

Zadania domowe: Seria 1

Zadanie 1.1. (Macierze Pauliego cz.1)(1.43)

Znaleźć unormowane wektory własne i wartości własne dla operatorów

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 1.2. (Macierz \hat{S}_y spinu 1)(1.44)

Dany jest wypisany obok operator.

A.) Zbadać, czy operator ten jest hermitowski.

B.) Obliczyć wartości własne tego operatora.

C.) Znaleźć odpowiednie wektory własne.

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 1.3. (Operatory i ich własności)(1.1)

Niech \hat{A} oraz \hat{B} będą operatorami. Sprowadzić do prostszej postaci wyrażenie:

$$\hat{B}^2 + (\hat{A} - \hat{B})(\hat{A} + \hat{B}) - \hat{A}^2.$$

Zadanie 1.4. (Elementarne własności operatorów)(1.2)

Wykazać, że o ile istnieją operatory odwrotne do operatorów \hat{A} i \hat{B} to spełniona jest relacja $(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$.

Zadanie 1.5. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.3)

Wykazać, że:

A.) Wartości własne operatora hermitowskiego są rzeczywiste.

B.) Wektory własne $|f_1\rangle$ i $|f_2\rangle$ odpowiadające dwóm różnym wartościom własnym są ortogonalne.

Zadanie 1.6. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.4)

Zbadać hermitowskość następujących operatorów:

$$\begin{array}{ll} \text{a.) } \hat{A} + \hat{A}^\dagger, & \text{b.) } \hat{A}\hat{A}^\dagger, \\ \text{c.) } \hat{A} - \hat{A}^\dagger, & \text{d.) } i(\hat{A} - \hat{A}^\dagger), \end{array}$$

gdzie \hat{A} jest dowolnym operatorem liniowym.

Zadanie 1.7. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.5)

Zbadać hermitowskość następujących operatorów:

$$\begin{array}{llll} \text{a.) } \hat{H} + \hat{K}^\dagger, & \text{b.) } \hat{H}\hat{K}^\dagger, & \text{c.) } \hat{H}\hat{K}\hat{H}, & \text{d.) } \hat{H}^n, \\ \text{e.) } [\hat{H}, \hat{K}]_+, & \text{f.) } [\hat{H}, \hat{K}], & \text{g.) } i[\hat{H}, \hat{K}], & \end{array}$$

gdzie \hat{H} i \hat{K} są dowolnymi operatorami hermitowskimi, zaś $[\cdot, \cdot]$ oraz $[\cdot, \cdot]_+$ oznaczają odpowiednio komutator i antykomutator dwóch operatorów.

Zadanie 1.8. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.6)

Niech \hat{H} będzie operatorem hermitowskim, dla którego istnieją operatory odwrotne \hat{H}^{-1} oraz $(\hat{H}^\dagger)^{-1}$. Udowodnić, że

$$\text{a.) } (\hat{H}^\dagger)^{-1} = (\hat{H}^{-1})^\dagger, \quad \text{b.) } (\hat{H}^\dagger)^{-1} = \hat{H}^{-1}.$$

Zadanie 1.9. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.9)

Jakie warunki muszą spełniać operatory hermitowskie \hat{K} i \hat{H} , na to, aby operator $\hat{A} = \hat{H} + i\hat{K}$ był operatorem:

- a.) normalnym,
- b.) unitarnym,
- c.) spełniającym relację: $[\hat{A}^\dagger, \hat{A}] = 2\hat{C}$.

gdzie \hat{C} jest pewnym ustalonym (znanym) operatorem.

Zadanie 1.10. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.10)

Jaki warunek (warunki) musi spełniać operator hermitowski na to, aby jednocześnie był unitarny. Omówić uzyskane wyniki.

Zadanie 1.11. (Funkcje operatorowe, itp.)(1.35)

Zakładamy, że istnieje operator \hat{A}^{-1} odwrotny do danego. Udowodnić przez indukcję, że: $(\hat{A}^n)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^n$.

Zadanie 1.12. (Funkcje operatorowe, itp.)(1.36)

Wykazać relację $\hat{A} \hat{B}^n \hat{A}^{-1} = (\hat{A} \hat{B} \hat{A}^{-1})^n$.

Zadanie 1.13. (Funkcje operatorowe, itp.) (1.37)

Zakładamy, że dla danego operatora \hat{A} istnieje operator $(1 - \hat{A})^{-1}$. Pokazać, że

$$(1 - \hat{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n.$$

Zadanie 1.14. (Funkcje operatorowe, itp.)(1.38)

Niech \hat{A} , \hat{B} operatory. $\xi \in \mathbb{C}$, zaś $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że zachodzi związek

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B}^n e^{-\xi \hat{A}} = \left[e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} \right]^n.$$

Zadanie 1.15. (Funkcje operatorowe, itp.)(1.39)

Udowodnić, że zachodzi następująca relacja operatorowa:

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} = \hat{B} + \xi [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\xi^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{\xi^3}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots,$$

gdzie $\xi \in \mathbb{C}$. Zwróćmy uwagę, że relacja ta przypomina rozwinięcie Taylora.
