Gaz elektronów swobodnych

Zadanie 1

Wylicz gęstość stanów $D(\epsilon)$ dla jednowymiarowego gazu elektronów swobodnych. Przyjmij periodyczne warunki brzegowe dla łańcucha o długości L. Oblicz też energię Fermiego.

Odp. $D(\epsilon) = \frac{L}{h}\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}$, $\epsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{N}{2L}\right)^2$.

Zadanie 2

Załóżmy, że w pewnej próbce gęstość stanów elektronowych $D(\epsilon)$ jest stała i równa $D_0 > 0$ dla $\epsilon > 0$ i równa zero dla $\epsilon < 0$. Całkowita liczba elektronów w układzie jest równa N. Oblicz potencjał Fermiego μ_0 w temperaturze 0 K.

Odp. $\mu_0 = \frac{N}{2D_0}$.

Zadanie 3

Dla układu nieoddziałujących elektronów o temperaturze T wykaż, że prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w stanie o energii Δ powyżej potencjału chemicznego μ jest równe prawdopodobieństwu znalezienia dziury na poziomie leżącym o Δ poniżej μ.

Zadanie 4

W doskonałym gazie Fermiego elektronów średnia liczba cząstek na jednocząstkowym poziomie energetycznym E_i wynosi

$$N_i = \frac{1}{\exp\left[(E_i - \mu)/kT\right] + 1}.$$

a) Wyprowadź równanie, z którego można wyliczyć μ znając N.

b) Pokaż, że przytoczony w treści zadania rozkład Fermiego przechodzi w rozkład Maxwella-Boltzmana w granicy $N\lambda^3 \to 0$, gdzie $\lambda = (\frac{h^2}{2\pi mkT})^{1/2}$ jest termiczną długością fali de Broigle'a.

Zadanie 5

Znając energię Fermiego, E_F, oblicz średnią energię przypadającą na jedną cząstkę w idealnym gazie Fermiego dla $T = 0$K.

Odp. $\overline{E_1} = \frac{3}{5}E_F$.

Zadanie 6

Niech $D(\epsilon)$ będzie gęstością stanów w metalu, a E_F energią Fermiego. Gęstość stanów na poziomie Fermiego jest różna od zera, $D(E_F) \neq 0$.

a) Wyraź całkowitą liczbę elektronów w metalu o temperaturze $T = 0$K poprzez E_F i $D(E_F)$.

b) Wyraź całkowitą liczbę elektronów w metalu o temperaturze $T \neq 0$K poprzez energię Fermiego i $D(E)$.

c) Wylicz temperaturową zależność energii Fermiego w granicy niskotemperaturowej ($\mu \gg kT$). Pamiętaj, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

d) W oparciu o wyliczenia z punktu c) oszacuj wartość energii Fermiego w metalicznym Na, w którym koncentracja elektronów swobodnych wynosi w przybliżeniu 2.6×10^{22}el./cm^3.

Odp. c) $\mu = E_{F0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_{F0}}\right)^2\right]$, gdzie $E_{F0} = \mu_0 = \frac{1}{2m}\left(\frac{3h^3N}{8\pi V}\right)^{2/3}$; d) $E_{F0} \approx 3.2$eV.