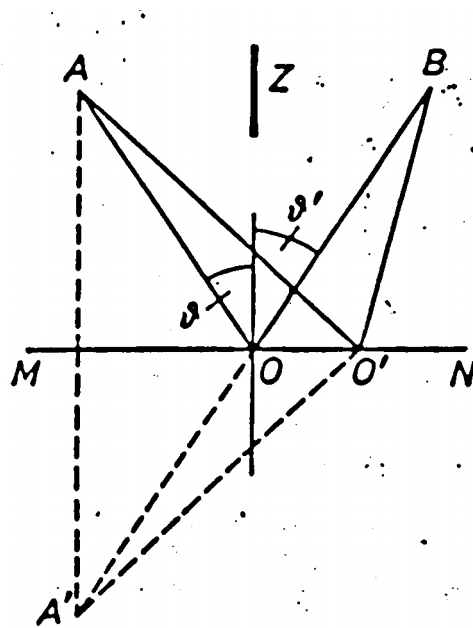
$$L = n \cdot s$$

$$\underline{\tau = \frac{L}{c}}$$

Zasada Fermata:

Światło rozchodzi się wzdłuż linii odpowiadających minimalnej, maksymalnej lub stacjonarnej (równej wszystkim pozostałym) drodze optycznej.

Prawo odbicia światła.



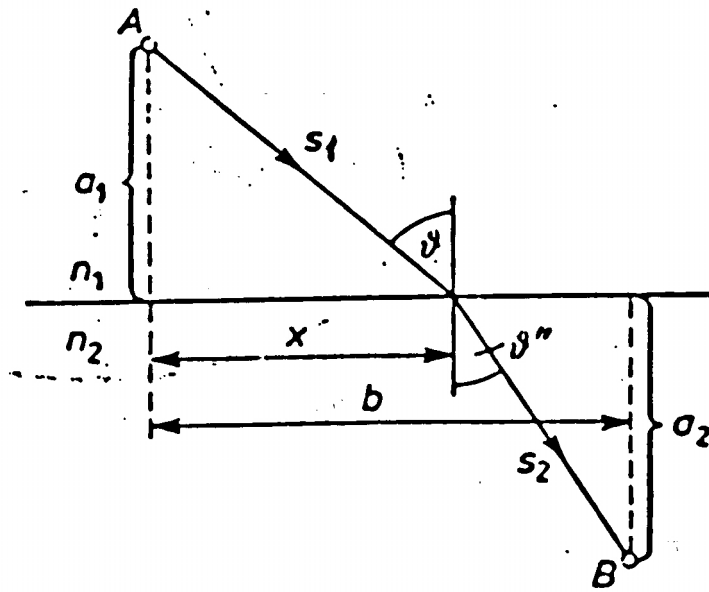
$$AOB = A'O'B < A'O'B$$

Gdy OO' rośnie – droga rośnie nieograniczenie.

Kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Promień padający, odbity i normalna do płaszczyzny odbijającej w punkcie padania leżą w jednej płaszczyźnie.

Prawo załamania światła:



$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2$$

$$L = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = n_1 \frac{x}{s_1} - n_2 \frac{b-x}{s_2}$$

$$\frac{dL}{dx} = n_1 \sin \vartheta - n_2 \sin \vartheta''$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow n_1 \sin \vartheta = n_2 \sin \vartheta''$$

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{v_1}{v_2}$$

Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania nie zależy od wielkości tych kątów i jest równy stosunkowi prędkości fali świetlnej w ośrodku, z którego promień pada do prędkości fali świetlnej w ośrodku, do którego promień wchodzi.

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{v_1}{v_2} \quad \left(= \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \right)$$

(n_{12} - względny współczynnik załamania ośrodka drugiego względem ośrodka pierwszego).

Promień padający, załamany oraz normalna do granicy rozdziału ośrodków, wystawiona w punkcie padania leżą w jednej płaszczyźnie

Całkowite wewnętrzne odbicie:

W ośrodku o większym współczynniku załamania prędkość światła jest mniejsza.

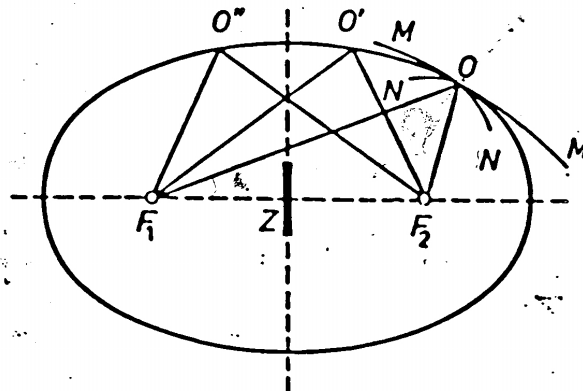
$\Rightarrow n_1 > n_2 \Rightarrow \vartheta''$ rośnie szybciej niż ϑ

$$\vartheta_{gr} = \arcsin n_{12} \Rightarrow \vartheta'' = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\vartheta_{gr} < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right).$$

* Fala w (2) ośrodku zanika wykładniczo.

Zasada Fermata – przykłady:



a) $F_1 O F_2 = F_1 O' F_2 = F_1 O'' F_2 \dots$

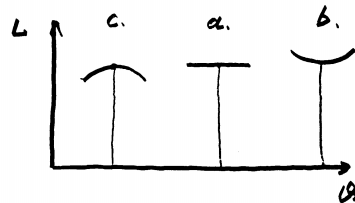
- drogi tautochronowe

Promienie wychodzące z F_1 trafiają do F_2

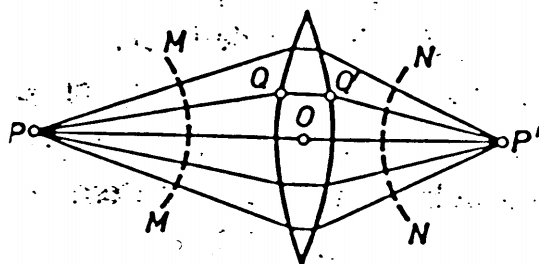
- droga stacjonarna

b) Dla powierzchni $MM \rightarrow F_1 O F_2$ - minimalna

c) Dla powierzchni $MN \rightarrow F_1 O F_2$ - maksymalna



Soczewka:

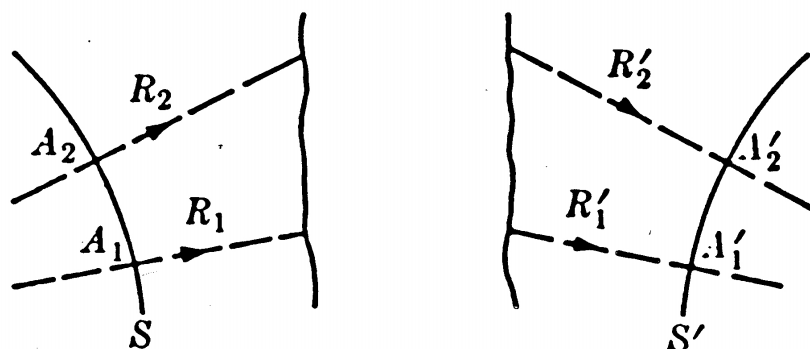


- promienie są tautochronowe

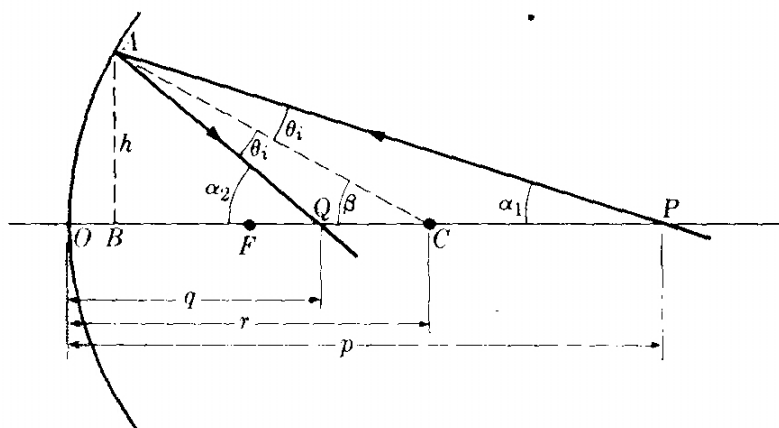
- drogi optyczne są stacjonarne

Twierdzenie Malusa: (dla ośrodka izotropowego)

Po dowolnej liczbie odbić i załamania promienie świetlne pochodzące ze źródła punktowego są normalne do powierzchni falowej.



Odbicie od powierzchni sferycznej:



C – środek krzywizny, OC – oś główna

Konwencja: wszystkie wielkości mierzone na prawo od 0 są dodatnie, na lewo – ujemne.

Niech P – źródło fali kulistej

PA – promień padający, AQ – promień odbity

$$\beta = \theta_i + \alpha_1; \quad \alpha_2 = \theta_i + \beta \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta$$

Zał.: promienie przyosiowe $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \beta$ małe

$$\alpha_1 \cong \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{AB}{BP} \cong \frac{h}{p};$$

$$\alpha_2 \cong \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{AB}{BQ} \cong \frac{h}{q}$$

$$\beta \cong \operatorname{tg} \beta = \frac{AB}{BC} \cong \frac{h}{r}$$

$$\underline{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}}$$

Promienie wychodzące z P przejdą przez Q

$\Rightarrow$ Q – obraz P

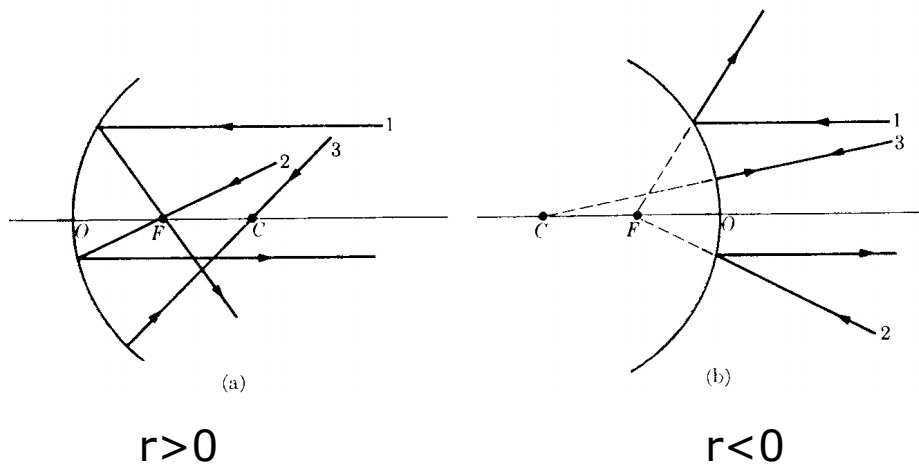
Jeśli promień padający jest równoległy do osi głównej:

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{r}. \text{ - obraz w odl. } q = r/2 \text{ od zwierciadła.}$$

Punkt F $\equiv$ ognisko, dległość $f = r/2$ - odległość ogniskowa, ogniskowa.

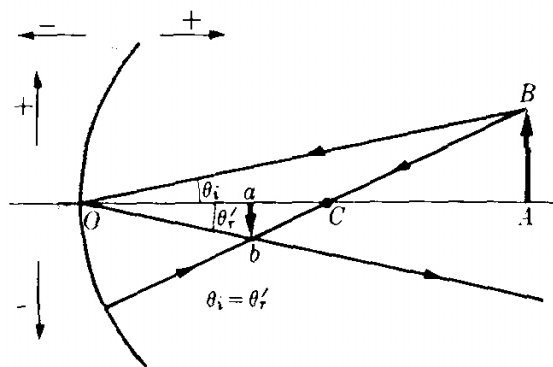
$$\underline{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}}$$

Promienie główne:



1 – promień równoległy; 2 – promień ogniskowy;
3 – promień normalny (środkowy)

Powiększenie przez zwierciadło sferyczne:

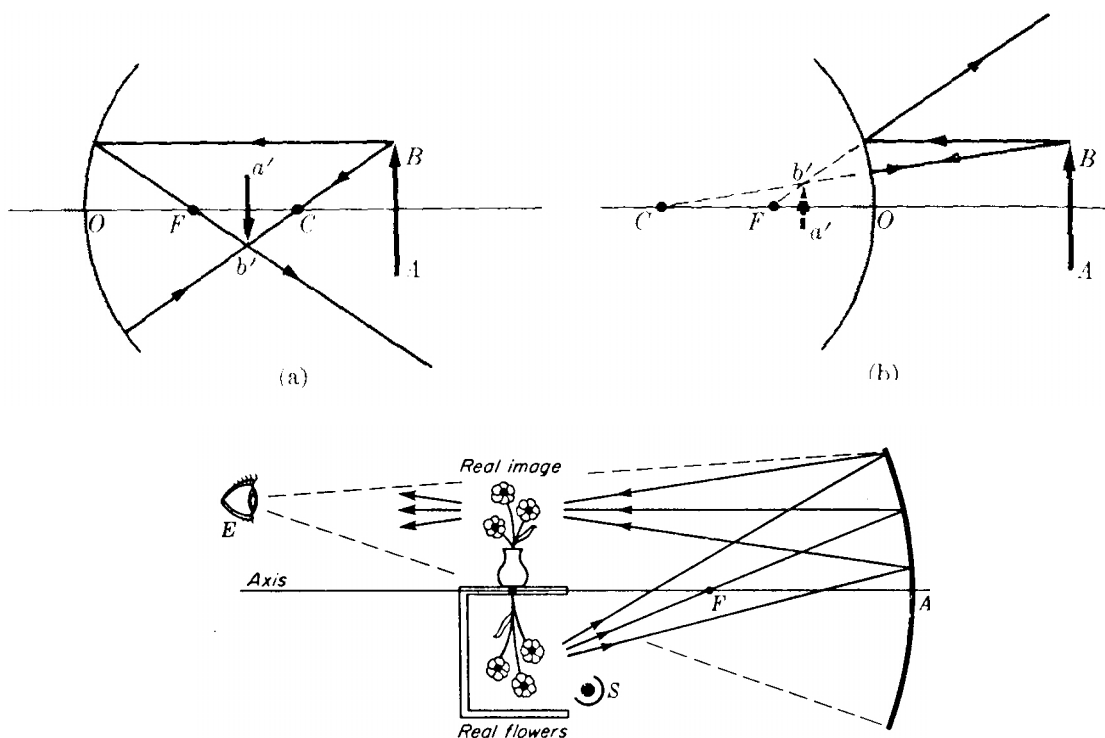


$M \equiv ab/AB$ $\pm$ w zależności od zwrotu obrazu w stosunku do przedmiotu

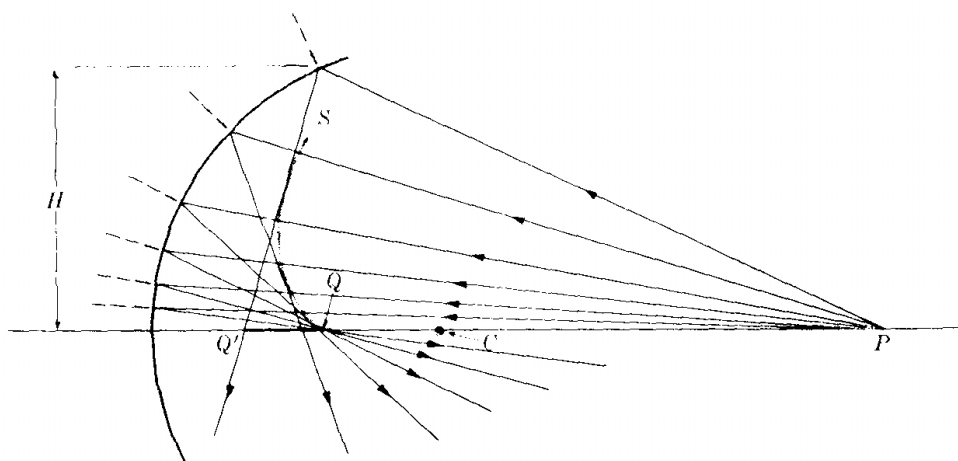
$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{AB}{AO} = \frac{AB}{p}; \quad \operatorname{tg} \theta_r = -\frac{ab}{Oa} = -\frac{ab}{q}$$

$$\theta_i = \theta_r' \qquad \underline{M = -q/p}$$

Powstawanie obrazu w zwierciadle sferycznym:



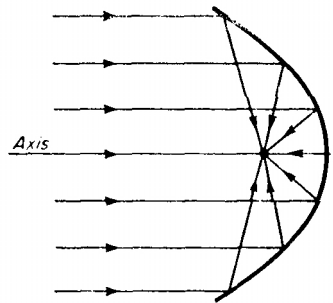
Aberracja sferyczna:



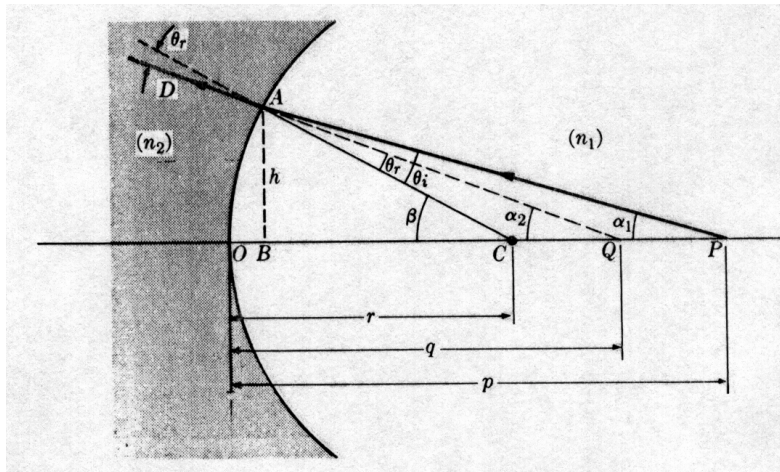
QS – kaustyka

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{h^2}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2$$

Zwierciadło paraboliczne:



Załamanie na powierzchni sferycznej.



$$\beta = \theta_1 + \alpha_1; \quad \beta = \theta_r + \alpha_2$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$$

zał.: promienie przyosiowe

$$\sin \theta_i \cong \theta_i, \quad \sin \theta_r \cong \theta_r \Rightarrow n_1 \theta_i = n_2 \theta_r$$

$$n_1(\beta - \alpha_1) = n_2(\beta - \alpha_2); \quad \alpha_1 \cong \frac{h}{p}; \quad \alpha_2 \cong \frac{h}{q}; \quad \beta \cong \frac{h}{r}$$

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r}$$

$F_0 \equiv$ przedmiot punktowy umieszczony w tym miejscu
daje promienie załamane równoległe, $q = \infty$

$$\frac{n_1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{r}$$

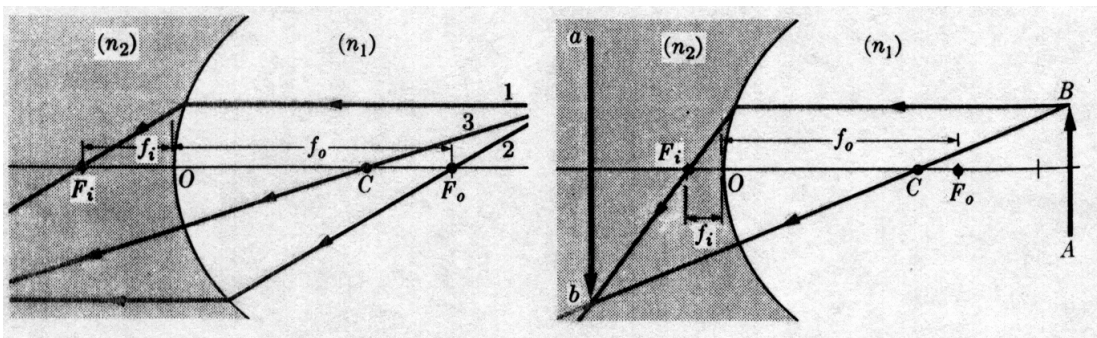
Dla promieni padających równoległych: ($p = \infty$) -
promienie załamane przechodzą przez $q = f_i$:

$$-n_2 / f_i = (n_1 - n_2) / r \Rightarrow f_i = \frac{n_2}{n_1 - n_2} \cdot r$$

$$(f_0 + f_i = r) \quad \frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1}{f_0} \quad \left(= -\frac{n_2}{f_i} \right)$$

Promienie główne, obraz:

$$r > 0; \quad n_1 > n_2$$

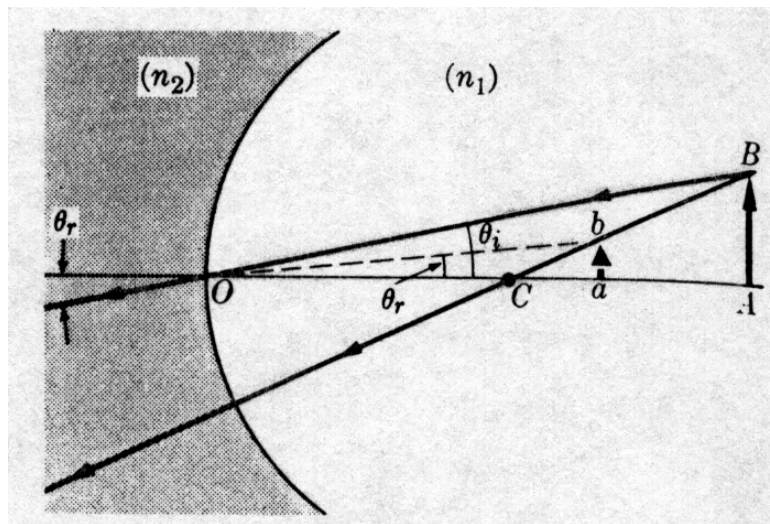


$f_0 > 0$ - układ skupiający

$f_0 < 0$ - układ rozpraszający

	+	-
Promień r	wklęsła	wypukła
Ogniskowa f_0	skupiająca	rozpraszająca
Przedmiot p	rzeczywisty	pozorny
Obraz q	pozorny	rzeczywisty

Powiększenie przez sferyczną powierzchnię załamującą:



$$M = \frac{ab}{AB}$$

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{p};$$

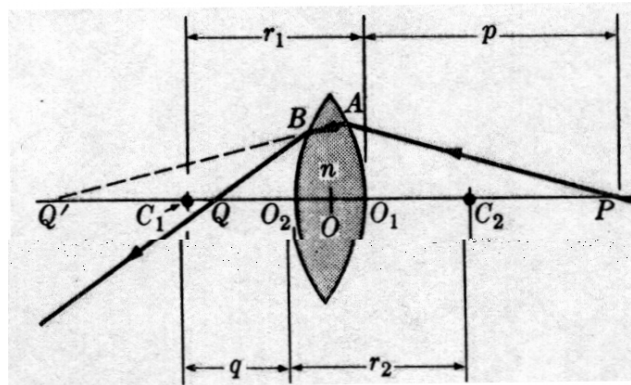
$$\operatorname{tg} \theta_r = \frac{ab}{Oa} = \frac{ab}{q}$$

$$M = \frac{q \operatorname{tg} \theta_r}{p \operatorname{tg} \theta_i} \cong \frac{q \sin \theta_r}{p \sin \theta_i} \quad (\text{przyosiowe})$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \quad (\text{Snellius})$$

$$M = \frac{mq}{n_2 p}$$

Soczewki (cienkie):



O_1, O_2 - środki krzywizn

soczewka w powietrzu ($n=1$)

Q' - obraz p wytworzony przez pierwszą powierzchnię

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q'} = \frac{1-n}{r_1}$$

Dla drugiej powierzchni:

$$\frac{n}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{r_2}$$

Soczewka cienka, $q' + O_1O_2 \cong q'$

$$\frac{1}{p} \pm \frac{1}{q} = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Dla $q = \infty$, $p \Rightarrow f$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

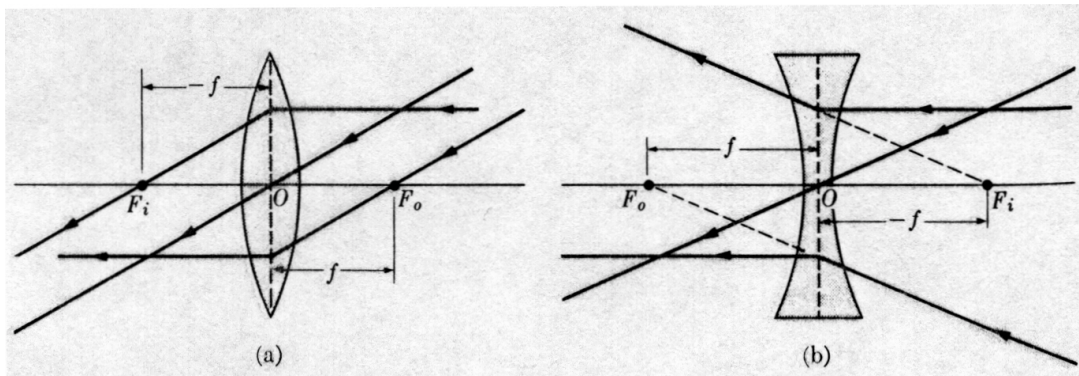
Dla $p = \infty$, $q \Rightarrow -f$

Ogniska po obu stronach soczewki są tak samo odległe od jej środka.

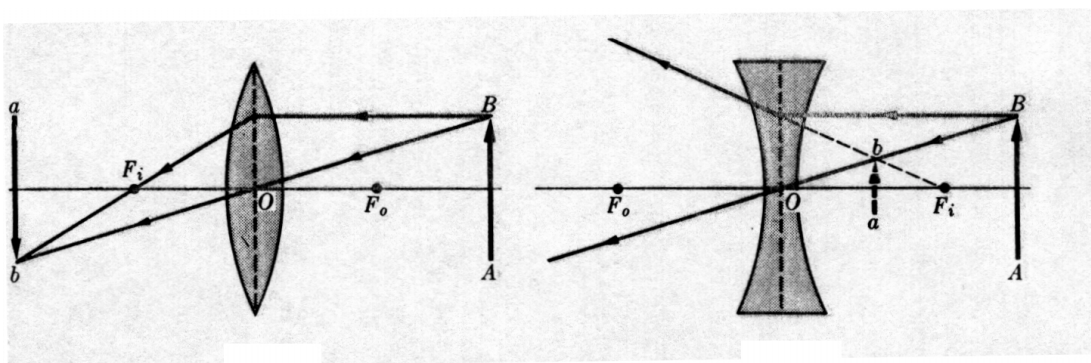
$f > 0$ - soczewka skupiająca

$f < 0$ - soczewka rozpraszająca

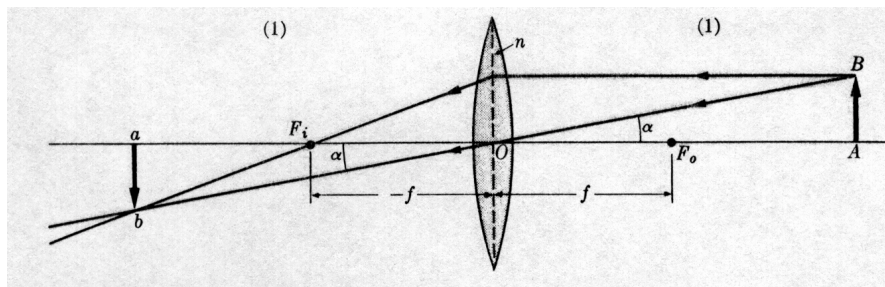
Promienie główne:



Konstrukcja obrazu:



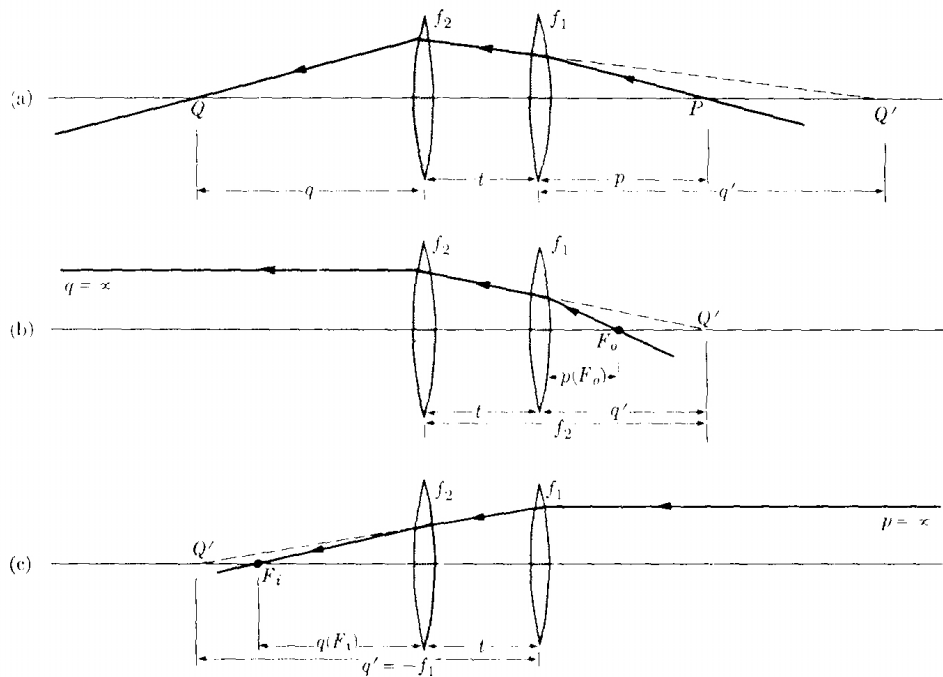
Powiększenie soczewki:



$$M \equiv ab/AB$$

$$\operatorname{tg} \alpha = AB/OA; \operatorname{tg} \alpha = ab/Oa \Rightarrow \underline{M = q/p}$$

Układ cienkich soczewek:



$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1}$$

$$Q' = q' + t; \quad \frac{1}{q' + t} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

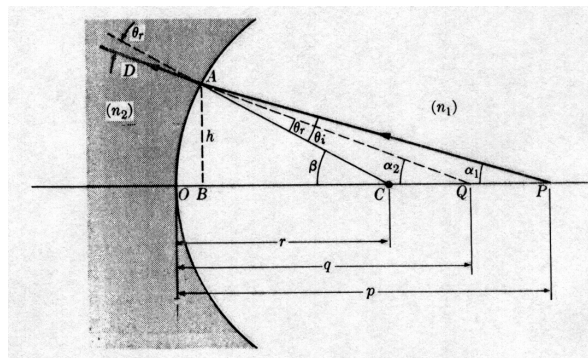
Niech $q = \infty$; $q' = f_2 - t$; $p(F_0) = \frac{f_1(f_2 - t)}{f_1 + f_2 - t}$

Niech $p = \infty$: $q(Fi) = \frac{f_2(f_1 - t)}{f_1 + f_2 - t}$

Niech $t = 0$: $\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \\ \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \end{array} \right.$$

Aberracja sferyczna soczewki:



Z $\triangle ACP$ i $\triangle ACQ$: (wzór sinusów):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{CP}{AP} = \frac{\sin \theta_i}{\sin(\pi - \beta)}; \quad \frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin \theta_r}{\sin(\pi - \beta)} \\ n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \end{array} \right.$$

$$n_1 \frac{CP}{AP} = n_2 \frac{CQ}{AQ}; \quad n_1 \frac{p-r}{AP} = n_2 \frac{q-r}{AQ}$$

$$n_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \frac{p}{AP} = n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \frac{q}{AQ}$$

$$(\text{dla małych } \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow p = AP, \quad q = AQ)$$

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r}$$

$$\begin{aligned} (AP)^2 &= r^2 + (p-r)^2 + 2r(p-r)\cos \beta = \\ &= p^2 - 2r(p-r)(1-\cos \beta) = \\ &= p^2 - 4r(p-r)\sin^2(\beta/2) = \\ &= p^2 \left[1 - 4 \frac{r^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \sin^2 \frac{\beta}{2} \right] \cong p^2 \left[1 - \frac{h^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right] \\ &\quad (\sin(\beta/2) \approx \beta/2 \approx h/2r) \end{aligned}$$

$$\frac{p}{AP} = \left[1 - \frac{h^2}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right]^{-1/2} \approx 1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)$$

$$\frac{q}{AQ} \approx 1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)$$

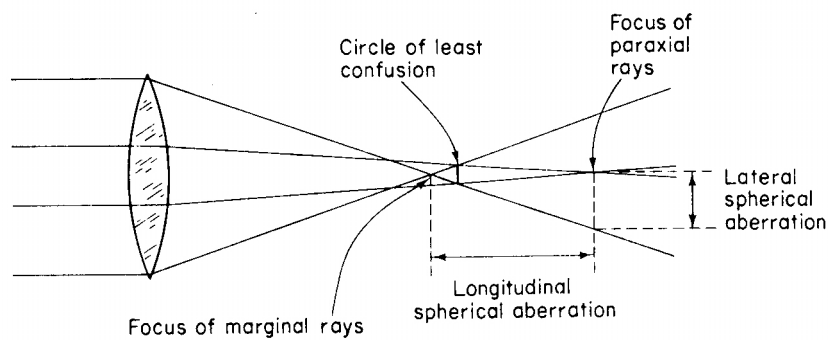
$$\begin{aligned} n_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right] &= \\ = n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \left[1 + \frac{h^2}{2q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2} \left[\frac{n_1}{p} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 - \frac{n_2}{q} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right)^2 \right]$$

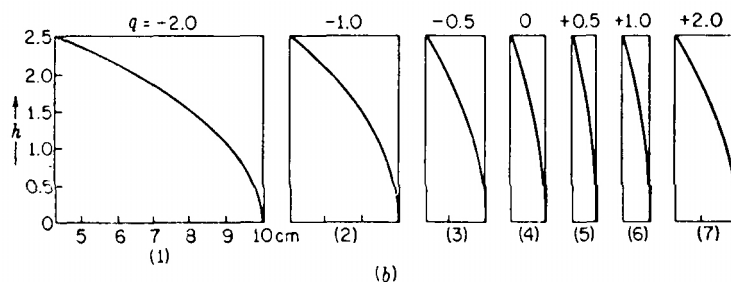
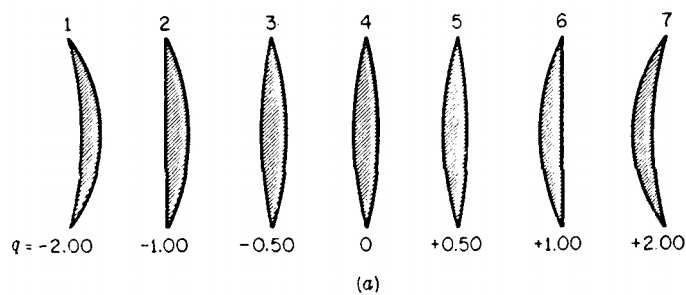
(q z równania dla promieni przyosiowych)

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2} \frac{n_1 - n_2}{h^2} \left[\frac{n_1^2}{r} - \frac{n_1(n_1 + n_2)}{p} \right] \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2$$

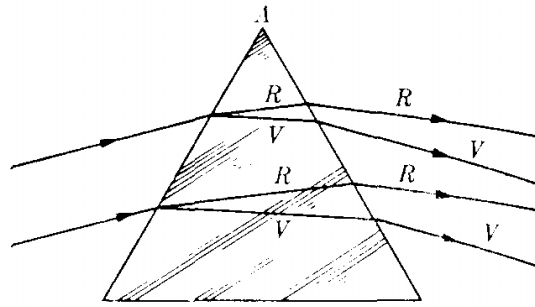
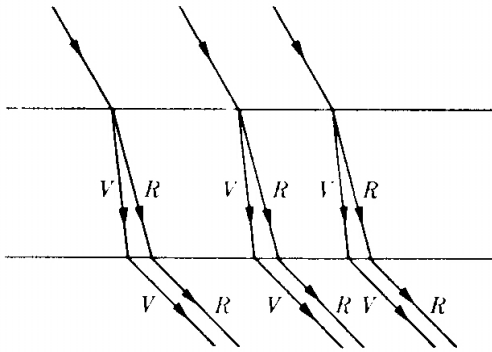
Położenie obrazu zależy od h !



ZALEŻNOŚĆ OGNISKOWEJ OD WYSOKOŚCI



Dyspersja



$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\begin{cases} 0 = \sin r + n \cos r \frac{dr}{dn} \\ \cos i' \frac{di'}{dn} = \sin r' + n \cos r' \frac{dr'}{du} \\ \frac{dr}{du} + \frac{dr'}{du} = 0 \\ \frac{d\delta}{du} = \frac{di'}{du} \end{cases}$$

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{du} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}$$

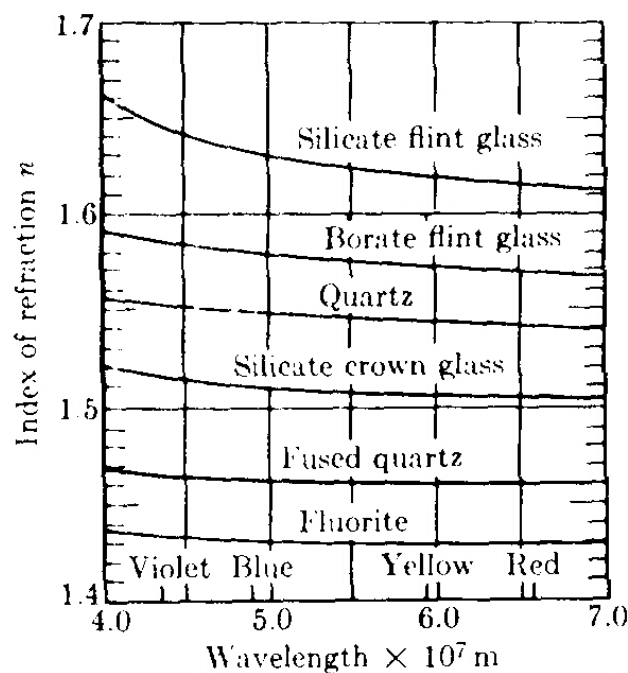
Dla minimalnego odchylenia:

$$\frac{d\delta}{du} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}$$

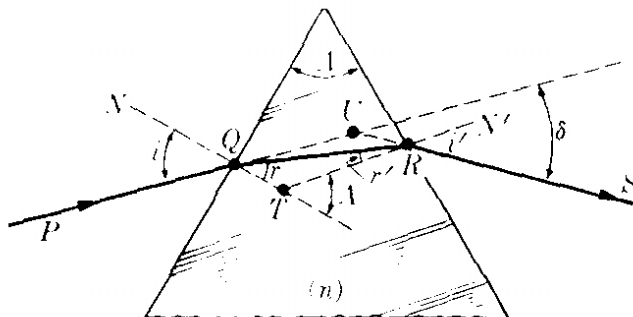
Jeśli $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ (wzór Cauchy'ego) $\Rightarrow \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^2}$

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)} \left(-\frac{2B}{\lambda^2} \right)$$

(-) $\Rightarrow$ odchylenie maleje, gdy λ rośnie



Pryzmat:



$$\sin i = n \sin r \quad (*)$$

$$\sin i' = n \sin r'$$

$$r + r' = A \quad (\Delta QTR)$$

$$\delta = i + i' - A \quad (\Delta QRU)$$

Najmniejsze odchylenie dla i gdy:

$$\frac{d\delta}{di} = 0; \quad \frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di}; \quad \frac{di'}{di} = -1$$

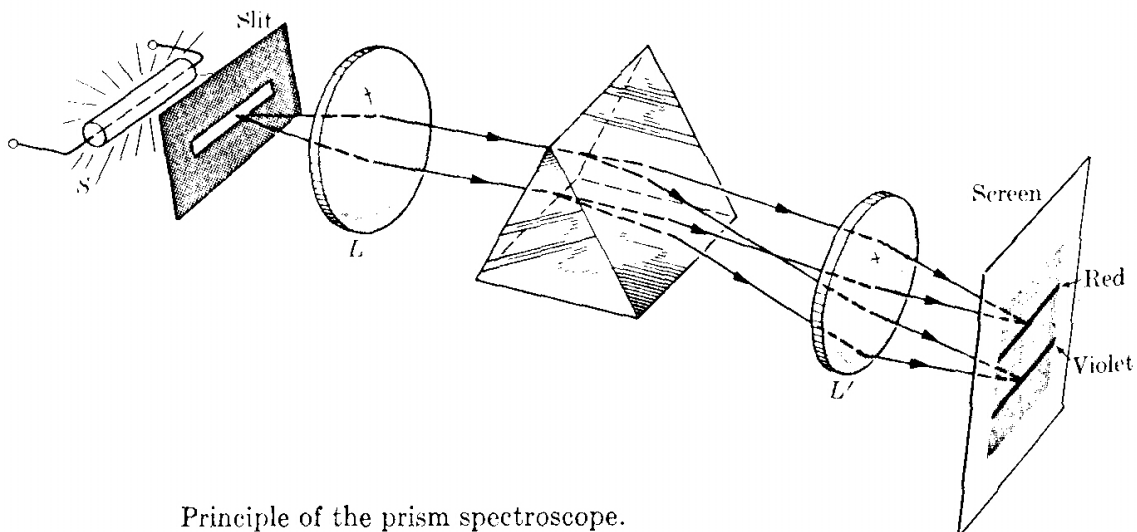
$$\left. \begin{aligned} \cos i \, di &= n \cos r \, dr \\ \cos i' \, di' &= n \cos r' \, dr' \\ dr &= -dr' \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \rightarrow \begin{aligned} i &= i' \\ r &= r' \end{aligned}$$

$$i = \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A) \quad r = \frac{1}{2}A \quad i, i', r, r' < \pi/2$$

$$Z (*): \quad \underline{n = \sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A) / \sin \frac{1}{2}A}$$

Spektrometr pryzmatyczny:



Principle of the prism spectroscopy.

Aberracja chromatyczna:

