

Rozdział 37

(U.16) Dodawanie momentów pędu

37.1 Złożenie orbitalnego momentu pędu i spinu 1/2

37.1.1 Przejście do bazy sprzężonej

W praktycznych zastosowaniach potrzebujemy często złożenia orbitalnego momentu pędu i spinu 1/2. Rozważamy więc operator całkowitego momentu pędu

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad (37.1)$$

przy czym $l \geq 0$, zaś $s = \frac{1}{2}$. Problem z $l = 0$ jest trywialny, co zresztą dalej przedyskutujemy, bowiem dla tego przypadku mamy jedyną możliwość $J = s = \frac{1}{2}$, $M = m_s = \pm \frac{1}{2}$. Bez straty ogólności możemy więc przyjąć $l > 0$.

Chcemy skonstruować bazę sprzężoną za pomocą wektorów bazy niesprężonej. Przypominamy, że liczby kwantowe $l > 0$ i $s = \frac{1}{2}$ są ustalone. Szukamy więc związków

$$|j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}; JM\rangle = \sum_{m_l} \sum_{m_s} C_{l, m_l; \frac{1}{2}, m_s}^{JM} |l, m_l; \frac{1}{2}, m_s\rangle, \quad (37.2)$$

gdzie liczby kwantowe J oraz M są połówkowe. W sumie tej efektywnie są tylko dwa składniki. Wynika to stąd, że musi być spełniony warunek (18.84), który mówi, że nie znikają tylko te współczynniki Clebscha-Gordana (CG), dla których $M = m_1 + m_2 = m_l + m_s$. Ponieważ mamy tylko dwie możliwości $m_s = \pm \frac{1}{2}$, więc przy wybranym M (ustalonym po lewej stronie) automatycznie $m_l = M \pm \frac{1}{2}$. Wobec tego zamiast (37.2) piszemy

$$\begin{aligned} |j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}; JM\rangle &= C_{l, M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}}^{JM} |l, M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ &+ C_{l, M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{JM} |l, M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.3)$$

Dla danych J i M mamy tylko dwa niezerowe współczynniki CG. Liczba J może przyjmować (co wynika z nierówności trójkąta) tylko dwie wartości $J = l \pm \frac{1}{2}$, więc problem sprowadza się do obliczenia czterech współczynników CG. Zmierzamy zatem do wypełnienia tabelki

$C_{l, m_l; \frac{1}{2}, m_s}^{J, M}$	$j_1 = l$ $m_l = M - \frac{1}{2}$	$j_2 = s = \frac{1}{2}$ $m_s = \frac{1}{2}$	$j_1 = l$ $m_l = M + \frac{1}{2}$	$j_2 = s = \frac{1}{2}$ $m_s = -\frac{1}{2}$
$J = l + \frac{1}{2}, M$				
$J = l - \frac{1}{2}, M$				

(37.4)

Zanim przystąpimy do konstrukcji elementów tabeli, przypomnijmy zasadnicze warunki:

- liczby kwantowe $j_1 = l$, $j_2 = s = \frac{1}{2}$ są ustalone;
- J przyjmuje tylko dwie wartości: $J = l + \frac{1}{2}$ i $J = l - \frac{1}{2}$. Stąd wynika, że tabela ma tylko dwa wiersze.
- Wybierając M i wiedząc, że $m_s = \pm \frac{1}{2}$, automatycznie ustalamy $m_l = M \mp \frac{1}{2}$. Stąd mamy tylko dwie kolumny.

Fakty te wyczerpują dostępne parametry, a więc określają rozmiar poszukiwanej tabelki. Cztery wolne miejsca zajmują współczynniki CG, które będziemy teraz obliczać.

37.1.2 Obliczenia współczynników CG

A. Obliczenia dla $J = l + \frac{1}{2}$

Niech $J = l + \frac{1}{2}$. Maksymalne dopuszczalne M to $M = l + \frac{1}{2}$. Stan taki jest tylko jeden. Nietrudno więc dokonać utożsamienia wektorów bazy sprzężonej i niesprzężonej

$$|l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l + \frac{1}{2}\rangle = |l, m_l = l; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle. \quad (37.5)$$

Podziałajmy na lewą stronę powyższej relacji operatorem obniżającym \hat{J}_- , a na prawą równym mu operatorem $\hat{L}_- + \hat{S}_-$, a zatem mamy

$$\hat{J}_- |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l + \frac{1}{2}\rangle = (\hat{L}_- + \hat{S}_-) |l, m_l = l; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle. \quad (37.6)$$

W myśl ogólnych reguł obniżania magnetycznej liczby kwantowej dostajemy

$$\begin{aligned} & \sqrt{(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2}) - (l + \frac{1}{2})(l - \frac{1}{2})} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l - \frac{1}{2}\rangle \\ &= \sqrt{l(l+1) - l(l-1)} |l, m_l = l-1; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} |l, m_l = l; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.7)$$

W wyniku elementarnych uproszczeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l - \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} |l, m_l = l-1; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2l+1}} |l, m_l = l; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Powtarzamy procedurę. Z lewej strony (37.8) działamy operatorem \hat{J}_- , a z prawej sumą $\hat{L}_- + \hat{S}_-$. Zwróćmy uwagę, że \hat{S}_- działając na stan $|l, m_l = l; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$ daje zero. Wobec tego, z (37.8) mamy dalej

$$\begin{aligned} & \hat{J}_- |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l - \frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} \hat{L}_- |l, m_l = l-1; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\ &+ \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} \hat{S}_- |l, m_l = l-1; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \hat{L}_- |l, m_l = l; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.9)$$

Wiemy, jak działają operatory obniżające. A więc uzyskujemy

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2}) - (l - \frac{1}{2})(l - \frac{3}{2})} \quad |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l - \frac{3}{2}\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} \sqrt{l(l+1) - (l-1)(l-2)} \quad |l, m_l = l-2; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
 &+ \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} \quad |l, m_l = l-1; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \sqrt{l(l+1) - l(l-1)} \quad |l, m_l = l-1; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \quad (37.10)
 \end{aligned}$$

Dwa ostatnie składniki zawierają ten sam wektor, różnią się jedynie współczynnikiem liczbowym. Powyższa relacja zawiera więc faktycznie tylko dwa wektory (tak jak to wynika z dyskusji odnośnie tabelki, którą mamy uzupełnić). Wykonujemy elementarne przekształcenia uproszczenia współczynników i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l - \frac{3}{2}\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{2l-1}{2l+1}} \quad |l, m_l = l-2; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
 &+ \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \quad |l, m_l = l-1; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \quad (37.11)
 \end{aligned}$$

Na podstawie dwóch kroków zgadujemy

$$\begin{aligned}
 |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M\rangle &= \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \quad |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
 &+ \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \quad |l, m_l = M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \quad (37.12)
 \end{aligned}$$

Oczywiście dopuszczalna wartość liczby kwantowej M przebiega od $(l+\frac{1}{2})$ do $-(l+\frac{1}{2})$, zmieniając się z krokiem 1. Powyższą relację trzeba sprawdzić. Zrobimy to metodą indukcji matematycznej względem liczby M . Nietrudno zauważyć, że wzory (37.5) dla $M = l + \frac{1}{2}$, a także (37.11) dla $M = l - \frac{1}{2}$ są szczególnymi przypadkami (37.12). Pierwszy krok indukcji jest zatem spełniony, relacja (37.12) jest słuszna dla dwóch wartości M . Zakładamy więc słuszność (37.12) dla pewnego M . Pokażemy, że wynika stąd analogiczna relacja dla M o jeden mniejszego. Aby to wykazać, działamy jak poprzednio. Działamy operatorem J_- z lewej, a operatorem $L_- + S_-$ z prawej. Wobec tego z (37.12) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \hat{J}_- |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \hat{L}_- |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
 &+ \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \hat{S}_- |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
 &+ \sqrt{\frac{l-M-\frac{1}{2}}{2l+1}} \hat{L}_- |l, m_l = M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle, \quad (37.13)
 \end{aligned}$$

gdzie znowu operator S_- w działaniu na ostatni dał zero. Dalej dostajemy

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2}) - M(M - 1)} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M - 1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{l + M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \sqrt{l(l + 1) - (M - \frac{1}{2})(M - \frac{3}{2})} |l, m_l = M - \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{l + M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)} |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{l - M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \sqrt{l(l + 1) - (M + \frac{1}{2})(M - \frac{1}{2})} \\
&\quad \times |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle.
\end{aligned} \tag{37.14}$$

Znów zauważamy, że ostatnie dwa człony łączą się. Przez wymnożenie sprawdzamy słuszność wzoru $j(j + 1) - m(m - 1) = (j + m)(j - m + 1)$, dzięki czemu otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(l + M + \frac{1}{2})(l - M + \frac{3}{2})} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M - 1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{l + M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \sqrt{(l + M - \frac{1}{2})(l - M + \frac{3}{2})} |l, m_l = M - \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
&+ \left[\sqrt{\frac{l + M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} + \sqrt{\frac{l - M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \sqrt{(l + M + \frac{1}{2})(l - M + \frac{1}{2})} \right] \\
&\quad \times |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle.
\end{aligned} \tag{37.15}$$

Czynnik $\sqrt{l + M + \frac{1}{2}}$ się upraszcza

$$\begin{aligned}
& \sqrt{l - M + \frac{3}{2}} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M - 1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{(l + M - \frac{1}{2})(l - M + \frac{3}{2})}{2l + 1}} |l, m_l = M - \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2l + 1}} \left[1 + l - M + \frac{1}{2} \right] |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle.
\end{aligned} \tag{37.16}$$

Znów upraszcza się czynnik, tym razem $\sqrt{l - M + \frac{3}{2}}$, więc otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M - 1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{l + M - \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l, m_l = M - \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{l - M + \frac{3}{2}}{2l + 1}} |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle.
\end{aligned} \tag{37.17}$$

Przepiszmy powyższy rezultat w nieco innej postaci, a mianowicie

$$\begin{aligned}
& |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M - 1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{l + (M - 1) + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l, m_l = M - \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{l - (M - 1) + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle,
\end{aligned} \tag{37.18}$$

co stanowi dokładnie zgadniętą formułę (37.12) tyle, że teraz mamy w niej $M - 1$. Na mocy zasady indukcji "zgadnięty" wzór jest udowodniony. Zestawiając formułę (37.12) ze wzorem (37.3) odczytujemy dwa współczynniki CG (dla $J = l + \frac{1}{2}$)

$$C_{l, M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}}^{J=l+\frac{1}{2}, M} = \sqrt{\frac{l + M + \frac{1}{2}}{2l + 1}}, \quad (37.19a)$$

$$C_{l, M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{J=l+\frac{1}{2}, M} = \sqrt{\frac{l - M + \frac{1}{2}}{2l + 1}}. \quad (37.19b)$$

Obliczenia dla $J = l + \frac{1}{2}$ zostały zakończone. Możemy w zasadzie już teraz wypełnić pierwszy wiersz tabeli (37.4).

B. Obliczenia dla $J = l - \frac{1}{2}$

Przechodzimy do obliczeń współczynników CG w rozkładzie (37.3), w którym tym razem, po lewej stronie występuje $J = l - \frac{1}{2}$. Obliczenia znów rozpoczynamy od przypadku, gdy M jest maksymalne. Sytuacja jest teraz nieco gorsza, bowiem maksymalna wartość $M_{max} = l - \frac{1}{2}$, odpowiada dwóm możliwościom: $m_l = l$ i $m_s = -\frac{1}{2}$, lub $m_l = l - 1$ i $m_s = \frac{1}{2}$. Spodziewamy się więc rozkładu

$$\begin{aligned} |l, \frac{1}{2}; J = l - \frac{1}{2}, M = l - \frac{1}{2}\rangle \\ = A |l, m_l = l - 1, \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle + B |l, m_l = l, \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned} \quad (37.20)$$

gdzie liczby A i B trzeba obliczyć. Powyższa kombinacja liniowa zawiera te same wektory co stan $|l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M = l - \frac{1}{2}\rangle$ obliczony w (37.8). Wektory te powinny więc być ortogonalne. Co więcej stan (37.20) musi być unormowany. Mamy zatem dwa równania na stałe A i B

$$A \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} + \frac{B}{\sqrt{2l+1}} = 0, \quad \text{oraz} \quad |A|^2 + |B|^2 = 1. \quad (37.21)$$

Układ ten nie wystarcza do wyznaczenia obu liczb A i B , które są w ogólności zespolone. Ich faza jest jednakowa (co widać z pierwszego równania), lecz nie określona. Obliczenia modułów prowadzą do

$$A = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2l+1}}, \quad \text{oraz} \quad B = -\frac{e^{i\alpha} \sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}}, \quad (37.22)$$

zaś fazę ustalimy później. Podstawmy te rezultaty do wzoru (37.20), otrzymujemy

$$\begin{aligned} |l, \frac{1}{2}; J = l - \frac{1}{2}, M = l - \frac{1}{2}\rangle \\ = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2l+1}} |l, m_l = l - 1, \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle \\ - \frac{e^{i\alpha} \sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} |l, m_l = l, \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.23)$$

W myśl konwencji o fazie współczynników CG

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2 = J - j_1}^{JJ} = \langle j_1 m_1 = j_1; j_2 m_2 = J - j_1 | j_1 j_2; J M = J \rangle, \quad (37.24)$$

powinien być rzeczywisty i dodatni. W naszym przypadku mamy odpowiedniości: $j_1 = l$, $m_1 = l$, $j_2 = \frac{1}{2}$ oraz $m_2 = J - j_1 = (l - \frac{1}{2}) - l = -\frac{1}{2}$. Widzimy więc, że w myśl konwencji, współczynnik

przy drugim z wektorów kombinacji (37.23) powinien być rzeczywisty, dodatni. Wynika stąd wybór fazy: $e^{i\alpha} = -1$ i z (37.23) dostajemy

$$\begin{aligned} |l, \tfrac{1}{2}; J = l - \tfrac{1}{2}, M = l - \tfrac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2l+1}} |l, m_l = l-1, \tfrac{1}{2}, m_s = \tfrac{1}{2}\rangle \\ &+ \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l+1}} |l, m_l = l, \tfrac{1}{2}, m_s = -\tfrac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.25)$$

Znaleźliśmy więc współczynniki CG dla $J = l - \frac{1}{2}$, gdy liczba $M = l - \frac{1}{2}$ jest maksymalna. Możemy więc teraz stosować (jak poprzednio) operatory obniżające, aby wyznaczyć następne współczynniki. Wybierzemy jednak inny sposób obliczeń.

Zauważmy, że z (37.3) wynika, że

$$\begin{aligned} |l, \tfrac{1}{2}; J = l - \tfrac{1}{2}, M\rangle &= A |l, m_l = M - \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, m_s = +\tfrac{1}{2}\rangle \\ &+ B |l, m_l = M + \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, m_s = -\tfrac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.26)$$

gdzie A i B są odpowiednimi współczynnikami CG, zaś M leży pomiędzy $(l - \frac{1}{2})$ a $-(l - \frac{1}{2})$. Wektor ten musi być unormowany i ortogonalny do wektora $|l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M\rangle$ – o tej samej liczbie M , ale o J o jeden większym wyznaczonego już w (37.12). Otrzymamy w ten sposób dwa równania, które pozwolą obliczyć moduły liczb A i B . Fazy znajdziemy na podstawie uważnej dyskusji. Możemy domyślać się, że A będzie ujemne, zaś $B > 0$, jak to miało miejsce powyżej. Trzeba jednak przeprowadzić obliczenia. Normowanie wektora (37.26) daje warunek

$$|A|^2 + |B|^2 = 1. \quad (37.27)$$

Ortogonalność wektorów (37.12) i (37.26) prowadzi zaś do równania

$$A \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} + B \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} = 0. \quad (37.28)$$

Rozwiązania układu dwóch powyższych równań są teraz następujące

$$A = e^{i\alpha} \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}}, \quad B = -e^{i\alpha} \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}}. \quad (37.29)$$

Podstawiając je do (37.26) dostajemy

$$\begin{aligned} |l, \tfrac{1}{2}; J = l - \tfrac{1}{2}, M\rangle &= e^{i\alpha} \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m_l = M - \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, m_s = +\tfrac{1}{2}\rangle \\ &- e^{i\alpha} \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m_l = M + \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, m_s = -\tfrac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.30)$$

Fazę określimy, żądając, aby uzyskany wynik odtwarzał (37.25) jeśli położymy $M = l - \text{pol.}$ Widzimy, że musi być $e^{i\alpha} = -1$ (czyli $A < 0$ i $B > 0$, tak jak oczekiwaliśmy). A zatem mamy

$$\begin{aligned} |l, \tfrac{1}{2}; J = l - \tfrac{1}{2}, M\rangle &= -\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m_l = M - \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, m_s = +\tfrac{1}{2}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} |l, m_l = M + \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, m_s = -\tfrac{1}{2}\rangle, \end{aligned} \quad (37.31)$$

co oczywiście kończy obliczenia współczynników CG dla $J = l - \frac{1}{2}$. Współczynniki w (37.31) tworzą drugi wiersz tabeli (37.4).

C. Tabela współczynników Clebscha–Gordana

Skonstruowaliśmy współczynniki Clebscha–Gordana składając orbitalny moment pędu \vec{L} oraz spinowy \vec{S} , przy czym liczby kwantowe określające \vec{L} są dowolne (oczywiście $l \geq 0$ jest całkowite, zaś m , dla ustalonego l , przebiega zbiór $(-l, -l+1, \dots, l-1, l)$), natomiast spin ma wartość $s = 1/2$, a jego rzut na oś z wynosi $m_s = \pm 1/2$. Jedyne dopuszczalne wartości liczby J to $(l \pm \frac{1}{2})$, przy M przebiegającym od $(l \pm \frac{1}{2})$ do $-(l \pm \frac{1}{2})$. Uzyskane współczynniki pozwalają wypełnić tabelę (37.4), która przybiera postać

$C_{l m_l, \frac{1}{2} m_s}^{J, M}$	$j_1 = l$	$j_2 = s = \frac{1}{2}$	$j_1 = l$	$j_2 = s = \frac{1}{2}$
	$m_l = M - \frac{1}{2}$	$m_s = \frac{1}{2}$	$m_l = M + \frac{1}{2}$	$m_s = -\frac{1}{2}$
$J = l + \frac{1}{2}, M$	$\sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$		$\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	
$J = l - \frac{1}{2}, M$	$-\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$		$\sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	

(37.32)

Współczynniki zebrane w tabeli pozwalają jawnie zapisać relację (37.3) dla dwóch możliwych przypadków $J = l \pm \frac{1}{2}$. Zapiszemy je w postaci macierzowej w następujący sposób

$$\begin{pmatrix} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M \rangle \\ |l, \frac{1}{2}; J = l - \frac{1}{2}, M \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \\ -\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2} \rangle \\ |l, m_l = M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}, \quad (37.33)$$

dzięki czemu możemy zobaczyć, że współczynniki CG, mimo skomplikowanego zapisu, tworzą macierz pozwalającą przechodzić od jednej bazy do drugiej (w tym wypadku od niesprężonej $|l, m_l; s, m_s\rangle$ do sprężonej $|l, s; J, M\rangle$).

Przypadek $l = 0$

W powyższych rozważaniach zakładaliśmy $l > 0$. Trzeba więc je uzupełnić uwzględniając przypadek $l = 0$. Gdy $l = 0$, wówczas $m_l = 0$, a ponadto jedyną możliwością dla liczby J jest $J = \frac{1}{2}$. Tym samym wektor wynikający z drugiego wiersza (37.33) nie ma sensu i pozostaje tylko pierwszy wiersz. Biorąc go dla $l = 0$ dostajemy

$$\begin{aligned} |0, \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M \rangle &= \sqrt{M + \frac{1}{2}} |0, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2} \rangle \\ &+ \sqrt{-M + \frac{1}{2}} |0, m_l = M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} \rangle. \end{aligned} \quad (37.34)$$

Ponieważ $J = \frac{1}{2}$, więc $M = \pm \frac{1}{2}$. Mamy więc dwa możliwe przypadki.

- $M = +\frac{1}{2}$. Współczynnik w drugim składniku zeruje się, co jest o tyle pomyślne, że składnik ten zawierałby ket, w którym $l = 0$, zaś $m_l = 1$, co jest niemożliwe. tak więc pozostaje nam

$$\begin{aligned} |0, \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M = +\frac{1}{2} \rangle &= |0, m_l = 0; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2} \rangle \\ &= |s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2} \rangle. \end{aligned} \quad (37.35)$$

- $M = -\frac{1}{2}$. Teraz zeruje się współczynnik pierwszego składnika, co zapewnia, że ket z $l = 0$ i $m_l = -1$ nie daje wkładu. Zostaje więc

$$\begin{aligned} |0, \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M = -\frac{1}{2}\rangle &= |0, m_l = 0; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle \\ &= |s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.36)$$

Oczywiście wyniki te są trywialne, wektory bazy sprzężonej po prostu pokrywają się ze stanami spinowymi (bowiem nie ma orbitalnego momentu pędu). Równania (37.35) i (37.36) trudno więc nazwać nieoczekiwanymi. Wynikają one jednak z ogólnego formalizmu, co potwierdza jego wewnętrzną spójność.

37.1.3 Stany bazy sprzężonej w reprezentacji położeniowej

Stany bazy niesprzężonej występujące po prawej stronie wzoru (37.33) są złożeniem stanów $|l m_l\rangle$ orbitalnego momentu pędu i stanów spinowych $|s = \frac{1}{2}, m_s\rangle$. Stany własne \vec{L} – formalne wektory z przestrzeni Hilberta możemy wyrazić w reprezentacji położeniowej, zaś stany spinowe w reprezentacji (17.20), tj. "słupków" z \mathbb{C}^2 . Wobec tego, pierwszy wiersz relacji (37.33) zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \Psi_{l,s=\frac{1}{2}; J=l+\frac{1}{2}, M}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \langle \theta \varphi | l, m_l = M - \frac{1}{2} \rangle \langle s_z | \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2} \rangle \\ &+ \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \langle \theta \varphi | l, m_l = M + \frac{1}{2} \rangle \langle s_z | \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} \rangle, \end{aligned} \quad (37.37)$$

gdzie $\langle s_z | s, m_s \rangle$ oznacza odpowiedni wektor z \mathbb{C}^2 . Stany własne \vec{L} w reprezentacji położeniowej to harmoniki sferyczne, zatem

$$\begin{aligned} \Psi_{l,s=\frac{1}{2}; J=l+\frac{1}{2}, M}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l, M-\frac{1}{2}}(\theta \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l, M+\frac{1}{2}}(\theta \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37.38)$$

W pełni analogiczne podstawienia przeprowadzamy w drugim wierszu wyrażenia (37.33), otrzymując tym razem

$$\begin{aligned} \Psi_{l,s=\frac{1}{2}; J=l-\frac{1}{2}, M}(\vec{r}) &= -\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \langle \theta \varphi | l, m_l = M - \frac{1}{2} \rangle \langle s_z | \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2} \rangle \\ &+ \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \langle \theta \varphi | l, m_l = M + \frac{1}{2} \rangle \langle s_z | \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} \rangle \\ &= -\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l, M-\frac{1}{2}}(\theta \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l, M+\frac{1}{2}}(\theta \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37.39)$$

Podsumowując, stany bazy sprzężonej w reprezentacji położeniowej zapisujemy w postaci spinorów

$$\Psi_{l,s=\frac{1}{2}; J=l+\frac{1}{2},M}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l,M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l,M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (37.40a)$$

$$\Psi_{l,s=\frac{1}{2}; J=l-\frac{1}{2},M}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l,M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{l,M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (37.40b)$$

37.1.4 Przykład zastosowania: $l = 1$ i $s = \frac{1}{2}$

Zastosujmy nasze ogólne rozważania do konkretnego przypadku. Zbadajmy złożenie momentu pędu \vec{L} ze spinem \vec{S} dla $l = 1$ ($m_l = -1, 0, 1$) i $s = \frac{1}{2}$ (czyli $m_s = \pm\frac{1}{2}$). Liczba J określająca całkowity moment pędu przyjmuje tylko 2 dozwolone wartości $J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$, dla których odpowiednio $M = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ lub $M = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. W tym przypadku przestrzenie stanów niesprężonych i sprzężonych są 6-cio wymiarowe ($(2l+1)(2s+1) = 3 \cdot 2 = 6$). Każdy z sześciu stanów sprzężonych jest kombinacją liniową stanów niesprężonych $|1, m_l; \frac{1}{2}, m_s\rangle$. Współczynnikami kombinacji są oczywiście współczynniki CG. Sporządzimy teraz tabelę tych współczynników. Przede wszystkim skorzystamy z tabeli (37.32) zaadaptowanej do badanego przypadku. Dla $l = 1$ otrzymujemy

$C_{1\,m_l, \frac{1}{2}\,m_s}^{J,M}$	$m_l = M - \frac{1}{2}$ $m_s = \frac{1}{2}$	$m_l = M + \frac{1}{2}$ $m_s = -\frac{1}{2}$
$J = \frac{3}{2}, \quad M$	$\sqrt{\frac{\frac{3}{2} + M}{3}}$	$\sqrt{\frac{\frac{3}{2} - M}{3}}$
$J = \frac{1}{2}, \quad M$	$-\sqrt{\frac{\frac{3}{2} - M}{3}}$	$\sqrt{\frac{\frac{3}{2} + M}{3}}$

(37.41)

Przestrzenie stanów są 6-cio wymiarowe, więc tabela wszystkich możliwych (dla $l = 1$ i $s = \frac{1}{2}$) współczynników CG będzie macierzą 6×6 . Kolumny macierzy uporządkujemy według malejącej liczby M . Przy jednakowym M , bardziej z lewa stoi kolumna z większym J . Wiersze macierzy porządkujemy według malejącego m_l , przy tym samym m_l wiersze są uporządkowane według

malejących liczb m_s . Tabela (macierz) współczynników CG dla złożenia $l = 1$ i $s = \frac{1}{2}$ ma postać

$C_{1m_1, \frac{1}{2}m_s}^{J,M}$	$J = \frac{3}{2}$ $M = \frac{3}{2}$	$J = \frac{3}{2}$ $M = \frac{1}{2}$	$J = \frac{1}{2}$ $M = \frac{1}{2}$	$J = \frac{3}{2}$ $M = -\frac{1}{2}$	$J = \frac{1}{2}$ $M = -\frac{1}{2}$	$J = \frac{3}{2}$ $M = -\frac{3}{2}$
$m_1 = 1, m_s = \frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0
$m_1 = 1, m_s = -\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	0
$m_1 = 0, m_s = \frac{1}{2}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	0	0
$m_1 = 0, m_s = -\frac{1}{2}$	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0
$m_1 = -1, m_s = \frac{1}{2}$	0	0	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
$m_1 = -1, m_s = -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1

(37.42)

Współczynniki CG wypisane w tabeli obliczamy w następujący sposób.

- Jeśli warunek $M = m_1 + m_s$ nie jest spełniony, to odpowiednie współczynniki CG są zerami. Sprawdzenie tego warunku dla poszczególnych pól tabeli prowadzi od razu do pojawienia się wielu zer. Co więcej, macierz dzieli się na 4 podmacierze (klatki) odpowiadające różnym wartościom M .
- $J = \frac{3}{2}, M = \frac{3}{2}$. Sytuacji tej odpowiada lewy górny wyraz tabeli pomocniczej (37.41). Daje on 1 w pierwszym wierszu pierwszej kolumny macierzy (37.42).
- Górna podmacierz 2×2 (w której $M = \frac{1}{2}$) wynika bezpośrednio z tabeli pomocniczej, którą jednak trzeba stosować uważnie ze względu na inny układ wierszy i kolumn.
- Dolna podmacierz 2×2 (w której $M = -\frac{1}{2}$) także wynika z uważnego zastosowania tabeli pomocniczej.
- Ostatnia kolumna $J = \frac{3}{2}, M = \frac{3}{2}$ wynika z prawego górnego wyrazu tabeli pomocniczej.

Przedstawiliśmy tu konstrukcję współczynników CG dla złożenia $l = 1$ i $s = \frac{1}{2}$. Nie ma przeszkód, by analogicznymi metodami przebadać złożenie np. $l = 2$ i $s = \frac{1}{2}$. Wymiar odpowiedniej macierzy rośnie i wynosi $(2l+1)(2s+1) = 10$. Wyliczenie elementów takiej macierzy jest bardziej pracochłonne, lecz koncepcyjnie nietrudne.

37.1.5 Stany bazy niesprężonej via stany sprzężone

Współczynniki CG pozwalają przejść z bazy niesprężonej do sprzężonej i na odwrót. Odwołujemy się do wzoru (18.94), który w rozważanej sytuacji pozwala napisać relację odwrotną do (37.3)

$$|l, m_l; s = \frac{1}{2}, m_s\rangle = \sum_{J=l\pm\frac{1}{2}} C_{l, m_l; \frac{1}{2}, m_s}^{J=l\pm\frac{1}{2}, M} |l, \frac{1}{2}; J, M\rangle, \quad (37.43)$$

gdzie suma ma tylko dwa składniki. Musi być spełniony warunek $M = m_l + m_s$, wobec tego mamy

$$\begin{aligned} |l, m_l = M - m_s; \frac{1}{2}, m_s\rangle &= C_{l, m_l = M - m_s; \frac{1}{2}, m_s}^{J=l+\frac{1}{2}, M} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M\rangle \\ &+ C_{l, m_l = M - m_s; \frac{1}{2}, m_s}^{J=l-\frac{1}{2}, M} |l, \frac{1}{2}; J = l - \frac{1}{2}, M\rangle. \end{aligned} \quad (37.44)$$

Zwróćmy uwagę, że kładąc kolejno $m_s = \pm \frac{1}{2}$ musimy z tabeli (37.32) odczytywać współczynniki CG kolumnami. W rezultacie otrzymujemy formułę podobną do (37.33)

$$\begin{pmatrix} |l, m_l = M - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\ |l, m_l = M + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} & -\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \\ \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |l, \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M\rangle \\ |l, \frac{1}{2}; J = l - \frac{1}{2}, M\rangle \end{pmatrix}, \quad (37.45)$$

co znów pokazuje macierzowy charakter współczynników CG.

37.1.6 Unitarność współczynników Clebscha–Gordana

Formuła (37.33) daje transformację od bazy niesprężonej (N) do sprężonej (S), zaś wzór (37.45) zadaje przejście w odwrotną stronę: $S \rightarrow N$. Macierze występujące w tych wyrażeniach mają strukturę

$$M_{N \rightarrow S} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad M_{S \rightarrow N} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (37.46)$$

Elementarne wymnożenie tych macierzy prowadzi do wniosku, że

$$\begin{aligned} M_{N \rightarrow S} \times M_{S \rightarrow N} &= M_{S \rightarrow N} \times M_{N \rightarrow S} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1} + \frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37.47)$$

Widzimy więc, że macierze te są wzajemnie odwrotne. Transformacja pomiędzy bazami jest ortogonalna, więc i unitarna. Nietrudno też sprawdzić, że relacje ortogonalności (18.86) pomiędzy wierszami macierzy $M_{N \rightarrow S}$ (patrz tabela (37.32)), lub analogiczna relacja (18.89) pomiędzy jej kolumnami, są ewidentnie spełnione.

37.1.7 Przykład zastosowania

Rozważmy stan atomu wodoropodobnego, który jest opisany funkcją falową

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{1,-1}(\theta, \varphi) \chi_+ + \frac{\sqrt{3}}{2} R_{21}(r) Y_{1,+1}(\theta, \varphi) \chi_-, \quad (37.48)$$

gdzie R_{21} to radialna funkcja falowa, y_{lm} są harmonikami sferycznymi, zaś χ_{\pm} to stany spinowe. Celem naszych rozważań jest obliczenie dwóch wartości oczekiwanych

$$\langle J_z \rangle = \langle \psi | J_z | \psi \rangle, \quad \text{oraz} \quad \langle \vec{J}^2 \rangle = \langle \psi | \vec{J}^2 | \psi \rangle. \quad (37.49)$$

Funkcja falowa (37.48) jest zapisana w reprezentacji położeniowej. Przedstawia ona stan, który jest kombinacją liniową

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2} |n=2, l=1, m_l=-1; s=\frac{1}{2}, m_s=+\frac{1}{2}\rangle \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} |n=2, l=1, m_l=+1; s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.50)$$

Przy obliczeniach wartości oczekiwanych (37.49) główna liczba kwantowa nie odgrywa roli, więc pominiemy je w dalszym ciągu naszych obliczeń. Stan $|\psi\rangle$ jest kombinacją liniową stanów bazy niesprężonej, dla której liczba kwantowa J odpowiadająca operatorowi \vec{J}^2 jest nieokreślona, choć wiemy, że może ona przyjmować tylko dwie wartości $J = l \pm \frac{1}{2}$. Aby obliczyć drugą z podanych wartości oczekiwanych musimy przejść do bazy sprężonej. Wartość oczekiwaną $\langle J_z \rangle$ można obliczać w obu bazach, bowiem ich wektory są stanami własnymi operatora J_z (patrz (18.45) i (18.46)).

Obliczenia $\langle J_z \rangle$ w bazie niesprężonej

Ponieważ $J_z = L_z + S_z$ więc z (37.50) od razu dostajemy

$$\begin{aligned} J_z |\psi\rangle &= \frac{1}{2} (L_z + S_z) |l=1, m_l = -1; s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} (L_z + S_z) |l=1, m_l = +1; s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.51)$$

Stany bazy niesprężonej są stanami własnymi L_z oraz S_z , więc

$$\begin{aligned} J_z |\psi\rangle &= \frac{1}{2} (-\hbar + \frac{1}{2}\hbar) |l=1, m_l = -1; s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} (\hbar - \frac{1}{2}\hbar) |l=1, m_l = +1; s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (37.52)$$

Po uporządkowaniu, obliczamy wartość oczekiwaną (nieco skracaając notację)

$$\begin{aligned} \langle J_z \rangle &= \langle \psi | J_z | \psi \rangle \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \langle 1, -1; \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} | + \frac{\sqrt{3}}{2} \langle 1, +1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \right\} \\ &\quad \left\{ -\frac{\hbar}{4} | 1, -1; \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle + \frac{\hbar\sqrt{3}}{4} | 1, +1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \right\} \end{aligned} \quad (37.53)$$

Obliczając iloczyny skalarne wektorów bazy niesprężonej korzystamy z ich ortonormalności i dostajemy

$$\langle J_z \rangle = -\frac{\hbar}{8} + \frac{3\hbar}{8} = \frac{\hbar}{4}, \quad (37.54)$$

co kończy obliczenia w bazie niesprężonej.

Stan $|\psi\rangle$ w bazie sprężonej

Stan $|\psi\rangle$ dany w (37.50) w bazie niesprężonej musimy teraz wyrazić w bazie sprężonej. W tym celu musimy jedynie dopasować liczby kwantowe i skorzystać ze wzoru (37.45).

- Stan $|l=1, m_l = -1; s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle$.
Musimy zawsze mieć $M = m_l + m_s$, zatem $M = -\frac{1}{2}$ i wobec tego $m_l = -1 = M - \frac{1}{2}$. Korzystamy z pierwszego wiersza wzoru (37.45)

$$\begin{aligned} |l=1, m_l = -1; s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}} |l=1, s = \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M\rangle \\ &- \sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}} |l=1, s = \frac{1}{2}; J = l - \frac{1}{2}, M\rangle \end{aligned} \quad (37.55)$$

Podstawiając właściwe liczby kwantowe i porządkując mamy

$$\begin{aligned}
 & |l = 1, m_l = -1; s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2}\rangle \\
 &\quad - \sqrt{\frac{2}{3}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M = -\frac{1}{2}\rangle
 \end{aligned} \tag{37.56}$$

- Stan $|l = 1, m_l = +1; s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$. Ponieważ zawsze $M = m_l + m_s$, zatem w tym przypadku $M = \frac{1}{2}$. Wobec tego $m_l = 1 = M + \frac{1}{2}$. Korzystamy z drugiego wiersza wzoru (37.45) i dostajemy

$$\begin{aligned}
 & |l = 1, m_l = 1; s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{l - M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = l + \frac{1}{2}, M\rangle \\
 &\quad + \sqrt{\frac{l + M + \frac{1}{2}}{2l + 1}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = l - \frac{1}{2}, M\rangle
 \end{aligned} \tag{37.57}$$

Biorąc liczby kwantowe właściwe dla tego przypadku, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & |l = 1, m_l = 1; s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{3}{2}, M = \frac{1}{2}\rangle \\
 &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M = \frac{1}{2}\rangle
 \end{aligned} \tag{37.58}$$

Analizowany stan $|\psi\rangle$ jest kombinacją (37.50) stanów w bazie niesprężonej. Podstawiamy więc (37.56) i (37.58) otrzymując kombinację

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{2} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{3}{2}, M = \frac{1}{2}\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M = \frac{1}{2}\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2}\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{6}} |l = 1, s = \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M = -\frac{1}{2}\rangle.
 \end{aligned} \tag{37.59}$$

Stan $|\psi\rangle$ jest więc kombinacją liniową czterech stanów bazy sprężonej. Współczynniki w powyższym wzorze są amplitudami prawdopodobieństwa wystąpienia odpowiednich stanów. Niech $\mathcal{P}(J, M)$ będzie prawdopodobieństwem wystąpienia stanu określonego liczbami kwantowymi J i M . Na podstawie (37.59) możemy więc napisać

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(J = \frac{3}{2}, M = \frac{1}{2}) &= \frac{1}{4}, \\
 \mathcal{P}(J = \frac{1}{2}, M = \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}, \\
 \mathcal{P}(J = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2}) &= \frac{1}{12}, \\
 \mathcal{P}(J = \frac{1}{2}, M = -\frac{1}{2}) &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned} \tag{37.60}$$

Prawdopodobieństwa te sumują się do jedynki, jak być powinno.

Obliczenia $\langle J_z \rangle$ i $\langle \vec{J}^2 \rangle$ w bazie sprzężonej

Baza sprzężona jest bazą stanów własnych operatora J_z . Wobec tego możemy napisać

$$\langle J_z \rangle = \sum_M M\hbar \cdot \mathcal{P}(J, M) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\hbar}{4}, \quad (37.61)$$

co oczywiście jest w zgodzie z wynikiem (37.54) uzyskanym w bazie niesprężonej.

Analogicznie obliczamy wartość oczekiwaną operatora \vec{J}^2 . A zatem

$$\begin{aligned} \langle \vec{J}^2 \rangle &= \sum_J \hbar^2 J(J+1) \cdot \mathcal{P}(J, M) \\ &= \hbar^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) + \hbar^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{7\hbar^2}{4}. \end{aligned} \quad (37.62)$$

Tym samym, przechodząc od bazy niesprężonej do sprzężonej, odpowiedzieliśmy na postawione na wstępie pytania.
