

Rozdział 40

(U.19) Zaburzenia zależne od czasu

40.1 Rachunek zaburzeń zależny od czasu

Przedstawimy tu inny, bardziej elegancki choć i bardziej złożony matematycznie, sposób przybliżonego opisu układu fizycznego poddanego zaburzeniu zewnętrznemu. Jak pokażemy, uzyskane tu wyniki są (przynajmniej w pierwszym rzędzie) równoważne результатам omówionym w głównej części wykładu.

40.1.1 Omówienie problemu

Będziemy znów badać układ fizyczny opisany zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) |\psi_S(t)\rangle, \quad (40.1)$$

gdzie \hat{H}_0 nazwiemy hamiltonianem swobodnym, zaś $\hat{V}(t)$ hamiltonianem oddziaływania, albo po prostu krótko, oddziaływaniem, czy też zaburzeniem. Oba operatory zapisane są w obrazie Schrödingera, czego nie zaznaczamy oddzielnymi indeksami.

Założymy od razu, że znane nam jest rozwiązanie zagadnienia własnego dla hamiltonianu swobodnego

$$\hat{H}_0 |\phi_a\rangle = E_a^{(0)} |\phi_a\rangle, \quad (40.2)$$

gdzie a jest w ogólności multiindeksem, być może złożonym z kilku liczb kwantowych. Jeżeli energie $E_a^{(0)}$ są zdegenerowane, to dla różnych $a \neq a'$ może zachodzić $E_a^{(0)} = E_{a'}^{(0)}$. Stany własne $|\phi_a\rangle$ hamiltonianu \hat{H}_0 tworzą (w odpowiedniej przestrzeni Hilberta) bazę ortonormalną i zupełną, a zatem spełniają relacje

$$\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \delta_{ab}, \quad \sum_a |\phi_a\rangle \langle \phi_a| = \hat{1}. \quad (40.3)$$

Powyższe założenia stanowią typowy punkt wyjścia do rachunku zaburzeń.

40.1.2 Przybliżona ewolucja wektora stanu

Sformułowanie problemu, a szczególnie postać (40.1) równania Schrödingera sugeruje skorzystanie z obrazu oddziaływania, przy czym końcowe wyniki chcielibyśmy mieć w obrazie Schrödingera ponieważ jest on "łatwiejszy" do interpretacji. Formalne całkowanie równania Schrödingera przeprowadziliśmy już w rozdziale 31 gdzie wyraziliśmy stan układu w chwili późniejszej, przez stan w chwili początkowej, na który działa skomplikowany operator ewolucji przedstawiony w postaci

nieskończonego szeregu (patrz równanie (31.88)). Kolejne wyrazy tego szeregu możemy potraktować jako kolejne przybliżenia ewolucji wektora opisującego stan badanego układu fizycznego. A więc wypisując jawnie człony zerowego, pierwszego i drugiego przybliżenia, możemy napisać dla przybliżenia rzędu k -tego

$$\begin{aligned} |\psi^{(k)}(t)\rangle &= \mathbf{U}_0(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt_1 \mathbf{U}_0(t, t_1) \hat{V}(t_1) \mathbf{U}_0(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathbf{U}_0(t, t_1) \hat{V}(t_1) \mathbf{U}_0(t_1, t_2) \hat{V}(t_2) \mathbf{U}_0(t_2, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ &+ \dots \dots \text{do członu } k\text{-tego włącznie,} \end{aligned} \quad (40.4)$$

gdzie wszystkie wyrażenia są już brane w obrazie Schrödingera. Występujący tu operator ewolucji swobodnej jest dany wzorem

$$\mathbf{U}_0(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right). \quad (40.5)$$

Sens fizyczny kolejnych wyrazów omawialiśmy także w rozdziale 31, nie ma więc potrzeby powtarzania tej dyskusji. Rozwiązanie równania Schrödingera zapisane w postaci nieskończonego szeregu jest ściśle, lecz ewidentnie mało przydatne w praktyce. Powstają więc następujące pytania. Po pierwsze, kiedy można się ograniczyć do najniższego nietrywialnego przybliżenia, tj. do przybliżenia pierwszego rzędu? Przybliżenie zerowe jest trywialne, bowiem odpowiada brakowi jakiegokolwiek zaburzenia. I po drugie, w jakich sytuacjach przybliżenia takie będą przydatne?

40.1.3 Prawdopodobieństwo przejścia

Rozważania ogólne

Założmy, że stan początkowy układu możemy opisać rozkładem

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_a C_a(t_0) |\phi_a\rangle, \quad \text{przy czym} \quad \sum_a |C_a(t_0)|^2 = 1, \quad (40.6)$$

co zapewnia normowanie stanu początkowego. Następnie włączamy oddziaływanie $\hat{V}(t)$. Oczekujemy, że stan układu ulegnie zmianie i w chwili późniejszej $t > t_0$ będziemy mieć rozkład zupełnie analogiczny do (20.8), to jest

$$|\psi(t)\rangle = \sum_a C_a(t) e^{-iE_a^{(0)}(t-t_0)/\hbar} |\phi_a\rangle, \quad (40.7)$$

ale z innymi amplitudami $C_a(t) \neq C_a(t_0)$. Pytamy więc, jak ewoluują amplitudy $C_a(t)$. Odpowiedź na to pytanie jest prosta, bowiem

$$\langle \phi_a | \psi(t) \rangle = C_a(t) e^{-iE_a^{(0)}(t-t_0)/\hbar}. \quad (40.8)$$

W tym momencie możemy wykorzystać (40.4). k -te przybliżenie dla amplitudy $C_a(t)$ powstaje, gdy w prawym składniku iloczynu skalarne wykorzystamy k -te przybliżenie $|\psi^{(k)}(t)\rangle$, to znaczy gdy napiszemy

$$C_a^{(k)}(t) = \langle \phi_a | \psi^{(k)}(t) \rangle e^{iE_a^{(0)}(t-t_0)/\hbar}. \quad (40.9)$$

Nie będziemy tu prowadzić dyskusji (bardzo złożonej) ogólnego przybliżenia k -tego rzędu. Ograniczymy się od razu do pierwszego przybliżenia

$$C_a^{(1)}(t) = e^{iE_a^{(0)}(t-t_0)/\hbar} \left\{ \langle \phi_a | \mathbf{U}_0(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle + \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt_1 \langle \phi_a | \mathbf{U}_0(t, t_1) \hat{V}(t_1) \mathbf{U}_0(t_1, t_0) | \psi(t_0) \rangle \right\}. \quad (40.10)$$

Korzystając z rozkładu początkowego (40.6) otrzymujemy

$$C_a^{(1)}(t) = e^{iE_a^{(0)}(t-t_0)/\hbar} \left\{ \sum_b \langle \phi_a | \mathbf{U}_0(t, t_0) | \phi_b \rangle C_b(t_0) + \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt_1 \sum_b \langle \phi_a | \mathbf{U}_0(t, t_1) \hat{V}(t_1) \mathbf{U}_0(t_1, t_0) | \phi_b \rangle C_b(t_0) \right\}. \quad (40.11)$$

Zauważmy teraz, że operator ewolucji swobodnej działając na stany własne swobodnego hamiltonianu produkuje

$$\mathbf{U}_0(t, t_0) | \phi_b \rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 (t - t_0) \right] | \phi_b \rangle = e^{-iE_b^{(0)}(t-t_0)/\hbar} | \phi_b \rangle. \quad (40.12)$$

Analogicznie, z własności operatora ewolucji wynika, że

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | \mathbf{U}_0(t, t_1) &= \langle \phi_a | \mathbf{U}_0^\dagger(t_1, t) = (\mathbf{U}_0(t_1, t) | \phi_a \rangle)^\dagger = \left[e^{-iE_a^{(0)}(t_1-t)/\hbar} | \phi_a \rangle \right]^\dagger \\ &= \langle \phi_a | e^{iE_a^{(0)}(t_1-t)/\hbar} = e^{-iE_a^{(0)}(t-t_1)/\hbar} \langle \phi_a | \end{aligned} \quad (40.13)$$

Wobec tego, równanie (40.11) możemy zapisać w postaci

$$C_a^{(1)}(t) = e^{iE_a^{(0)}(t-t_0)/\hbar} \left\{ \sum_b e^{-iE_b^{(0)}(t-t_0)/\hbar} \langle \phi_a | \phi_b \rangle C_b(t_0) + \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \sum_b \int_{t_0}^t dt_1 e^{-iE_a^{(0)}(t-t_1)/\hbar} \langle \phi_a | \hat{V}(t_1) | \phi_b \rangle e^{-iE_b^{(0)}(t_1-t_0)/\hbar} C_b(t_0) \right\}. \quad (40.14)$$

Ortonormalność stanów własnych hamiltonianu swobodnego pozwala uprościć pierwszy składnik, a w drugim skracają się czynniki wykładnicze. W rezultacie dostajemy

$$C_a^{(1)}(t) = C_a(t_0) + \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt_1 \sum_b e^{iE_a^{(0)}(t_1-t_0)/\hbar} e^{iE_b^{(0)}(t_1-t_0)/\hbar} \langle \phi_a | \hat{V}(t_1) | \phi_b \rangle C_b(t_0). \quad (40.15)$$

Oznaczając $\omega_{ab} = (E_a^{(0)} - E_b^{(0)})/\hbar$, i kładąc $t_0 = 0$ zapisujemy (40.15) w postaci

$$C_a^{(1)}(t) = C_a(0) + \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \int_0^t dt_1 \sum_b e^{i\omega_{ab}t_1} \langle \phi_a | \hat{V}(t_1) | \phi_b \rangle C_b(0). \quad (40.16)$$

Uzyskana formuła jest (z dokładnością do oznaczeń) identyczna ze wzorem (20.20) otrzymanym zupełnie inną metodą. Dalsza interpretacja przebiega tak samo jak w głównej części wykładu.

Prawdopodobieństwo przejścia

Przyjmujemy, że w chwili początkowej układ znajdował się w stanie $|\phi_p\rangle$ – stanie własnym hamiltonianu swobodnego (z rozkładu (40.6) mamy więc $C_b(0) = \delta_{bp}$). Wówczas z (40.16) otrzymujemy prawdopodobieństwo przejścia $|p\rangle \rightarrow |a\rangle$

$$P^{(1)}(a, t | p, t_0) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t dt_1 e^{i\omega_{ap}t_1} \langle \phi_a | \hat{V}(t_1) | \phi_p \rangle \right|^2 \quad (40.17)$$

pod wpływem zaburzenia $\hat{V}(t)$. Z wyrażenia tego widzimy, że o ile tylko nie znikają elementy macierzowe $\langle \phi_a | \hat{V}(t_1) | \phi_p \rangle$, to w chwilach późniejszych układ może znaleźć w stanie innym niż początkowy.

Oczywiście formuła ta jest w pełni zgodna ze wzorem (20.22). Przybliżenie jakiego tu dokonaliśmy, polega na obcięciu nieskończonego szeregu. Jest więc ono równoważne metodom przedstawionym w głównej części wykładu. Dalsza dyskusja przebiega więc tak samo i nie ma już potrzeby jej powtarzać.

40.2 Atom wodoru w zmiennym polu elektrycznym

40.2.1 Wprowadzenie

Rozpatrzmy następującą sytuację fizyczną. Atom wodoru jest umieszczony pomiędzy okładkami kondensatora. Pole elektryczne wewnątrz kondensatora jest zmienne w czasie

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right). \quad (40.18)$$

Zależność pola od czasu jest typu gaussowskiego. Pole jest znacząco różne od zera w przedziale czasu rzędu kilku czasów charakterystycznych τ . Pole (40.18) jest więc niezłym modelem dość realistycznej sytuacji fizycznej. Atom wodoru (w stanie podstawowym) wprowadzono do kondensatora w odległej przeszłości, w chwili $t_0 \ll -\tau$, a więc dawno przedtem nim pole $\vec{\mathcal{E}}(t)$ miało jakąkolwiek istotną wartość. Następnie, wraz z upływem czasu, atom poddany był oddziaływaniu pola. Jego stan mógł więc ulec zmianie. Celem naszym jest zbadanie jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia atomu (w dalekiej przyszłości, dla $t \gg \tau$) w stanie innym niż podstawowy.

Swobodny atom wodoru pełni oczywiście rolę układu niezaburzonego. Jego stany własne energii są nam dobrze znane. Są to funkcje falowe

$$\psi_{nlmm_s}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \chi_{m_s}, \quad (40.19)$$

odpowiadające energiom niezaburzonym

$$E_n^{(0)} = -\frac{E_I}{n^2} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{\beta}{2a_0}, \quad (40.20)$$

gdzie $\beta = q^2/4\pi\epsilon_0$, zaś $a_0 = \hbar^2/\mu\beta$. Energie $E_n^{(0)}$ są $2n^2$ -krotnie zdegenerowane.

Atom wodoru znajdujący się w kondensatorze oddziałuje z zewnętrznym polem elektrycznym $\vec{\mathcal{E}}(t)$. Oddziaływanie to opiszemy zakładając, że atom zachowuje się jak dipol elektryczny \vec{d} umieszczony w środku masy atomu. Energia oddziaływania dipola atomowego z polem w kondensatorze wyraża się wzorem znanym z elektrodynamiki klasycznej

$$V(t) = -\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t). \quad (40.21)$$

Moment dipolowy atomu wynosi $\vec{d} = q\vec{r}$, zatem wybierając oś z układu współrzędnych prostopadłe do okładek kondensatora (wzdłuż linii sił pola) możemy napisać

$$V(t) = -qr \cos \theta \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right), \quad (40.22)$$

gdzie θ jest kątem (we współrzędnych sferycznych) pomiędzy osią z (polem elektrycznym) a wektorem \vec{r} . Energię $V(t)$ daną powyżej utożsamimy z hamiltonianem oddziaływania (zaburzenia).

40.2.2 Prawdopodobieństwo przejścia – obliczenia

Interesuje nas prawdopodobieństwo znalezienia atomu wodoru w stanie innym niż początkowy (podstawowy) w chwili $t \gg \tau$. Oczywistym narzędziem jest rachunek zaburzeń zależny od czasu. Kwestię jego stosowalności przedyskutujemy później. Zaburzenie (40.22) nie jest harmoniczne, więc musimy odwołać się do ogólnej formuły (20.22), w której trzeba dostosować notację do aktualnie badanego przypadku. Stanem początkowym $|p\rangle$ jest tutaj stan podstawowy $|n=1, l=0, m=0, m_s=\pm\frac{1}{2}\rangle$ atomu wodoru. Stanem końcowym będzie $|n \neq 1, l, m, m'_s\rangle$ z (przynajmniej na razie) nieokreślonymi liczbami kwantowymi. Wobec tego z (20.22)

$$P^{(1)}(n \neq 1, l, m, m'_s; t|1, 0, 0, m_s; t_0) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t dt_1 e^{i\omega_n t_1} \langle n \neq 1, l, m, m'_s | V(t) | 1, 0, 0, m_s \rangle \right|^2, \quad (40.23)$$

gdzie częstość ω_n to różnica energii

$$\omega_n = \frac{E_{n \neq 1}^{(0)} - E_1^{(0)}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \left(-\frac{E_I}{n^2} + E_I \right) = \frac{E_I}{\hbar} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (40.24)$$

Oczywiście $V(t)$ występujące w (40.23) to hamiltonian (40.22).

Przed wszystkim zauważmy, że oddziaływanie w żaden sposób nie zależy od spinu. Stany spinowe są ortonormalne, więc prawdopodobieństwo przejścia będzie diagonalne w liczbach spinowych. Innymi słowy, stan spinowy elektronu nie ulegnie zmianom i w dalszych rozważaniach spin po prostu pominiemy.

Pole elektryczne w chwili początkowej $t_0 \ll -\tau$ było praktycznie równe zeru. Podobnie w chwili zakończenia eksperymentu ($t \gg \tau$) mamy $\vec{\mathcal{E}} \approx 0$. Wobec tego nie popełnimy istotnego błędu (a ułatwiamy sobie obliczenia) przesuwając granice całki po czasie do $\pm\infty$.

W świetle tych uwag (podstawiając oddziaływanie (40.22) zapiszemy prawdopodobieństwo przejścia w postaci

$$P^{(1)}(n \neq 1, l, m|1, 0, 0) = \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \exp \left(i\omega_n t_1 - \frac{t_1^2}{\tau^2} \right) \langle n \neq 1, l, m | r \cos \theta | 1, 0, 0 \rangle \right|^2, \quad (40.25)$$

gdzie wszystkie stałe wyciągnęliśmy przed znak modułu. Obliczenie tego prawdopodobieństwa sprowadza się do obliczenia całki czasowej i niezależnego od czasu elementu macierzowego pomiędzy niezaburzonymi stanami atomowymi.

Całka czasowa

Korzystamy z formuły znanej z tablic całek oznaczonych

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-px^2+qx} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp \left(\frac{q^2}{4p} \right). \quad (40.26)$$

Dopasowując notację, łatwo otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \exp \left(i\omega_n t_1 - \frac{t_1^2}{\tau^2} \right) = \sqrt{\pi\tau^2} \exp \left(-\frac{1}{4}\omega_n^2 \tau^2 \right). \quad (40.27)$$

Tym samym, poszukiwane prawdopodobieństwo przejścia dane jest wzorem

$$P^{(1)}(n \neq 1, l, m|1, 0, 0) = \pi \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2 \tau^2}{\hbar^2} \exp \left(-\frac{1}{4}\omega_n^2 \tau^2 \right) \times \left| \langle n \neq 1, l, m | r \cos \theta | 1, 0, 0 \rangle \right|^2. \quad (40.28)$$

i do obliczenia pozostaje tylko element macierzowy.

Element macierzowy $\langle n \neq 1, l, m | r \cos \theta | 1, 0, 0 \rangle$

Wykorzystując funkcje falowe atomu wodoru, obliczmy element macierzowy w reprezentacji położeniowej

$$\begin{aligned} M_{lm}^{(n \neq 1)} &= \langle n \neq 1, l, m | r \cos \theta | 1, 0, 0 \rangle = \int d\vec{r} \psi_{n \neq 1, lm}^*(\vec{r}) r \cos \theta \psi_{100}(\vec{r}) \\ &= \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \cos \theta Y_{00}(\theta, \varphi) \int_0^\infty dr r^3 R_{n \neq 1, l}(r) R_{10}(r). \end{aligned} \quad (40.29)$$

Faktoryzacja całek wynika oczywiście z postaci funkcji falowych. Najpierw rozważmy całkę kątową. Czynniki $\cos \theta Y_{00}$ możemy wyrazić za pomocą ogólnej formuły (13.71), ale też (co jest równoważne, lecz prostsze) wystarczy zauważyć, że (patrz wzory (13.68) i (13.69b))

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad (40.30)$$

skąd wynika, że

$$\cos \theta Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi). \quad (40.31)$$

Dzięki temu całka kątowa w (40.29) redukuje się do

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \cos \theta Y_{00}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{10}(\theta, \varphi) \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \delta_{l1} \delta_{m0}, \end{aligned} \quad (40.32)$$

na mocy ortonormalności harmonik sferycznych. Element macierzowy (40.290) wyraża się więc jako

$$M_{lm}^{(n \neq 1)} = \sqrt{\frac{1}{3}} \delta_{l1} \delta_{m0} I_{n \neq 1}, \quad (40.33)$$

gdzie $I_{n \neq 1}$ jest całką radialną

$$I_{n \neq 1} = \int_0^\infty dr r^3 R_{n \neq 1, l}(r) R_{10}(r). \quad (40.34)$$

Zanim omówimy tę całkę, zwróćmy uwagę, że całka kątowa (40.32) określiła regułę wyboru, która mówi, że ze stanu podstawowego $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$ możliwe (tj. mające różne od zera prawdopodobieństwo) są jedynie przejścia do stanów, w których $l = 1, m = 0$. Gdybyśmy dopuścili bardziej ogólny (dowolny) stan początkowy, wówczas reguła rekurencyjna (13.71) dla harmonik sferycznych dałaby ogólniejszą regułę wyboru

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0. \quad (40.35)$$

Reguła ta oznacza, że pod wpływem pola elektrycznego w kondensatorze mogą zachodzić wyłącznie przejścia $|n, l, m\rangle \rightarrow |n', l' = l \pm 1, m' = m\rangle$.

Całka radialna

Wracamy do obliczeń całki radialnej (40.34). Na podstawie wzorów (15.95) i (15.97) (przy $Z = 1$) mamy

$$\begin{aligned} I_{n \neq 1} &= \int_0^\infty dr r^3 \left(\frac{2}{na_0} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-2)!}{2n(n+1)!}} \left(\frac{2r}{na_0} \right) \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) L_{n-2}^{(3)}\left(\frac{2r}{na_0}\right) \\ &\quad \times 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \\ &= \frac{2^{7/2}}{a_0^3 n^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-2)!}{2n(n+1)!}} \int_0^\infty dr \frac{r^4}{na_0} \exp\left[-\frac{r}{a_0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] L_{n-2}^{(3)}\left(\frac{2r}{na_0}\right). \end{aligned} \quad (40.36)$$

Zamieniamy zmienną całkowania $x = 2r/na_0$

$$I_{n \neq 1} = \frac{2^{7/2}}{a_0^3 n^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-2)!}{2n(n+1)!}} \int_0^\infty dx \frac{(na_0)^4}{2^5} x^4 \exp\left[-\frac{nx}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] L_{n-2}^{(3)}(x). \quad (40.37)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$I_{n \neq 1} = \frac{a_0 n^{5/2}}{2^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-2)!}{2n(n+1)!}} \int_0^\infty dx x^4 \exp\left[-\frac{nx}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] L_{n-2}^{(3)}(x). \quad (40.38)$$

Obliczenie tej całki dla dowolnego $n \geq 2$ jest trudne (choć w zasadzie możliwe). Ograniczymy się do szczegółowego zbadania przypadku $n = 2$, a więc do przejść ze stanu podstawowego do pierwszego stanu wzbudzonego.

Całka radialna dla $n = 2$

Dla $n = 2$ stowarzyszony wielomian Laguerre'a jest szczególnie prosty $L_0^{(3)}(x) \equiv 1$. Potrzebna nam całka redukuje się do

$$\int_0^\infty dx x^4 \exp\left(-\frac{3x}{2}\right) = \frac{4!}{(3/2)^5} = \frac{2^8}{3^5}. \quad (40.39)$$

Podstawiając ten rezultat do wyrażenia (40.38), porządkujemy współczynniki i dostajemy

$$I_{n=2} = \frac{a_0 2^{5/2}}{2^{3/2}} \sqrt{\frac{0!}{4 \cdot 3!}} \cdot \frac{2^8}{3^5} = a_0 \frac{2^{15/2}}{3^{9/2}}. \quad (40.40)$$

Element macierzowy (40.33), dla $n = 2$ ma więc postać

$$M_{lm}^{(n=2)} = \sqrt{\frac{1}{3}} \delta_{l1} \delta_{m0} \cdot a_0 \frac{2^{15/2}}{3^{9/2}} = a_0 \delta_{l1} \delta_{m0} \frac{2^{15/2}}{3^5}. \quad (40.41)$$

40.2.3 Prawdopodobieństwo przejścia $|1, 0, 0\rangle \rightarrow |2, l, m\rangle$

Obliczony element macierzowy (40.41) podstawiamy do wyrażenia (refGak13) otrzymując prawdopodobieństwo przejścia ze stanu podstawowego do pierwszego stanu wzbudzonego

$$P^{(1)}(2, l, m | 1, 0, 0) = \pi \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2 \tau^2}{\hbar^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \omega_2^2 \tau^2\right) a_0 \delta_{l1} \delta_{m0} \frac{2^{15/2}}{3^5}, \quad (40.42)$$

gdzie, zgodnie z (40.24)

$$\omega_2 = \frac{E_I}{\hbar} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3E_I}{4\hbar} = \frac{3\beta}{8\hbar a_0}. \quad (40.43)$$

Wynik (40.42) jest słuszny w ramach pierwszego rzędu rachunku zaburzeń. W zasadzie moglibyśmy próbować obliczyć całkę (40.38) dla dowolnego $n \geq 2$, lecz poprzestaniemy na uzyskanym rezultacie. Pozostaje nam jednak przedyskutować problem stosowności rachunku zaburzeń.

40.2.4 Stosowalność rachunku zaburzeń

W rozdziale 20 stwierdziliśmy, że kryterium stosowalności rachunku zaburzeń jest "małość" zaburzenia. Sprowadza się to do warunku (20.67), to jest do

$$|\langle m | W | p \rangle| \ll \hbar |\omega_{mp}|, \quad (40.44)$$

gdzie (w naszym przypadku) musimy podstawić $\omega_{mp} = \omega_2 = 3E_I/4\hbar$, oraz

$$|\langle m | W | p \rangle| \rightarrow |\langle 2, l, m | -q\mathcal{E}_0 r \cos \theta | 1, 0, 0 \rangle| = q\mathcal{E}_0 |M_{lm}^{(2)}|, \quad (40.45)$$

bowiem gaussowski czynnik wykładniczy w zaburzeniu (40.22) jest ograniczony przez 1. A zatem w omawianej sytuacji (atom wodoru w kondensatorze) warunek stosowalności ma postać

$$q\mathcal{E}_0 |M_{lm}^{(2)}| \ll \frac{3}{4}E_I. \quad (40.46)$$

Podstawiamy $E_I = \beta/2a_0$ oraz element macierzowy $M_{lm}^{(2)}$ i dostajemy

$$\frac{2^{15/2}}{3^5} q\mathcal{E}_0 a_0 \ll \frac{3\beta}{8a_0}. \quad (40.47)$$

Porządkując czynniki liczbowe (potrzebujemy oszacowania, a nie dokładnych wartości) otrzymujemy warunek

$$q\mathcal{E}_0 \ll \frac{\beta}{2a_0^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_0 \ll \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a_0^2} \quad (40.48)$$

na amplitudę natężenia pola elektrycznego w kondensatorze pozwalająca na zastosowanie rachunku zaburzeń. Oszacowanie to jest identyczne z warunkiem (21.103) otrzymanym w dyskusji stosowalności rachunku zaburzeń do opisu oddziaływania atomu z falą elektromagnetyczną. Biorąc obliczone tam wartości stwierdzamy, że pole w kondensatorze powinno spełniać

$$\mathcal{E}_0 \ll 3 \cdot 10^{11} \left(\frac{\text{V}}{\text{m}} \right). \quad (40.49)$$

Jeżeli okładki kondensatora są oddalone o $d = 1 \text{ mm}$, to warunek (40.49) odpowiada napięciu $U_0 = \mathcal{E}_0 d$ spełniającemu

$$U_0 \ll 3 \cdot 10^8 \text{ V}, \quad (40.50)$$

a to jest napięcie ogromne. Rachunek zaburzeń jest więc z pewnością stosowalny.

40.3 Przybliżenie sekularne

40.3.1 Uwagi wstępne

Zależny od czasu rachunek zaburzeń (pierwszego rzędu) jest stosowalny dla krótkich czasów

$$t \ll \frac{\hbar}{|\langle m | W_c | p \rangle|}. \quad (40.51)$$

gdzie W_c szacuje amplitudę zaburzenia (patrz wzór (20.65) i jego dyskusja). Oznacza to, że zaburzenie powinno być małe. W przeciwnym wypadku ($|\langle m | W_c | p \rangle|$ duże) stosowalność rachunku zaburzeń jest ograniczona do bardzo krótkich czasów. Jeśli więc chcemy badać zachowanie układów fizycznych dla czasów długich to na ogół potrzebujemy innych niż rachunek zaburzeń metod

obliczeniowych. Przedstawimy tu zasadnicze idee tzw. przybliżenia sekularnego stosowalnego dla długich czasów, a więc nie wymagających "słabości" oddziaływania.

Punkt wyjścia naszych rozważań jest podobny jak w przypadku rachunku zaburzeń. Niech H_0 oznacza hamiltonian pewnego układu fizycznego. Przyjmujemy, że znamy rozwiązanie zagadnienia własnego $H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle$, a stany $|n\rangle$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni stanów. Układ ten jest następnie zaburzony zewnętrznym oddziaływaniem $V(t)$. Stany układu muszą więc spełniać równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle, \quad (40.52)$$

przy pewnym warunku początkowym $|\psi(t=t_0)\rangle = |\psi_0\rangle$. Szukamy rozwiązania tego równania w postaci

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n |n\rangle C_n(t) e^{-iE_n^{(0)}(t-t_0)/\hbar}, \quad (40.53)$$

W rozdziale 20 pokazaliśmy, że równanie Schrödingera (40.52) jest równoważne układowi równań dla amplitud $C_n(t)$

$$\frac{d}{dt} C_m(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n \langle m|V(t)|n\rangle e^{i\omega_{mn}(t-t_0)} C_n(t), \quad (40.54)$$

przy warunku początkowym $C_m(t_0) = \langle m|\psi_0\rangle$. Układ ten jest na ogół bardzo trudny, lub wręcz niemożliwy, do rozwiązania. Rachunek zaburzeń był jedną z przybliżonych metod jego badania, a teraz omówimy inną.

40.3.2 Stany istotne w okolicach rezonansu

Metoda, którą będziemy omawiać, bazuje na założeniu, że oddziaływanie ma silnie rezonansowy charakter. Aby to dobrze określić, rozważymy zaburzenie postaci cosinusoidalnej

$$V(t) = \frac{W}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (40.55)$$

Przyjmijmy następnie, że częstość zaburzenia jest bardzo bliska jednej z częstości własnych badanego układu fizycznego, to jest

$$\omega \approx |\omega_{kp}| = \left| \frac{E_k^{(0)} - E_p^{(0)}}{\hbar} \right|. \quad (40.56)$$

Mówimy, że oddziaływanie jest bliskie rezonansowi z przejściem $|p\rangle \leftrightarrow |k\rangle$. Zakładamy ponadto, że wszystkie inne częstości własne układu $|\omega_{mn}|$, $(m, n \neq k, p)$ są znacząco różne od częstości ω charakteryzującej zaburzenie.

Założymy dalej, że w chwili początkowej t_0 układ znajdował się (z prawdopodobieństwem 1) w stanie $|p\rangle$. A zatem dla układu równań (40.54) przyjmujemy warunek początkowy

$$C_m(t_0) = \delta_{mp}. \quad (40.57)$$

ponieważ zaburzenie ma częstość spełniającą (40.56) więc na podstawie rachunku zaburzeń spodziewamy się, że jedynie prawdopodobieństwa przejść $|p\rangle \leftrightarrow |k\rangle$ będą znaczące, podczas gdy inne przejścia (choć nie zabronione) mają znikomo małe prawdopodobieństwa. Wniosek ten oczywiście przenosi się na amplitudy prawdopodobieństwa

$$\begin{aligned} C_p(t), C_k(t) & - \text{znaczące;} \\ C_m(t), (m, n \neq k, p) & - \text{bardzo małe.} \end{aligned} \quad (40.58)$$

W związku z tym możemy przeanalizować układ równań (40.54), wyodrębniając w nim równania i składniki dotyczące amplitud znaczących i znikomych.

- Równanie dla $m = p$.

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_p(t) = \langle p|V(t)|p\rangle C_p(t) + \langle p|V(t)|k\rangle e^{i\omega_{pk}(t-t_0)} C_k(t) + \sum_{n \neq p,k} \langle p|V(t)|n\rangle e^{i\omega_{pn}(t-t_0)} C_n(t). \quad (40.59)$$

- Równanie dla $m = k$.

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_k(t) = \langle k|V(t)|p\rangle e^{i\omega_{kp}(t-t_0)} C_p(t) + \langle k|V(t)|k\rangle C_k(t) + \sum_{n \neq p,k} \langle k|V(t)|n\rangle e^{i\omega_{kn}(t-t_0)} C_n(t). \quad (40.60)$$

- Równania dla pozostałych $m, (m \neq p, k)$.

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_m(t) = \langle m|V(t)|p\rangle e^{i\omega_{mp}(t-t_0)} C_p(t) + \langle m|V(t)|k\rangle e^{i\omega_{mk}(t-t_0)} C_k(t) + \sum_{n \neq p,k} \langle m|V(t)|n\rangle e^{i\omega_{mn}(t-t_0)} C_n(t). \quad (40.61)$$

Równania (40.59)–(40.61) są nadal ściśle, nie zrobiliśmy niczego poza ich przegrupowaniem.

40.3.3 Zaniedbanie stanów nierezonansowych

Poczynamy teraz następujące przybliżenie. Układ znajdował się początkowo w stanie $|p\rangle$. Prawdopodobieństwa przejść $|p\rangle \leftrightarrow |m\rangle$ są (dla $m \neq p, k$) znikomo małe. A zatem amplitudy prawdopodobieństwa $C_m(t)$ znalezienia układu w stanie $|m\rangle$ są praktycznie niezmienione

$$C_m(t) \approx C_m(t_0) = 0, \quad \text{dla } m \neq p, k. \quad (40.62)$$

W skutek tego przybliżenia, w równaniach (40.59)–(40.61) znikną wyrazy zawierające sumy. W rezultacie mamy przybliżony układ równań

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} C_p(t) &= \langle p|V(t)|p\rangle C_p(t) + \langle p|V(t)|k\rangle e^{i\omega_{pk}(t-t_0)} C_k(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} C_k(t) &= \langle k|V(t)|p\rangle e^{i\omega_{kp}(t-t_0)} C_p(t) + \langle k|V(t)|k\rangle C_k(t) \\ i\hbar \frac{d}{dt} C_m(t) &= \langle m|V(t)|p\rangle e^{i\omega_{mp}(t-t_0)} C_p(t) + \langle m|V(t)|k\rangle e^{i\omega_{mk}(t-t_0)} C_k(t). \end{aligned} \quad (40.63)$$

Układ ten nadal zawiera nieskończenie wiele równań (numer m przebiega wszystkie stany własne H_0 za wyjątkiem p i k). Tym niemniej spodziewamy się, że tę trudność można jakoś obejść, bo amplitudy $C_m(t)$ powinny być bardzo (zaniedbywalnie) małe. Stwierdzamy, że mamy niewątpliwe uproszczenia, bowiem dwa pierwsze równania zawierają jedynie dwie amplitudy dotyczące stanów bliskich rezonansowi. Ceną za te uproszczenia jest jednak przybliżony charakter równań (40.63).

40.3.4 Zaniechanie składników szybko oscylujących

Do równań (40.63) podstawimy teraz oddziaływanie (40.55) i dla prostoty położymy $t_0 = 0$. Dostajemy więc

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} C_p(t) &= \frac{1}{2} W_{pp} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) C_p(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} W_{pk} (e^{i(\omega+\omega_{pk})t} + e^{-i(\omega-\omega_{pk})t}) C_k(t) \\
 i\hbar \frac{d}{dt} C_k(t) &= \frac{1}{2} W_{kp} (e^{i(\omega+\omega_{kp})t} + e^{-i(\omega-\omega_{kp})t}) C_p(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} W_{kk} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) C_k(t) \\
 i\hbar \frac{d}{dt} C_m(t) &= \frac{1}{2} W_{mp} (e^{i(\omega+\omega_{mp})t} + e^{-i(\omega-\omega_{mp})t}) C_p(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} W_{mk} (e^{i(\omega+\omega_{mk})t} + e^{-i(\omega-\omega_{mk})t}) C_k(t),
 \end{aligned} \tag{40.64}$$

gdzie oznaczyliśmy element macierzowy $W_{ab} = \langle a | W | b \rangle$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy

$$\begin{aligned}
 |p\rangle &- \text{stan o niższej energii,} \\
 |k\rangle &- \text{stan o wyższej energii,}
 \end{aligned} \tag{40.65}$$

zatem możemy wprowadzić oznaczenie

$$\omega_0 = \omega_{kp} = -\omega_{pk} = \frac{E_k^{(0)} - E_p^{(0)}}{\hbar} > 0. \tag{40.66}$$

Ustalenie to ma charakter pomocniczy a nie zasadniczy. Zaburzenie ma (przypominamy) częstość bliską rezonansowi, to jest $\omega \approx \omega_0$.

Czynniki wykładnicze typu $e^{i\Omega t}$ występujące w równaniach układu (40.64) oscylują wraz z upływem czasu. Wyrazy zawierające bliskie zeru częstości

- $\omega - \omega_{kp} = \omega - \omega_0$ (pierwsze równanie, trzeci składnik),
- $\omega + \omega_{pk} = \omega - \omega_0$ (drugie równanie, drugi składnik),

oscylują stosunkowo wolno (rezonansowy charakter zaburzenia $V(t)$). Wszystkie pozostałe czynniki wykładnicze zależą od względnie dużych częstości i oscylują szybko. Jeżeli czas t jest dostatecznie długi, to szybko oscylujące człony uśrednią się do zera. Ograniczając się do czasów większych niż odwrotności istotnie różnych od zera częstości, możemy zaniechać szybko oscylujące człony. W ten sposób układ równań (40.64) przybliżymy równaniami

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} C_p(t) &= \frac{1}{2} W_{pk} e^{i(\omega-\omega_0)t} C_k(t) \\
 i\hbar \frac{d}{dt} C_k(t) &= \frac{1}{2} W_{kp} e^{-i(\omega-\omega_0)t} C_p(t) \\
 i\hbar \frac{d}{dt} C_m(t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{40.67}$$

Zwróćmy uwagę, że tutaj czas t nie ma ograniczenia z góry (por. (20.66) w rachunku zaburzeń), może być dowolnie duży. Oczywiście trzecie równanie powyższego układu ma trywialne rozwiązanie $C_m(t) = 0$ dla $(m \neq p, k)$, zgodne z przyjętym założeniem (40.62).

Równania (40.67) stanowią efekt przybliżenia sekularnego. Polega ono na:

- wybraniu stanów istotnych w danym problemie (będących praktycznie w rezonansie z zaburzeniem);
- zaniechaniu składników (tzw. niesekularnych) zawierających czynniki, które szybko oscylują w czasie.

Do dalszej dyskusji pozostaje więc układ pierwszych dwóch równań (40.67), w których oznaczamy

$$A = \frac{W_{kp}}{2\hbar} = \frac{\langle k | W | p \rangle}{2\hbar}, \quad \Delta = \omega - \omega_0. \quad (40.68)$$

Mamy więc układ równań postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_p(t) &= -iA e^{i\Delta t} C_k(t) \\ \frac{d}{dt} C_k(t) &= -iA^* e^{-i\Delta t} C_p(t). \end{aligned} \quad (40.69)$$

Układ ten można rozwiązywać na różne sposoby. Najpierw jednak wprowadzimy amplitudy pomocnicze

$$C_p(t) = e^{i\Delta t/2} b_p(t), \quad C_k(t) = e^{-i\Delta t/2} b_k(t). \quad (40.70)$$

Podstawiając je do równań (40.69) wykonujemy niezbędne różniczkowania i zauważamy, że czynniki wykładnicze $e^{\pm i\Delta t/2}$ skrócą się. W rezultacie dostaniemy układ równań dla amplitud pomocniczych

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_p(t) &= -\frac{i\Delta}{2} b_p(t) + iA b_k(t), \\ \frac{d}{dt} b_k(t) &= -iA^* b_p(t) + \frac{i\Delta}{2} b_k(t), \end{aligned} \quad (40.71)$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_p(t) \\ b_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\Delta & -iA \\ -iA^* & \frac{1}{2}i\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p(t) \\ b_k(t) \end{pmatrix}. \quad (40.72)$$

Otrzymany układ równań jest praktycznie identyczny z równaniami (36.21) i (36.22) otrzymanymi przy badaniu spinu $\frac{1}{2}$ w zmiennym polu magnetycznym. W zasadzie więc moglibyśmy, dopasowując oznaczenia, od razu wykorzystać rozwiązania (36.43). Pouczające jest jednak zastosowanie innej, równoważnej metody rachunkowej.

40.3.5 Rozwiązanie równań

W rozdziale 36) rozwiązywaliśmy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach (a więc taki jak równania (40.72)) metodą macierzową. Tutaj naszkicujemy całkiem inny sposób rozwiązania. Weźmy pierwsze z równań układu (40.71) i zróżniczkujemy je względem czasu.

$$\frac{d^2 b_p}{dt^2} = -\frac{i\Delta}{2} \frac{d b_p}{dt} + iA \frac{d b_k}{dt}. \quad (40.73)$$

Za pomocą drugiego równania układu (40.71) eliminujemy pochodną czasową amplitudy b_k . Otrzymujemy

$$\frac{d^2 b_p}{dt^2} = -\frac{1}{2}i\Delta \frac{d b_p}{dt} + \frac{1}{2}A\Delta b_k - |A|^2 b_p. \quad (40.74)$$

Z pierwszego równania układu obliczamy amplitudę b_k

$$b_k = \frac{i}{A} \frac{d b_p}{dt} - \frac{\Delta}{2A} b_p. \quad (40.75)$$

Możemy więc wyeliminować z równania (40.74) amplitudę b_k otrzymując równanie tylko dla amplitudy b_p

$$\begin{aligned}\frac{d^2 b_p}{dt^2} &= -\frac{1}{2}i\Delta \frac{db_p}{dt} + \frac{1}{2}A\Delta \left(\frac{i}{A} \frac{db_p}{dt} - \frac{\Delta}{2A} b_p \right) - |A|^2 b_p \\ &= -(|A|^2 + \frac{1}{4}\Delta^2) b_p.\end{aligned}\quad (40.76)$$

Układ dwóch równań pierwszego rzędu sprowadziliśmy do jednego równania rzędu drugiego. Uzyskane równanie dla amplitudy b_p jest równaniem typu oscylatora harmonicznego, więc ma rozwiązanie postaci

$$b_p(t) = a \sin(\chi t) + b \cos(\chi t), \quad \chi = \sqrt{|A|^2 + \frac{1}{4}\Delta^2}, \quad (40.77)$$

zaś liczby a i b trzeba wyznaczyć na podstawie warunków początkowych. Zanim to zrobimy, obliczmy, z równania (40.75) drugą amplitudę

$$\begin{aligned}b_k(t) &= \frac{i}{A} (a\chi \cos(\chi t) - b\chi \sin(\chi t)) - \frac{\Delta}{2A} (a \sin(\chi t) + b \cos(\chi t)) \\ &= \left(\frac{ia\chi}{A} - \frac{b\Delta}{2A} \right) \cos(\chi t) - \left(\frac{ib\chi}{A} + \frac{a\Delta}{2A} \right) \sin(\chi t)\end{aligned}\quad (40.78)$$

Warunki początkowe dla amplitud pomocniczych wynikają z (40.70) i z (40.57). Stosując je do powyższych rezultatów, dostajemy parę równań

$$\begin{aligned}b_p(0) &= 1 = b \\ b_k(0) &= 0 = \frac{1}{A}(ia\chi - \frac{1}{2}b\Delta).\end{aligned}\quad (40.79)$$

Rozwiązanie względem a i b jest trywialne

$$b = 1, \quad a = -\frac{i\Delta}{2\chi}. \quad (40.80)$$

Podstawiając wyliczone stałe do rozwiązań (40.77) i (40.78) dostajemy

$$\begin{aligned}b_p(t) &= \cos(\chi t) - \left(\frac{i\Delta}{2\chi} \right) \sin(\chi t) \\ b_k(t) &= \frac{1}{A} \left(\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}\Delta \right) \cos(\chi t) - \frac{1}{A} \left(i\chi - \frac{i\Delta^2}{4\chi} \right) \sin(\chi t) \\ &= -\frac{i|A|^2}{A\chi} \sin(\chi t),\end{aligned}\quad (40.81)$$

gdzie w ostatniej linii wykorzystaliśmy definicję parametru χ .

Wracając (zgodnie z (40.70)) do pierwotnych amplitud prawdopodobieństwa, podsumowujemy nasze rozwiązanie, pisząc

$$\begin{aligned}C_p(t) &= e^{i\Delta t/2} \left[\cos(\chi t) - \left(\frac{i\Delta}{2\chi} \right) \sin(\chi t) \right] \\ C_k(t) &= -\frac{i|A|^2}{A\chi} e^{-i\Delta t/2} \sin(\chi t),\end{aligned}\quad (40.82)$$

gdzie χ jest określone w (40.77), zaś A oraz Δ w (40.68). Jak już wspominaliśmy rozwiązywany tu układ (40.72) jest w pełni analogiczny do równań (36.21). Uzyskane tu rozwiązania (40.82) są (po dopasowaniu oznaczeń i warunków początkowych) zgodne z rozwiązaniami (36.43). Zgodność tą jeszcze lepiej widać gdy obliczymy odpowiednie prawdopodobieństwa. Nasz układ początkowo

znajdował się w stanie $|p\rangle$. Zatem $|C_k(t)|^2$ odpowiada prawdopodobieństwu przejścia $|p\rangle \rightarrow |k\rangle$ i wynosi

$$P_{p \rightarrow k}(t) = \frac{|A|^2}{\chi^2} \sin^2(\chi t). \quad (40.83)$$

Natomiast $|C_p(t)|^2$ jest prawdopodobieństwem tego, że układ pozostanie w stanie $|p\rangle$

$$P_{pp}(t) = \cos^2(\chi t) + \frac{\Delta^2}{4\chi^2} \sin^2(\chi t). \quad (40.84)$$

Prawdopodobieństwa te ewidentnie sumują się do jedynki. Ich postać jest formalnie identyczna (z dokładnością do oznaczeń) z prawdopodobieństwami (36.57) opisującymi oscylacje Rabiego spinu $\frac{1}{2}$ w zmiennym polu magnetycznym. Wobec tej zbieżności formalnego kształtu rozwiązań stwierdzamy, że i tutaj będziemy mieć do czynienia z oscylacjami Rabiego. Dyskusja wyników oczywiście przebiega dalej tak samo, mimo, że w aktualnej sytuacji nie ustaliliśmy fizycznego charakteru układu niezaburzonego, ani też nie określiliśmy fizycznego sensu zaburzenia. Widzimy jednak jak przydatne może być przybliżenie sekularne. Oscylacje Rabiego mogą trwać dowolnie długo, a nie mamy tu żadnego ograniczenia (z góry) na czas trwania efektu.
