

Dodatek A

Konfluentna funkcja hipergeometryczna

Równanie różniczkowe względem funkcji $u(z)$ o ogólnej postaci

$$z \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + (c - z) \frac{du(z)}{dz} - au(z) = 0, \quad (\text{A.1})$$

gdzie z zmienna (w ogólności zespolona), zaś a i c to ustalone parametry, nazywamy konfluentnym równaniem hipergeometrycznym. Ma ono ogólne rozwiązanie składające się z dwóch liniowo niezależnych składników, tak jak to powinno być dla równania różniczkowego drugiego rzędu. Rozwiązanie takie zapisujemy jako

$$u(z) = C {}_1F_1(a, c, z) + Dz^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c, z), \quad (\text{A.2})$$

gdzie C i D są stałymi dowolnymi, które trzeba określić na podstawie innych warunków (normowanie, warunki brzegowe).

Funkcją ${}_1F_1(a, c, z)$ nazywana jest konfluentną funkcją hipergeometryczną. Określona jest ona poprzez rozwinięcie w szereg

$${}_1F_1(a, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{A.3})$$

W zapisie szeregów (A.3) posłużyliśmy się tak zwanym symbolem Pochhammera

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_1 = a, \quad (a)_k = a(a+1)(a+2) \cdots (a+k-1). \quad (\text{A.4})$$

Nietrudno wykazać (przez indukcję), że

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad (\text{A.5})$$

skąd też bierze się drugie rozwinięcie w szereg (A.3). Dla pogładowości zapisu wypiszmy szereg jawnie

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a, c, z) = & 1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots \\ & + \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)}{c(c+1) \cdots (c+k-1)} \cdot \frac{z^k}{k!} + \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Z rozwinięć (A.3) lub (A.6) widać, że parametr c funkcji ${}_1F_1(a, c, z)$ nie może być zerem lub ujemną liczbą całkowitą: ($c \neq -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) (dzielenie przez zero jest zabronione).

Wobec tego w rozwiązaniach (A.2) równania (A.1) parametry c oraz $2 - c$ nie mogą być zerami lub całkowitymi liczbami ujemnymi. Oznacza to, że w równaniu (A.1) parametr c nie może być liczbą całkowitą.

Gdy jednak $c = -n$, wówczas nadal można szukać rozwiązania równania (A.1) w postaci konfluentnych funkcji hipergeometrycznych, jednakże wtedy trzeba dokonać następującego przejścia granicznego

$$\lim_{c \rightarrow -n} \frac{{}_1F_1(a, c, z)}{\Gamma(c)} = \frac{\Gamma(a + n + 1)}{\Gamma(a)} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} {}_1F_1(a + n + 1, n + 2, z). \quad (\text{A.7})$$

W naszych zastosowaniach (oscylator harmoniczny) na szczęście tego typu komplikacja nie występuje.

W zastosowaniach kwantowo-mechanicznych istotne jest asymptotyczne zachowanie funkcji (aby rozwiązania równania Schrödingera były całkowalne w kwadracie). Konfluentna funkcja hipergeometryczna ma następujące zachowanie asymptotyczne. Dla argumentów o bardzo małym module

$$\text{dla } |z| \rightarrow 0 \quad {}_1F_1(a, c, z) \rightarrow 1 + \mathcal{O}(|z|). \quad (\text{A.8})$$

Natomiast dla argumentów o wielkim module

$$\begin{aligned} \text{dla } |z| \rightarrow \infty \quad {}_1F_1(a, c, z) \rightarrow & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right) \right] \\ & + e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Widzimy więc, że ${}_1F_1(a, c, z)$ w okolicach zera zachowuje się "przyzwoicie". Natomiast dla dużych $|z|$ dominuje czynnik $\exp(z)$, co przy z dodatnich sprawia, że ${}_1F_1(a, c, z)$ jest silnie rozbieżna – niecałkowalna.

W wielu zastosowaniach wystarczy jednak, jeżeli poszukiwana funkcja rozbiega przy $z \rightarrow \infty$ wielomianowo. Aby rozważyć taką możliwość, zauważmy, że jeśli parametr a jest niedodatnią liczbą całkowitą ($a = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) to wówczas

$$(a)_k \longrightarrow (-n)_k = (-n)(-n+1)(-n+2) \cdots (-n+k-1), \quad (\text{A.10})$$

aż wreszcie (przy wzrastającym k) natrafimy na $k = n + 1$, i wówczas

$$(a)_{k=n+1} \longrightarrow (-n)_{n+1} = (-n)(-n+1) \cdots (-n+n+1-1) = 0, \quad (\text{A.11})$$

i wszystkie następne $(a)_k$ ($k \geq n + 1$) będą znikać. Oznacza to, że szeregi (A.3) mają wówczas jedynie $k = 0, 1, 2, \dots, n$ nieznikających wyrazów. Innymi słowy szereg urywa się, stając się wielomianem stopnia n

$${}_1F_1(a = -n, c, z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \{\text{wielomian stopnia } n\} \quad (\text{A.12})$$

Odnotujmy pewne przypadki szczególne powyższego wyrażenia. Wielomiany Hermite'a można wyrazić za pomocą konfluentnej funkcji hipergeometrycznej

$${}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, z^2\right) = (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} H_{2n}(z) \quad (\text{A.13a})$$

$${}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}, z^2\right) = (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2z}\right) H_{2n+1}(z) \quad (\text{A.13b})$$

Również dla wielomianów Laguerre'a mamy

$${}_1F_1(-m, \alpha, z) = \frac{m! \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(m + \alpha + 1)} L_m^{(\alpha)}(z) \quad (\text{A.14})$$

* * * * *