

Rozdział 26

(U.5) Zasada nieoznaczoności

26.1 Pakiet falowy minimalizujący zasadę nieoznaczoności

26.1.1 Wyprowadzenie postaci pakietu

Stan kwantowo-mechaniczny (lub funkcja falowa) minimalizujący zasadę nieoznaczoności spełnia równanie (5.26)

$$(\tilde{A} - i\lambda\tilde{B})\varphi(\vec{x}) = 0, \quad (26.1)$$

przy czym parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ zadany jest wzorem (5.27).

Rozważymy teraz pakiet falowy związany z cząstką o średnim położeniu $\langle x \rangle = a$ i średnim pędzie $\langle p \rangle = b$. Ograniczymy się, dla prostoty rachunków, do sytuacji jednowymiarowej. A zatem dokonujemy utożsamienia operatorów:

$$\tilde{A} = \hat{x} - a = x - a, \quad \tilde{B} = \hat{p} - b = p - b. \quad (26.2)$$

Oczywiście, zgodnie z (5.11) mamy teraz

$$i\hbar\hat{C} = [\tilde{A}, \tilde{B}] = [x, p] = i\hbar, \quad (26.3)$$

więc $\hat{C} = 1$. Zatem parametr λ w relacji (26.1), na to aby zgodnie z (5.27) zminimalizować zasadę nieoznaczoności, przyjmuje wartość

$$\lambda = \frac{-\hbar}{2\sigma^2(p)} = \frac{-2\sigma^2(x)}{\hbar}. \quad (26.4)$$

Korzystając więc z utożsamień (26.2) i mając parametr λ , na podstawie (26.1) budujemy równanie dla poszukiwanego pakietu falowego

$$\left[(x - a) - i\lambda \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - b \right) \right] \varphi(x) = 0. \quad (26.5)$$

Jest to równanie o rozdzielających się zmiennych, które możemy przepisać w postaci

$$\frac{1}{\lambda\hbar} [x - a + i\lambda b] dx = \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} \quad (26.6)$$

Scalkowanie tego równania jest trywialne, w wyniku otrzymujemy

$$\frac{1}{\lambda\hbar} \left[\frac{x^2}{2} - ax + i\lambda bx + C \right] = \ln \varphi(x). \quad (26.7)$$

Odwracając logarytm i wprowadzając nową stałą dowolną $e^C = A$ piszemy

$$\varphi(x) = A \exp \left[\frac{x^2}{2\lambda\hbar} - \frac{ax}{\lambda\hbar} + \frac{ibx}{\hbar} \right]. \quad (26.8)$$

Pojawiającą się w rezultacie całkowania stałą dowolną utożsamiamy ze stałą normalizacyjną, którą będziemy musieli później wyznaczyć, a na razie możemy nią manipulować. W tym celu przepiszmy powyższe równanie w postaci

$$\varphi(x) = A \exp \left[\frac{1}{2\lambda\hbar} (x^2 - 2ax + a^2) - \frac{a^2}{2\lambda\hbar} + \frac{ibx}{\hbar} - \frac{iba}{\hbar} + \frac{iba}{\hbar} \right]. \quad (26.9)$$

Włączając człony drugi i piąty do nowej stałej normalizacyjnej zapisujemy otrzymany pakiet falowy jako

$$\varphi(x) = A' \exp \left[\frac{(x-a)^2}{2\lambda\hbar} + \frac{ib}{\hbar}(x-a) \right]. \quad (26.10)$$

Postać taka jest wygodniejsza do dalszej dyskusji, zaś A' to po prostu (nowa) stała normalizacyjna. Zwróćmy uwagę, że uzyskana funkcja falowa $\varphi(x)$ ma być normowalna, a więc parametr λ musi być ujemny. Szczęśliwie tak jest, co widać z relacji (26.4), bowiem dyspersje zawsze są dodatnie. Dlatego też zapiszemy w końcu $\varphi(x)$ w postaci

$$\varphi(x) = A' \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2|\lambda|\hbar} + \frac{ib}{\hbar}(x-a) \right]. \quad (26.11)$$

Za pomocą warunku normalizacyjnego

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\varphi(x)|^2 = 1, \quad (26.12)$$

musimy obliczyć stałą normalizacyjną A' . Przy obliczaniu kwadratu modułu czynnik urojony w eksponencie wzoru (26.11) znosi się. Pozostaje do obliczenia całka

$$1 = |A'|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{|\lambda|\hbar} \right]. \quad (26.13)$$

Całkę tę łatwo obliczamy dokonując zamiany zmiennej całkowania $y = (x-a)/\sqrt{\hbar|\lambda|}$ i wiedząc, że $\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-y^2) = \sqrt{\pi}$. W rezultacie otrzymujemy

$$|A'|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi|\lambda|\hbar}} \implies A' = \left(\frac{1}{\pi|\lambda|\hbar} \right)^{1/4}, \quad (26.14)$$

przy czym w drugiej równości fazę dowolną wybraliśmy równą zero. Wobec tego mamy

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{\pi|\lambda|\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2|\lambda|\hbar} + \frac{ib}{\hbar}(x-a) \right]. \quad (26.15)$$

Podstawiając wprowadzone wcześniej oznaczenia, stwierdzamy że

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2(x)} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{4\sigma^2(x)} + \frac{i\langle p \rangle}{\hbar}(x-\langle x \rangle) \right]. \quad (26.16)$$

przedstawia pakiet falowy (funkcję falową) minimalizujący zasadę nieoznaczoności. Oczywiście powstaje pytanie, jak uzyskany tu pakiet ma się do pakietu dyskutowanego uprzednio (patrz (23.173) i ((25.1))).

26.1.2 Dyskusja wyników

W poprzednich rozdziałach badaliśmy ewolucję czasową gaussowskiego pakietu falowego, który wyraża się wzorem

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-i\theta(t)}}{\sqrt[4]{a^2\pi(1+\sigma^2t^2)}} e^{ik_0x - i\omega_0t} \exp\left[-\frac{(x - v_0t)^2}{2a^2(1+i\sigma t)}\right], \quad (26.17)$$

gdzie oznaczenia są omówione po formule (25.1). Dla pakietu tego obliczyliśmy wartości oczekiwane

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= v_0t, & \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{2}a^2(1 + \sigma^2t^2) + v_0^2t^2, \\ \langle p \rangle &= \hbar k_0, & \langle p^2 \rangle &= \hbar^2k_0^2 + \frac{\hbar^2}{2a^2}, \end{aligned} \quad (26.18)$$

co oczywiście pozwala wyznaczyć odpowiednie (zależne od czasu) dyspersje

$$\sigma_t^2(x) = \frac{1}{2}a^2(1 + \sigma^2t^2), \quad \sigma_t^2(p) = \frac{\hbar^2}{2a^2}. \quad (26.19)$$

Dyspersja położenia cząstki (pakietu) rośnie kwadratowo w czasie, a pędu jest stała. Pakiet opisuje cząstkę swobodną (nie oddziałującą). Zatem nie ma powodu, aby zmianom ulegał pęd cząstki. Dlatego fakt, że $\sigma_t^2(p) = \text{const.}$, wydaje się być zrozumiały. Wiemy, że pakiet rozmywa się w przestrzeni. Odzwierciedleniem tego jest rosnąca w czasie dyspersja $\sigma_t^2(x)$.

Iloczyn obu dyspersji wynosi

$$\sigma_t^2(x)\sigma_t^2(p) = \frac{\hbar^2}{4}(1 + \sigma^2t^2), \quad (26.20)$$

i dla dostatecznie długich czasów t może mieć dowolnie dużą wartość. Z relacji tej widzimy, że minimalizacja zasady nieoznaczoności może nastąpić jedynie w chwili początkowej $t = 0$. W chwili tej pakiet (26.17) redukuje się do

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{a^2\pi}} e^{ik_0x} \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2}\right], \quad (26.21)$$

Jednocześnie z (26.19) mamy $\sigma_0^2(x) = \frac{1}{2}a^2$, więc

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2(x)}} e^{ik_0x} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma_0^2(x)}\right]. \quad (26.22)$$

Ponieważ jeszcze $k_0 = \langle p \rangle / \hbar$ oraz $\langle x \rangle_0 = 0$, więc widzimy, że pakiet $\varphi(x)$ dany w (26.16) pokrywa się z powyższym. Minimalizacja zasady nieoznaczoności zachodzi w chwili początkowej, a wraz z upływem czasu "psuje się" co pokazuje iloczyn dyspersji (26.20).

26.2 Dyskusja doświadczenia interferencyjnego

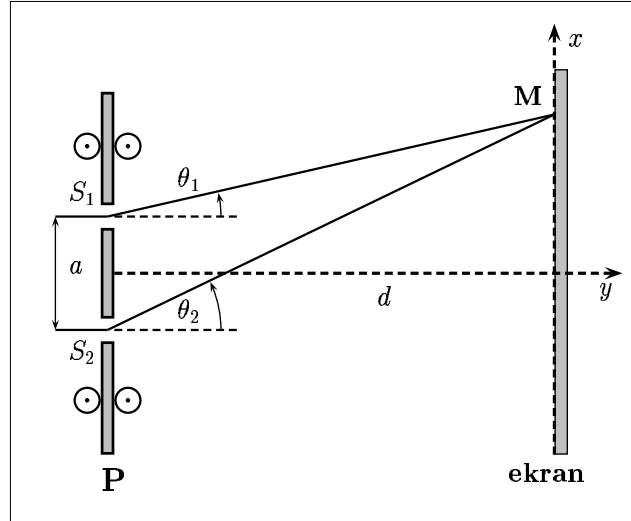
Wróćmy teraz do doświadczenia z interferencją cząstek. Dyskutując ją poprzednio stwierdziliśmy, że nie można określić, przez którą szczelinę przejdzie cząstka, o ile tylko nie chcemy zniszczyć obrazu (prążków) interferencyjnych.

Cząstka padająca na przesłonę ma pęd $\vec{p} = (0, p_0, 0)$. Ulega ona dyfrakcji na jednej ze szczelin i pada na ekran w punkcie M , patrz rysunek 26.1. A więc po przejściu przez szczelinę

cząstka ma pewien pęd w kierunku poprzecznym, tj. w kierunku osi x . Całkowity pęd musi być zachowany, a więc przesłona absorbuje zmiany pędu

$$p_x^{(i)} = p_0 \sin \theta_i, \quad (26.23)$$

gdzie $i = 1, 2$ numeruje szczelinę przez którą przeszła cząstka. W sytuacji przedstawionej na rysunku cząstki uginają się "w górę", zatem przesłona doznaje przesunięcia w dół.



Rys. 26.1: Przesłona P jest na rolkach i może się przesuwac w górę lub w dół. Mierząc jej przesunięcie można zmierzyć wartość składowej pionowej pędu przekazanego płycie w wyniku ugięcia strumienia cząstek przechodzących przez otwory.

Pozwalamy cząstkom nadbiegać pojedynczo i oczekujemy, że po pewnym czasie na ekranie powstaną prążki interferencyjne. Dzięki pomiarom przesunięć przesłony przy przejściu kolejnych cząstek możemy próbować określić, przez którą szczelinę przeszła dana cząstka. Zwracamy uwagę, że w tym rozumowaniu musi być jakaś sprzeczność, bowiem wiemy z doświadczenia, że określenie którędy przeszły kolejne cząstki powinno niszczyć obraz interferencyjny. Nasz błąd polega na tym, że w powyższym rozumowaniu przyjęliśmy, iż cząstki mają naturę kwantowo-mechaniczną, zaś przesłonę potraktowaliśmy jako obiekt klasyczny. Przeprowadzimy teraz "porządną" analizę opisanego eksperymentu.

Aby rozstrzygnąć, przez którą szczelinę przeszła cząstka, błąd pomiaru Δp pędu przesłony musi być dużo mniejszy niż różnica pędów $p_x^{(1)}$ i $p_x^{(2)}$ (żeby rozróżnić kąty θ_1 i θ_2)

$$\Delta p \ll |p_x^{(1)} - p_x^{(2)}|. \quad (26.24)$$

Traktując przesłonę jako obiekt także kwantowy, stosujemy do niej zasadę nieoznaczoności. Znów chodzi nam o oszacowania, więc ponownie posłużymy się zasadą nieoznaczoności w intuicyjnej postaci (5.34). Szacujemy nieokreśloność jej położenia

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{|p_x^{(1)} - p_x^{(2)}|}. \quad (26.25)$$

Z geometrii zagadnienia (patrz rys. 26.1) wynika, że dla małych kątów

$$\sin \theta_1 \approx \frac{x - a/2}{d}, \quad \sin \theta_2 \approx \frac{x + a/2}{d}, \quad (26.26)$$

gdzie x to współrzędna uderzenia cząstki w ekran (punkt M), zaś d to odległość pomiędzy ekranem a przesłoną. Ponieważ kąty są małe, na mocy (26.23), możemy napisać

$$\begin{aligned} |p_x^{(1)} - p_x^{(2)}| &= p_0 |\sin \theta_1 - \sin \theta_2| \approx p_0 |\theta_1 - \theta_2| \\ &\approx p_0 \left| \frac{x - a/2}{d} - \frac{x + a/2}{d} \right| = \frac{p_0 a}{d}. \end{aligned} \quad (26.27)$$

Pęd cząstki padającej p_0 wyrażamy teraz za pomocą postulatu de Broglie'a $p_0 = h/\lambda$, wobec czego z oszacowania (26.27) otrzymujemy

$$|p_x^{(1)} - p_x^{(2)}| \approx \frac{ha}{\lambda d}. \quad (26.28)$$

Wynik ten podstawiamy do oszacowania (26.25) dla nieokreśloności położenia przesłony. Otrzymujemy więc

$$\Delta x \geq \frac{\hbar \lambda d}{ha} \approx \frac{\lambda d}{a}. \quad (26.29)$$

Z elementarnej teorii interferencji wiemy jednak, że iloraz $\lambda d/a$ to nic innego niż odległość pomiędzy prążkami interferencyjnymi. Wnioskujemy więc, że określenie położenia pionowego przesłony odbywa się z dokładnością gorszą niż odległość prążków, co w oczywisty sposób musi prowadzić do zupełnego "rozmazania" obrazu interferencyjnego.

Podsumowując stwierdzamy, że aby określić przez którą szczeliną przeszła cząstka powinien być spełniony warunek (26.24). Oszacowanie Δx w (26.29) uzyskaliśmy przy słabszym ograniczeniu, bowiem wzięliśmy zamiast (26.24) równość. A więc ostrzejszy wymóg nałożony na Δp tym bardziej pogorszy Δx – zwiększy je znacznie ponad oszacowanie (26.29), co tym bardziej popsuje obraz interferencyjny. Doświadczenie rozstrzygające którądy przejdzie cząstka nie może jednocześnie doprowadzić do powstania obrazu interferencyjnego. I na odwrót, jeśli mamy obraz interferencyjny, to nie możemy określić, przez którą szczelinę przeszła kolejna cząstka.

"Wiedza o tym, którądy przeszła cząstka niszczy prążki interferencyjne".
