

## Zadania domowe: Seria 3

### Zadanie 3.1. (Operatorowy model momentu pędu)(1.42)

Niech operatory hermitowskie  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  spełniają następujące trzy związki komutacyjne:

$$(i) \quad [\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad (ii) \quad [\hat{B}, \hat{C}] = i\hat{A}, \quad (iii) \quad [\hat{C}, \hat{A}] = i\hat{B},$$

Definiujemy operator  $\hat{T} = \hat{B} + i\hat{C}$ . Obliczyć następujące komutatory:

$$\begin{array}{lll} \text{a.) } [\hat{T}, \hat{T}^\dagger], & \text{b.) } [\hat{A}, \hat{T}], & \text{c.) } [\hat{T}^\dagger, \hat{A}], \\ \text{d.) } [\hat{A}^2, \hat{T}], & \text{e.) } [\hat{A}, (\hat{B}^2 + \hat{C}^2)]. \end{array}$$

### Zadanie 3.2. (Tożsamości Bakera–Hausdorffa)(1.40)

Niech  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  operatory spełniające relacje komutacyjne:  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]$ .

Pokazać, że:

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \exp\left(-\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]\right), \\ \text{b.) } e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} \exp\left(+\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]\right). \end{array}$$

### Zadanie 3.3. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.7)

Rozważamy przestrzeń  $L^2(a, b)$  funkcji całkowalnych w kwadracie na odcinku  $(a, b)$  (ściślej, podprzestrzeń funkcji falowych – znikających na brzegach przedziału). W przestrzeni tej mamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx f^*(x) g(x).$$

Udowodnić, że operator  $\hat{A}_F$  działający na tej przestrzeni i polegający na mnożeniu  $f \in L^2(a, b)$  przez funkcję  $F(x)$

$$(\hat{A}_F f)(x) = F(x)f(x)$$

jest hermitowski, tj.  $\hat{A}_F = \hat{A}_F^\dagger$ .

### Zadanie 3.4. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.8)

Udowodnić, że operator  $-i \frac{d}{dx}$  na przestrzeni  $L^2(a, b)$  jest operatorem hermitowskim. Podać pełny dowód (tzn. nie korzystać z żadnych stwierdzeń pomocniczych).

### Zadanie 3.5. (Operatory położenia i pędu)(1.27)

Znaleźć operator sprzężony do operatora  $\hat{D}_x = \frac{d}{dx}$  (działającego w przestrzeni funkcji falowych – funkcji całkowalnych w kwadracie z odpowiednimi warunkami brzegowymi).

### Zadanie 3.6. (Operatory położenia i pędu)(1.28)

Zbadać przemienność następujących operatorów:  $\hat{A} = x$ ,  $\hat{B} = \frac{d}{dx}$ .

**Zadanie 3.7.** (Operatory położenia i pędu)(1.29)

Podnieść do kwadratu operator  $\hat{A} = \frac{d}{dx} + x$ .

---

**Zadanie 3.8.** (Operatory położenia i pędu)(1.30)

Obliczyć trzecią potęgę operatora  $\hat{A} = \frac{d}{dx} + \frac{1}{x}$ .

---

**Zadanie 3.9.** (Operatory położenia i pędu)(1.31)

Obliczyć komutator  $[(\hat{Q} + \hat{D}), (\hat{Q} - \hat{D})]$ , gdzie  $\hat{Q} = x$  oraz  $\hat{D} = \frac{d}{dx}$ .

---

**Zadanie 3.10.** (Operatory położenia i pędu)(1.32)

Obliczyć komutator operatorów  $\hat{A} = e^{ix}$  oraz  $\hat{B} = e^{-ix} \frac{d}{dx}$ .

---

**Zadanie 3.11.** (Operatory położenia i pędu)(1.33)

Porównać operatory:  $\hat{A}^2 = \left(x \frac{d}{dx}\right)^2$ , oraz  $\hat{B}^2 = \left(\frac{d}{dx} x\right)^2$ .

---

**Zadanie 3.12.** (Operator translacji)(1.41) Niech  $\hat{Q}$ ,  $\hat{P}$  – operatory hermitowskie położenia i pędu. Spełniają one relację komutacyjną  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ . Na tej podstawie udowodnić, że dla rzeczywistego parametru  $x$  zachodzi relacja:

$$\exp\left[\frac{ix}{\hbar} \hat{P}\right] \hat{Q} \exp\left[-\frac{ix}{\hbar} \hat{P}\right] = \hat{Q} + x.$$

Dlatego też operator  $\exp\left[\frac{ix}{\hbar} \hat{P}\right]$  bywa nazywany operatorem translacji.

---

\* \* \* \* \*