

Rozdział 32

(U.11) Obroty i moment pędu

32.1 Wprowadzenie

Obroty w przestrzeni \mathbb{R}^3 są scharakteryzowane przez podanie osi obrotu, którą określa wektor jednostkowy \vec{n} i przez kąt obrotu φ , przy czym obowiązuje reguła śruby prawoskrętnej. W wyniku obrotu wektora \vec{a} otrzymujemy nowy wektor

$$\vec{a}' = \mathcal{R}(\varphi, \vec{n}) \vec{a}, \quad (32.1)$$

gdzie $\mathcal{R}(\varphi, \vec{n})$ symbolizuje transformację obrotu. Ponieważ $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, więc $\mathcal{R}(\varphi, \vec{n})$ można utożsamić z pewną macierzą 3×3 . Omówieniem obrotów w \mathbb{R}^3 zajmiemy się dalej, a teraz postawimy następujące pytanie: jeśli układ fizyczny, a więc np. wektor położenia cząstki \vec{r} zostaje obrócony, to jak wówczas zmieni się funkcja falowa cząstki? Przed obrotem miała ona postać $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle$, jak więc będzie wyglądać, gdy obrócimy układ fizyczny?

Układ obrócony jest na ogół inny niż ten sprzed obrotu, wobec tego możemy domyślać się, że obrotowi \mathcal{R} układu fizycznego powinna towarzyszyć jakaś transformacja stanu $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Spodziewamy się więc, że istnieje odpowiedniość

$$\vec{r} \xrightarrow{\mathcal{R}(\varphi, \vec{n})} \vec{r}' \quad \implies \quad |\psi\rangle \xrightarrow{R(\varphi, \vec{n})} |\psi'\rangle = R(\varphi, \vec{n})|\psi\rangle, \quad (32.2)$$

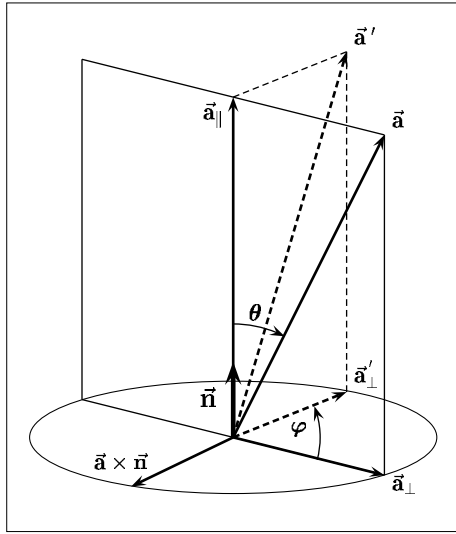
gdzie $R(\varphi, \vec{n})$ jest pewnym operatorem działającym na \mathcal{H} w sposób zależny od obrotu \mathcal{R} dokonanego w przestrzeni położenia. Odpowiedź na postawione pytanie polega więc na znalezieniu operatora $R(\varphi, \vec{n})$ indukowanego przez obroty w przestrzeni położenia. Celem naszych rozważań będzie znalezienie takiego operatora i przebadanie jego własności. Jak się okaże, operator ten jest ściśle związany z operatorem momentu pędu. Co więcej, z własności obrotów wynikną także odpowiednie własności operatora momentu pędu, jak na przykład kanoniczne relacje komutacyjne.

Zanim zajmiemy się tym problemem, a także zanim zbadamy wszelkie jego konsekwencje, poświęcimy nieco uwagi zwykłym (czysto geometrycznym) obrotom w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

32.2 Podstawowe własności obrotów w \mathbb{R}^3

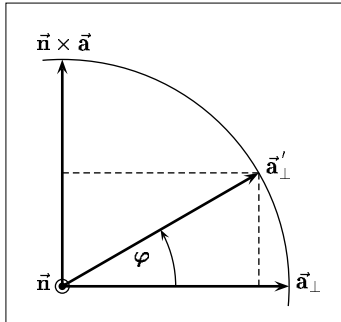
Obroty (i w ogóle transformacje geometryczne) stanowią ważny dział geometrii, którego nie możemy omawiać tu w wyczerpujący sposób. Przedstawimy jedynie najistotniejsze własności obrotów, i to w sposób przydatny do dalszych zastosowań w mechanice kwantowej.

32.2.1 Obrót wektora

Rys. 32.1: Obrót wektora \vec{a} .

zauważmy, że przy obrocie wokół osi \vec{n} składowa \vec{a}_{\parallel} nie ulega zmianie. Wobec tego wektor obrócony możemy zapisać jako

$$\vec{a}' = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}'_{\perp} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a}) + \vec{a}'_{\perp}. \quad (32.5)$$

Rys. 32.2: Obrót wektora \vec{a}_{\perp} – składowej prostopadłej wektora \vec{a} .

Aby określić wektor obrócony musimy wyznaczyć (obróconą) składową prostopadłą. Posłużymy się w tym celu drugim rysunkiem, rzutem na płaszczyznę poziomą – prostopadłą do osi obrotu. Rysunek 32.2 przedstawia "widok z góry" (wektor \vec{n} wychodzi przed rysunek), tj. płaszczyznę w której obraca się wektor \vec{a}_{\perp} . Zwróćmy uwagę, że na rysunku tym zaznaczono iloczyn wektorowy $\vec{n} \times \vec{a}$ (jest on przeciwnego znaku niż $\vec{a} \times \vec{n}$ z poprzedniego rysunku). Bez trudu odczytujemy, że

$$\vec{a}'_{\perp} = \vec{a}_{\perp} \cos \varphi + (\vec{n} \times \vec{a}) \sin \varphi, \quad (32.6)$$

bowiem wszystkie trzy wektory są tej samej długości. Wstawiając (32.6) do (32.5) i korzystając z (32.4) otrzymujemy

$$\vec{a}' = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a}) + (\vec{a} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a})) \cos \varphi + (\vec{n} \times \vec{a}) \sin \varphi. \quad (32.7)$$

Możemy więc napisać pożyteczną relację

$$\begin{aligned} \vec{a} &\xrightarrow{\mathcal{R}(\varphi, \vec{n})} \vec{a}' = \mathcal{R}(\varphi, \vec{n}) \vec{a} \\ &= \vec{a} \cos \varphi + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a})(1 - \cos \varphi) + (\vec{n} \times \vec{a}) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (32.8)$$

Wobec tego zadając (w pewnym ustalonym układzie współrzędnych) wektor \vec{n} oraz kąt φ , możemy na podstawie znanych współrzędnych wektora \vec{a} obliczyć współrzędne wektora obróconego \vec{a}' . Zwróćmy uwagę, że obracamy wektor \vec{a} , zaś układ współrzędnych pozostaje ustalony. Mówimy tu o transformacjach "aktywnych", w których zmianie podlega układ fizyczny, a układ współrzędnych pozostaje ustalony. Można też wybrać podejście odwrotne – transformacje "pasywne" – układ fizyczny jest nie zmieniany, zaś transformacji podlega układ współrzędnych. Omawianemu tu aktywnemu obrotowi układu fizycznego (wektora) odpowiada pasywny obrót układu współrzędnych wokół tej samej osi, ale o kąt przeciwnego znaku (obróć w przeciwnym kierunku).

Przykład: obrót wokół osi z

Pokażemy na przykładzie, jak możemy (na podstawie wzoru (32.8)) skonstruować macierz obrotu. Rozważmy w tym celu obrót o kąt φ wokół osi z (a więc kładziemy $\vec{n} = \vec{e}_z$). W takim przypadku, ze wzoru (32.8) otrzymujemy

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \varphi + \vec{e}_z (\vec{e}_z \cdot \vec{a})(1 - \cos \varphi) + (\vec{e}_z \times \vec{a}) \sin \varphi. \quad (32.9)$$

pisząc $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ łatwo obliczamy

$$\vec{e}_z \times \vec{a} = a_x \vec{e}_y - a_y \vec{e}_x, \quad (32.10)$$

więc z (32.9) dostajemy

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \varphi + a_z \vec{e}_z (1 - \cos \varphi) + (-a_y \vec{e}_x + a_x \vec{e}_y) \sin \varphi. \quad (32.11)$$

Rozpisując wektory na składowe mamy

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos \varphi \\ a_y \cos \varphi \\ a_z \cos \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z(1 - \cos \varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_y \sin \varphi \\ a_x \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32.12)$$

Relację tę można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos \varphi - a_y \sin \varphi \\ a_y \cos \varphi + a_x \sin \varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad (32.13)$$

gdzie odtwarza się dobrze znana macierz obrotu o kąt φ wokół osi z .

Oczywiście można łatwo przeprowadzić analogiczne rozważania dla innych obrotów, pozwalające skonstruować za każdym razem odpowiednie macierze obrotów. W szczególności, składając odpowiednio dobrane obroty, można otrzymać macierz obrotów o kąty Eulera.

32.2.2 Obroty nieskończenie małe

Zastosujmy wzór (32.8) do obrotu nieskończenie małego, w którym kąt $d\varphi \rightarrow 0$. Ograniczymy się przy tym do przybliżenia liniowego względem $d\varphi$, zatem

$$\cos(d\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}(d\varphi)^2 \approx 1, \quad \sin(d\varphi) \approx d\varphi. \quad (32.14)$$

W takim razie, z (32.8) mamy

$$\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{R}(d\varphi, \vec{n})} \vec{a}' = \vec{a} + (\vec{n} \times \vec{a}) d\varphi, \quad (32.15)$$

co okaże się bardzo pożyteczne.

32.2.3 Własności obrotów

Jak już wspominaliśmy, nie jest naszym celem przedstawienie teorii obrotów w \mathbb{R}^3 . Dlatego też ograniczymy się skrótowego omówienia najważniejszych własności obrotów. Wyprowadzenia (i matematyczne dowody) można znaleźć w podręcznikach geometrii (lub algebry z geometrią).

Obroty w \mathbb{R}^3 tworzą grupę transformacji.

- Obrót o kąt zerowy (identyczność) jest jedynką grupy.

- Dla każdego obrotu $\mathcal{R}(\varphi, \vec{n})$ istnieje obrót odwrotny $\mathcal{R}^{-1}(\varphi, \vec{n}) = \mathcal{R}(-\varphi, \vec{n}) = \mathcal{R}(\varphi, -\vec{n})$.
- Złożenie obrotów jest nadal (innym) obrotem. Należy jednak pamiętać, że obroty wokół różnych osi są na ogół nieprzemienne, to jest

$$\mathcal{R}(\alpha, \vec{n}_1)\mathcal{R}(\beta, \vec{n}_2) \neq \mathcal{R}(\beta, \vec{n}_2)\mathcal{R}(\alpha, \vec{n}_1). \quad (32.16)$$

Obroty wokół tej samej osi są przemienne i ponadto spełniają

$$\mathcal{R}(\alpha, \vec{n})\mathcal{R}(\beta, \vec{n}) = \mathcal{R}(\alpha + \beta, \vec{n}) \quad (32.17)$$

Obroty nie zmieniają długości wektorów ani kątów pomiędzy nimi (są izometriami). W konsekwencji iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jest niezmiennikiem obrotu i jest równy iloczynowi $\vec{a}' \cdot \vec{b}'$ wektorów obróconych. Macierze obrotów są więc macierzami ortogonalnymi.

32.3 Operatory obrotów w przestrzeni stanów (bez spinu)

32.3.1 Definicja operatora obrotu

Wracamy teraz do zagadnień mechaniki kwantowej. Skupmy uwagę na pojedynczej cząstce (bez-spinowej), której stan opisuje wektor $|\psi\rangle$ z przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Funkcja falowa cząstki (w reprezentacji położeniowej) to

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle. \quad (32.18)$$

Założmy teraz, że nasz układ fizyczny został poddany obrotowi. Położenie \vec{r} uległo zmianie i wynosi $\vec{r}' = \mathcal{R}(\alpha, \vec{n})\vec{r}$. Jaka jest funkcja falowa cząstki po wykonaniu obrotu? Wydaje się być naturalnym następujące założenie: "stara" funkcja falowa obliczona w "starym" punkcie \vec{r} powinna mieć tę samą wartość co "nowa" funkcja obliczona w "nowym" punkcie. To intuicyjnie oczywiste założenie zapiszemy formalnie w postaci

$$(\vec{r}' = \mathcal{R}(\alpha, \vec{n})\vec{r}) \implies (\psi'(\vec{r}') = \psi(\vec{r})). \quad (32.19)$$

Ponieważ $\vec{r} = \mathcal{R}^{-1}(\alpha, \vec{n})\vec{r}'$, więc warunek nałożony na funkcje falowe możemy zapisać w postaci

$$\psi'(\vec{r}') = \psi(\mathcal{R}^{-1}\vec{r}'), \quad (32.20)$$

gdzie opuściliśmy prim przy wektorze \vec{r} oraz skrótowo oznaczyliśmy obrót. Ponieważ pracujemy w reprezentacji położeniowej, więc zamiast (32.20) możemy napisać

$$\langle \vec{r}' | \psi' \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1}\vec{r}' | \psi \rangle. \quad (32.21)$$

Stan $|\psi'\rangle$, który powstaje ze stanu $|\psi\rangle$ przy obrocie układu fizycznego przedstawimy w postaci

$$|\psi'\rangle = \mathbf{R}|\psi\rangle, \quad (32.22)$$

a więc jako skutek działania pewnego operatora \mathbf{R} (zależnego od kierunku \vec{n} i kąta obrotu φ) na stan $|\psi\rangle$ – sprzed obrotu. Łącząc dwie powyższe relacje mamy

$$\langle \vec{r}' | \mathbf{R} | \psi \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1}\vec{r}' | \psi \rangle, \quad (32.23)$$

gdzie $\langle \mathcal{R}^{-1}\vec{r}' |$ to bra (w reprezentacji położeniowej) określone przez współrzędne wektora $\vec{r}' = \mathcal{R}^{-1}\vec{r}$. Formuła (32.23) wyznacza więc operację $\mathbf{R} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ związaną z (indukowaną) obrotem $\mathcal{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})$ w przestrzeni \mathbb{R}^3 – przestrzeni położeń. Należy jednak pamiętać, że \mathbf{R} i \mathcal{R} to dwa zupełnie różne obiekty matematyczne. Pierwszy działa w (na ogół nieskończenie wielowymiarowej) przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , a drugi w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^3 .

32.3.2 Własności operatora obrotu

Operator \mathbf{R} jest liniowy. Aby to wykazać załóżymy, że stan $|\psi\rangle$ jest kombinacją liniową $|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Zgodnie z (32.23) mamy więc

$$\begin{aligned}\langle \vec{r} | \mathbf{R} | \psi \rangle &= \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \psi \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | (\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2) \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \psi_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \vec{r} | \mathbf{R} | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{r} | \mathbf{R} | \psi_2 \rangle \\ &= \langle \vec{r} | (\lambda_1 \mathbf{R} | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \mathbf{R} | \psi_2 \rangle)\end{aligned}\quad (32.24)$$

Ponieważ \vec{r} jest dowolny więc

$$\begin{aligned}\mathbf{R} | \psi \rangle &= \mathbf{R}(\lambda_1 | \psi_1 \rangle + \lambda_2 | \psi_2 \rangle) \\ &= \lambda_1 \mathbf{R} | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \mathbf{R} | \psi_2 \rangle,\end{aligned}\quad (32.25)$$

czyli \mathbf{R} rzeczywiście jest operatorem liniowym.

Relacja (32.23) ma zachodzić dla dowolnych ketów, więc wynika z niej relacja dla bra

$$\langle \vec{r} | \mathbf{R} = \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} |, \quad (32.26)$$

która po sprzężeniu przyjmuje postać

$$\mathbf{R}^\dagger | \vec{r} \rangle = | \mathcal{R}^{-1} \vec{r} \rangle. \quad (32.27)$$

Lemat 32.1 Relacja (32.27) jest równoważna relacji

$$\mathbf{R} | \vec{r} \rangle = | \mathcal{R} \vec{r} \rangle. \quad (32.28)$$

Stan $|\vec{r}\rangle$ odpowiada cząstce zlokalizowanej w punkcie \vec{r} . Więc (32.28) oznacza, że po obrocie układu, cząstka będzie w punkcie $\vec{r}' = \mathcal{R} \vec{r}$, co odpowiada stanowi $|\vec{r}'\rangle = \mathbf{R} |\vec{r}\rangle = | \mathcal{R} \vec{r} \rangle$.

Dowód. Weźmy relację (32.23), w której położymy $|\psi\rangle = |\vec{r}_0\rangle$, a zatem mamy

$$\langle \vec{r} | \mathbf{R} | \vec{r}_0 \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \vec{r}_0 \rangle = \delta(\mathcal{R}^{-1} \vec{r} - \vec{r}_0), \quad (32.29)$$

co wynika z normowania stanów bazy położeniowej. Delta Diraca nie znika jedynie wtedy, gdy $\mathcal{R}^{-1} \vec{r} = \vec{r}_0$, lub na odwrót, gdy $\vec{r} = \mathcal{R} \vec{r}_0$, więc

$$\langle \vec{r} | \mathbf{R} | \vec{r}_0 \rangle = \delta(\vec{r} - \mathcal{R} \vec{r}_0) = \langle \vec{r} | \mathcal{R} \vec{r}_0 \rangle. \quad (32.30)$$

Z dowolności bra $\langle \vec{r} |$ wynika teza. $\langle \vec{r} |$ stanowią bazę w przestrzeni bra – rozkład jest jednoznaczny, czyli $\mathbf{R} | \vec{r}_0 \rangle = | \mathcal{R} \vec{r}_0 \rangle$, a to jest właśnie teza lematu. ■

Unitarność

Rozważmy $\mathbf{R}^\dagger \mathbf{R} | \vec{r} \rangle$. Z (32.28) wynika, że

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{R} | \vec{r} \rangle = \mathbf{R}^\dagger | \mathcal{R} \vec{r} \rangle. \quad (32.31)$$

Dalej, z (32.27) mamy

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{R} | \vec{r} \rangle = | \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R} \vec{r}) \rangle = | \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} \vec{r} \rangle = | \vec{r} \rangle. \quad (32.32)$$

Ponieważ kety $|\vec{r}\rangle$ stanowią bazę w \mathcal{H} , więc

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{R} = \hat{\mathbf{1}}. \quad (32.33)$$

Na odwrót, lecz całkiem analogicznie

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^\dagger |\vec{r}\rangle = \mathbf{R} |\mathcal{R}^{-1} \vec{r}\rangle = |\mathcal{R} \mathcal{R}^{-1} \vec{r}\rangle = |\vec{r}\rangle. \quad (32.34)$$

A zatem otrzymaliśmy

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^\dagger = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{R} = \hat{\mathbf{1}}, \quad (32.35)$$

co oznacza, że operator \mathbf{R} jest unitarny.

Konsekwencją unitarności operatora \mathbf{R} jest zachowanie iloczynu skalarnego w \mathcal{H} . Istotnie, niech $|\psi'\rangle = \mathbf{R}|\psi\rangle$ oraz $|\phi'\rangle = \mathbf{R}|\phi\rangle$, wówczas

$$\langle \psi' | \phi' \rangle = \langle \psi | \mathbf{R}^\dagger \mathbf{R} | \phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle. \quad (32.36)$$

Iloczyny skalarne są amplitudami prawdopodobieństw i służą do przewidywań fizycznych. Niezmienniczość iloczynu skalarnego przy obrotach oznacza, że przewidywania fizyczne w układzie nieobróconym i obróconym są takie same.

32.3.3 Transformacja obserwabli

Analogicznie jak w przypadku amplitud prawdopodobieństwa chcemy, aby wartości oczekiwane obserwabli w obróconym układzie fizycznym były takie same jak w układzie nieobróconym. A więc chcemy, aby

$$\langle \psi' | \hat{Q}' | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle, \quad (32.37)$$

gdzie \hat{Q}' oraz \hat{Q} to pewne obserwabli po i przed obrotem. Ponieważ $|\psi'\rangle = \mathbf{R}|\psi\rangle$ więc

$$\langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{R}^\dagger \hat{Q}' \mathbf{R} | \psi \rangle, \quad (32.38)$$

skąd, wobec dowolności keta $|\psi\rangle$ wynika, że

$$\hat{Q} = \mathbf{R}^\dagger \hat{Q}' \mathbf{R} \quad \text{lub} \quad \hat{Q}' = \mathbf{R} \hat{Q} \mathbf{R}^\dagger, \quad (32.39)$$

przy czym druga równość jest konsekwencją unitarności operatora \mathbf{R} . Formuły te stanowią prawo transformacji obserwabli \hat{Q} przy obrotach układu fizycznego.

Niech $|\vec{r}_1'\rangle$ i $|\vec{r}_2'\rangle$ oznaczają pewne stany położeniowe w obróconym układzie fizycznym. Zgodnie z (32.28) mamy więc $|\vec{r}_k'\rangle = \mathbf{R}|\vec{r}_k\rangle = |\mathcal{R}\vec{r}_k\rangle$. Stosując warunek (32.37) możemy więc napisać

$$\langle \vec{r}_1' | \hat{Q}' | \vec{r}_2' \rangle = \langle \vec{r}_1 | \hat{Q} | \vec{r}_2 \rangle. \quad (32.40)$$

Ale z drugiej strony z (32.39)

$$\langle \vec{r}_1' | \hat{Q}' | \vec{r}_2' \rangle = \langle \vec{r}_1' | \mathbf{R} \hat{Q} \mathbf{R}^\dagger | \vec{r}_2' \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r}_1' | \hat{Q} | \mathcal{R}^{-1} \vec{r}_2' \rangle, \quad (32.41)$$

gdzie skorzystaliśmy z (32.26) i (32.27). Prawe strony obu powyższych relacji są ewidentnie zgodne, bo $\vec{r}_k' = \mathcal{R}\vec{r}_k$ lub też $\vec{r}_k = \mathcal{R}^{-1}\vec{r}_k'$.

32.4 Obroty i momentu pędu

32.4.1 Obrót infinitesimalny

Rozważmy teraz obrót infinitesimalny o kąt $d\varphi$ wokół osi z (zatem $\vec{n} = \vec{e}_z$). Wobec tego funkcja falowa cząstki musi spełniać warunek (32.20)

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(\mathcal{R}^{-1}(d\varphi, \vec{e}_z) \vec{r}). \quad (32.42)$$

Obrót infinitesimalny $\mathcal{R}(d\varphi, \vec{e}_z)$ określony jest formułą (32.15). Ponieważ potrzebny jest nam obrót odwrotny, więc kładziemy $-d\varphi$ zamiast $d\varphi$, a zatem

$$\vec{a} \xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}(d\varphi, \vec{e}_z)} \vec{a}' = \vec{a} - (\vec{n} \times \vec{a}) d\varphi. \quad (32.43)$$

Dla wektora położenia $\vec{r} = (x, y, z)$ łatwo obliczyć, że

$$\vec{r}' = \mathcal{R}^{-1}(d\varphi, \vec{e}_z) \vec{r} = \begin{pmatrix} x + y d\varphi \\ y - x d\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (32.44)$$

Stosując (32.44) możemy (32.42) zapisać w postaci

$$\psi'(x, y, z) = \psi(x + y d\varphi, y - x d\varphi, z). \quad (32.45)$$

Interesuje nas przybliżenie liniowe względem kąta obrotu (obróć infinitesimalny), więc rozwijając prawą stronę w szereg Taylora otrzymujemy

$$\begin{aligned} \psi'(x, y, z) &= \psi(x, y, z) + y \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} d\varphi - x \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} d\varphi \\ &= \left[1 - \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) d\varphi \right] \psi(x, y, z). \end{aligned} \quad (32.46)$$

Wprowadzamy teraz operator (pomijamy daszek)

$$L_z \equiv L_3 = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (32.47)$$

za pomocą którego zapisujemy wzór (32.46) w postaci

$$\psi'(x, y, z) = \left[1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi L_z \right] \psi(x, y, z). \quad (32.48)$$

Ponieważ posługujemy się reprezentacją położeniową, więc powyższa formuła jest równoważna następującej

$$\langle \vec{r} | \psi' \rangle = \langle \vec{r} | \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi L_z \right) | \psi \rangle, \quad (32.49)$$

co obowiązuje dla dowolnego $\langle \vec{r} |$. Wobec tego, przy infinitesimalnym obrocie ket $|\psi\rangle$ przechodzi w ket $|\psi'\rangle$ dany wzorem

$$|\psi'\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi L_z \right) |\psi\rangle. \quad (32.50)$$

Stąd zaś wynika, że operator infinitesimalnego obrotu (zgodnie z (32.22)) ma postać

$$\mathcal{R}(d\varphi, \vec{e}_z) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi (\vec{e}_z \cdot \vec{L}), \quad (32.51)$$

gdzie oznaczyliśmy $L_z = \vec{e}_z \cdot \vec{L}$.

Analogiczne rozważania możemy powtórzyć dla nieskończenie małych obrotów wokół obu pozostałych osi, a wreszcie uogólnić na obrót wokół dowolnej osi \vec{n} . Otrzymamy wówczas operator obrotu

$$\mathbf{R}(d\varphi, \vec{n}) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi (\vec{n} \cdot \vec{L}), \quad (32.52)$$

gdzie operator \vec{L} ma trzy składowe, to jest $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$, dane wzorami

$$L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (32.53a)$$

$$L_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (32.53b)$$

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (32.53c)$$

Zauważmy w tym miejscu, że składowe operatora \vec{L} możemy zapisać za pomocą odpowiednich składowych operatora pędu $p_k = -i\hbar \nabla_k$. A zatem mamy

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x, \quad (32.54)$$

co można zapisać jedną, wektorową, formułą

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \text{lub} \quad L_k = \varepsilon_{kmn} x_m p_n, \quad (32.55)$$

Oczywiście więc operator \vec{L} nazwiemy operatorem (orbitalnego) momentu pędu cząstki. Gdyby układ fizyczny składał się z wielu cząstek musielibyśmy rozważać cały układ i mówić o całkowitym momencie pędu. Oczywiście uzyskane tu określenie momentu pędu (32.53) jest identyczne z rezultatami uzyskanymi w głównej części wykładu na mocy zasady odpowiedniości. Warto jednak podkreślić, że uzyskane tu wyrażenia (32.53) są konsekwencjami własności obrotów.

32.4.2 Operator skończonego obrotu i moment pędu

Operator obrotu nieskończenie małego dany jest wzorem (32.52). Możemy bez trudu składać takie obroty, bowiem operator \vec{L} zawsze komutuje sam ze sobą, a kolejne obroty nieskończenie małe są dokonywane wokół tej samej osi. Niech teraz $d\varphi/N$, gdzie N jest bardzo dużą liczbą naturalną. Złożenie N obrotów będzie więc obrotem o kąt φ wokół osi \vec{n}

$$\mathbf{R}(\varphi, \vec{n}) = \left[1 - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\varphi}{N} \right) \vec{n} \cdot \vec{L} \right]^N. \quad (32.56)$$

W granicy gdy $N \rightarrow \infty$, z definicji funkcji wykładniczej, otrzymujemy

$$\mathbf{R}(\varphi, \vec{n}) = \exp \left[-\frac{i\varphi}{\hbar} \vec{n} \cdot \vec{L} \right]. \quad (32.57)$$

Operator \vec{L} jest hermitowski (co łatwo sprawdzić, z definicji (32.53)), operator $\mathbf{R}(\varphi, \vec{n})$ jest więc unitarny, jak zresztą być powinno. Co więcej, operator \vec{L} określa transformację w przestrzeni \mathcal{H} indukowaną przez obroty układu fizycznego, dlatego nazywamy go generatorem obrotów w \mathcal{H} i, jak już wspominaliśmy, utożsamiamy z momentem pędu (orbitalnym) pojedynczej cząstki.

Podkreślmy, że formuły (32.51)-(32.57) możemy przyjąć za definicję momentu pędu. Trzeba dobrze sobie uświadomić, które związki są definicjami, a które ich konsekwencjami.

32.4.3 Transformacje obserwabli

Relacja (32.39) mówiąca nam, jak transformują się obserwable, może być zastosowana do obrotu nieskończonego. A więc z (32.52) i (32.39) otrzymujemy

$$\hat{Q}' = \mathbf{R} \hat{Q} \mathbf{R}^\dagger = \left[1 - \frac{i}{\hbar} d\varphi (\vec{n} \cdot \vec{L}) \right] \hat{Q} \left[1 + \frac{i}{\hbar} d\varphi (\vec{n} \cdot \vec{L}) \right], \quad (32.58)$$

gdzie skorzystaliśmy z hermitowskości \vec{L} . Przy obrotach nieskończonego pracujemy z dokładnością liniową względem kąta obrotu, zatem z powyższego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{Q}' &= \hat{Q} - \frac{i}{\hbar} d\varphi (\vec{n} \cdot \vec{L}) \hat{Q} + \frac{i}{\hbar} d\varphi \hat{Q} (\vec{n} \cdot \vec{L}) \\ &= \hat{Q} - \frac{i}{\hbar} d\varphi [\vec{n} \cdot \vec{L}, \hat{Q}], \end{aligned} \quad (32.59)$$

a więc sposób transformacji obserwabli \hat{Q} zależy od jej relacji komutacyjnych z operatorem momentu pędu. Możemy teraz postępować dwojako.

- Jeśli umiemy określić przetransformowaną obserwabę \hat{Q}' bez odwoływania się do relacji (32.59), tj. jeśli umiemy zadać prawo transformacyjne $\hat{Q} \rightarrow \hat{Q}'$, wówczas możemy odczytać relację komutacyjną dla operatorów \vec{L} i \hat{Q} .
- Możemy postępować odwrotnie. Narzucić relacje komutacyjne i stąd wyprowadzić prawo transformacji obserwabli.

Wprowadziliśmy tu jednak moment pędu \vec{L} jako generator obrotów (innymi słowy obroty "definiują" \vec{L}), więc pierwsza ścieżka wydaje się być bardziej naturalna.

32.5 Relacje komutacyjne

Obserwable skalarne

Operatory skalarne, są to z definicji operatory niezmiennicze przy obrotach układu fizycznego. A więc

$$\{ \hat{A} - \text{skalarne} \} \iff \{ \hat{A}' = \mathbf{R} \hat{A} \mathbf{R}^\dagger = \hat{A} \} \quad (32.60)$$

Oznacza to, że obserwabla skalarna komutuje z operatorem obrotu

$$[\mathbf{R}, \hat{A}] = 0. \quad (32.61)$$

Ponadto, ze wzoru transformacyjnego (32.59), a także z określenia operatora \mathbf{R} , wynika wówczas że

$$[\vec{n} \cdot \vec{L}, \hat{A}] = 0. \quad (32.62)$$

Biorąc jako wektor \vec{n} kolejne wektory osi otrzymamy

$$[L_k, \hat{A}] = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (32.63)$$

Operatory skalarne komutują ze składowymi operatora momentu pędu. W szczególności operatory takie jak kwadrat operatora położenia $\hat{\mathbf{R}}^2$, kwadrat operatora pędu $\hat{\mathbf{P}}^2$, iloczyn skalarny operatorów $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{P}}$ komutują ze składowymi momentu pędu

$$[L_k, \hat{\mathbf{R}}^2] = 0, \quad (32.64a)$$

$$[L_k, \hat{\mathbf{P}}^2] = 0, \quad (32.64b)$$

$$[L_k, \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{P}}] = 0. \quad (32.64c)$$

Relacje te można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, biorąc składowe L_k w/g wzorów (32.53) i wyrażając pozostałe operatory w reprezentacji położeniowej (co zresztą jest zrobione w głównej części wykładu). Podkreślimy jednak, że relacje (32.64) wynikają z niezmienniczości operatorów skalarnych przy obrotach i obowiązują niezależnie od wyboru takiej, czy innej reprezentacji.

W szczególności operator

$$\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad (32.65)$$

jest operatorem skalarnym, więc musi spełniać regułę

$$[L_k, \vec{L}^2] = 0, \quad (32.66)$$

którą także można sprawdzić dokonując odpowiednich (dość żmudnych) obliczeń w reprezentacji położeniowej.

Obserwable wektorowe

Operator wektorowy określimy w następujący sposób. Niech jednostkowy wektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ przy obrocie $\mathcal{R}(\varphi, \vec{n})$ przekształca się na $\vec{u}' = \mathcal{R}(\varphi, \vec{n})\vec{u}$. Operator wektorowy \vec{A} to taki, którego składowa $A_u = \vec{A} \cdot \vec{u}$ transformuje się na $A'_u = \vec{A} \cdot \vec{u}'$. Zapiszmy to stwierdzenie bardziej formalnie

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}' = \mathcal{R}(\varphi, \vec{n})\vec{u} \\ \vec{A} \text{ - wektorowy} \end{array} \right\} \iff A_u = \vec{A} \cdot \vec{u} \xrightarrow{R} A'_u = \vec{A} \cdot \vec{u}'. \quad (32.67)$$

Aby lepiej zrozumieć sposoby transformacji operatorów wektorowych przeprowadzimy dokładniejszą dyskusję pewnego szczególnego przypadku.

Rozważmy obrót nieskończenie mały o kąt $d\varphi$ wokół osi x . Zgodnie z (32.15) mamy wówczas

$$\vec{a}' = \vec{a} + (\vec{e}_x \times \vec{a}) d\varphi. \quad (32.68)$$

Stosując tę relację do wektorów osi otrzymujemy

$$\begin{aligned} \vec{e}_x' &= \vec{e}_x + (\vec{e}_x \times \vec{e}_x) d\varphi = \vec{e}_x, \\ \vec{e}_y' &= \vec{e}_y + (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) d\varphi = \vec{e}_y + \vec{e}_z d\varphi, \\ \vec{e}_z' &= \vec{e}_z + (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) d\varphi = \vec{e}_z - \vec{e}_y d\varphi. \end{aligned} \quad (32.69)$$

Według określenia (32.67), składowe operatora \vec{A} transformują się w następujący sposób

$$\begin{aligned} \vec{A}_x' &= \vec{A} \cdot \vec{e}_x' = \vec{A} \cdot \vec{e}_x = \vec{A}_x, \\ \vec{A}_y' &= \vec{A} \cdot \vec{e}_y' = \vec{A} \cdot (\vec{e}_y + \vec{e}_z d\varphi) = A_y + A_z d\varphi, \\ \vec{A}_z' &= \vec{A} \cdot \vec{e}_z' = \vec{A} \cdot (\vec{e}_z - \vec{e}_y d\varphi) = A_z - A_y d\varphi. \end{aligned} \quad (32.70)$$

Z drugiej strony, prawo transformacyjne (32.59) mówi, że (tu $\vec{n} = \vec{e}_x$)

$$\begin{aligned} A_j' &= A_j - \frac{i}{\hbar} d\varphi [\vec{e}_x \cdot \vec{L}, A_j], \\ &= A_j - \frac{i}{\hbar} d\varphi [L_x, A_j], \quad j = x, y, z. \end{aligned} \quad (32.71)$$

Zestawiając prawe strony przetransformowanych składowych operatora \vec{A} w (32.70) z prawą stroną (32.71), kolejno otrzymujemy

$$A_x = A_x - \frac{i}{\hbar} d\varphi [L_x, A_x], \implies [L_x, A_x] = 0. \quad (32.72)$$

Dla drugiej składowej, w analogiczny sposób mamy

$$A_y + A_z d\varphi = A_y - \frac{i}{\hbar} d\varphi [L_x, A_y], \quad \implies \quad [L_x, A_y] = i\hbar A_z. \quad (32.73)$$

I wreszcie dla trzeciej składowej dostajemy

$$A_z - A_y d\varphi = A_z - \frac{i}{\hbar} d\varphi [L_x, A_z], \quad \implies \quad [L_x, A_z] = -i\hbar A_y. \quad (32.74)$$

Zbierając rezultaty, piszemy

$$\begin{aligned} [L_x, A_x] &= 0, \\ [L_x, A_y] &= i\hbar A_z, \\ [L_x, A_z] &= -i\hbar A_y. \end{aligned} \quad (32.75)$$

Bez trudu powtarzamy takie same rozważania dla obrotów wokół osi $\vec{n} = \vec{e}_y$ i $\vec{n} = \vec{e}_z$. Otrzymujemy wówczas relacje komutacyjne

$$\begin{aligned} [L_y, A_x] &= -i\hbar A_z, & [L_z, A_x] &= i\hbar A_y, \\ [L_y, A_y] &= 0, & [L_z, A_y] &= -i\hbar A_x, \\ [L_y, A_z] &= i\hbar A_x, & [L_z, A_z] &= 0. \end{aligned} \quad (32.76)$$

Dziewięć powyższych relacji komutacyjnych można zapisać jednym wzorem

$$[L_a, A_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} A_c. \quad (32.77)$$

Uzyskana relacja komutacyjna dla składowych operatora momentu pędu i dowolnego operatora wektorowego pozwala wypisać odpowiednie reguły dla szczególnych przypadków.

- Dla operatora położenia $\hat{\mathbf{R}} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$

$$[L_a, x_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} x_c. \quad (32.78)$$

- Dla operatora pędu $\hat{\mathbf{P}} = (p_x, p_y, p_z) = (p_1, p_2, p_3)$

$$[L_a, p_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} p_c. \quad (32.79)$$

- Dla samego operatora momentu pędu $\vec{\mathbf{L}} = (L_1, L_2, L_3)$

$$[L_a, L_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} L_c. \quad (32.80)$$

Powyższe relacje można sprawdzić w reprezentacji położeniowej. W szczególności warto sprawdzić (co zresztą robimy w głównej części wykładu), że relacja (32.80) jest zgodna z relacją (32.66). Wszystkie uzyskane tu związki komutacyjne są konsekwencją definicji operatora $\vec{\mathbf{L}}$ jako generatora obrotów i własności operatorów przy transformacjach indukowanych obrotem w przestrzeni położenia.

32.6 Uwagi końcowe

32.6.1 Całkowity moment pędu

Przeprowadzona dyskusja dotyczyła pojedynczej (bezsłownej) cząstki. Jej moment pędu $\vec{\mathbf{L}}$ zwany orbitalnym, jest generatorem obrotów, to znaczy przy obrotach przestrzennych stany cząstki transformują się

$$|\psi'\rangle = \mathbf{R}(\varphi, \vec{n})|\psi\rangle, \quad (32.81)$$

gdzie

$$\mathbf{R}(\varphi, \vec{n}) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} d\varphi \left(\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{L}} \right) \right]. \quad (32.82)$$

W ogólnym przypadku, układ fizyczny może składać się z wielu cząstek (w tym i takich które posiadają spin). Wówczas musimy posługiwać się całkowitym momentem pędu rozważanego układu. Musimy więc wprowadzić

$$\vec{\mathbf{J}} - \text{całkowity moment pędu.} \quad (32.83)$$

Odpowiedni operator obrotu będzie miał wtedy postać

$$\mathbf{R}(\varphi, \vec{n}) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} d\varphi \left(\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right) \right]. \quad (32.84)$$

Omówione wyżej własności obrotów pozostaną niezmienione, tyle że operator $\vec{\mathbf{L}}$ musi być zastąpiony przez $\vec{\mathbf{J}}$ – całkowity moment pędu. Oczywiście ogólna teoria obrotów ulega wówczas komplikacji, choć zasadnicze wnioski (np. relacje komutacyjne) pozostają w mocy bez istotniejszych zmian.

32.6.2 Niezmienniczość przy obrotach

Intuicyjnie przewidujemy, że obrót izolowanego układu fizycznego nie powinien prowadzić do zmiany jego własności fizycznych (choć sposób, czy forma opisu po obrocie może być inna niż przed obrotem). Trzeba być jednak ostrożnym, bowiem mogą istnieć transformacje, przy których układ fizyczny ulega jednak zmianie. Niezmienniczość przy obrotach należy więc traktować raczej jako postulat, który jest następnie sprawdzany doświadczalnie. Przyjmijmy, że postulat ten jest spełniony. Przewidywania fizyczne (np. wartości własne obserwabli) dla obserwabli \hat{Q}' powinny być takie same jak dla \hat{Q} – obserwabli przed obrotem. Oczekiwanie to znajduje swój wyraz w fakcie, że operator obrotu \mathbf{R} jest unitarny.

Co więcej, ewolucja czasowa nie powinna zależeć od obrotu. Oznacza to, że nie ma znaczenia, w której chwili wykonany zostanie obrót. Aby to wyjaśnić przeprowadzimy następujące rozumowanie.

- Układ znajdujący się (w pewnej chwili początkowej) w stanie $|\psi(t_0)\rangle$ został poddany obrotowi tak, że jego stan zmienił się do $|\psi'(t_0)\rangle = \mathbf{R}|\psi(t_0)\rangle$. Stan ten następnie ewoluował do stanu $|\psi'(t)\rangle$. Formalnie zapisując, mamy

$$|\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{\text{obrot}} \mathbf{R}|\psi(t_0)\rangle = |\psi'(t_0)\rangle \xrightarrow{\text{ewolucja}} |\psi'(t)\rangle \quad (32.85)$$

- Rozpatrzmy teraz odwrotną sekwencję. Układ najpierw ewoluuje od chwili t_0 do chwili t . Wtedy dokonany jest obrót. A więc w tym przypadku

$$|\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{\text{ewolucja}} |\psi(t)\rangle \xrightarrow{\text{obrot}} |\psi''(t)\rangle = \mathbf{R}|\psi(t)\rangle \quad (32.86)$$

Niezmienniczość względem obrotu wymaga, aby oba stany końcowe były jednakowe, to znaczy aby

$$|\psi''(t)\rangle = \mathbf{R}|\psi(t)\rangle = |\psi'(t)\rangle. \quad (32.87)$$

Założmy dalej, że hamiltonian \hat{H} badanego (izolowanego) układu fizycznego komutuje z operatorem całkowitego momentu pędu

$$[J_k, \hat{H}] = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (32.88)$$

Oznacza to, że hamiltonian przy infinitezymalnych obrotach jest niezmienny, a w konsekwencji komutuje z operatorem obrotu skończonego. A zatem

$$\hat{H} \mathbf{R} = \mathbf{R} \hat{H}. \quad (32.89)$$

Inaczej mówiąc, z relacji transformacyjnej (32.39) wynika, że

$$\hat{H}' = \mathbf{R} \hat{H} \mathbf{R}^\dagger = \hat{H}. \quad (32.90)$$

Konsekwencją relacji komutacyjnej (32.88) jest więc niezmienniczość hamiltonianu przy obrotach. Oczywiście nasze rozumowanie można odwrócić: hamiltonian niezmienniczy przy obrotach, komutuje z całkowitym momentem pędu układu. Ewolucja w układzie nieobróconym (zależna od \hat{H}) przebiega tak samo jak w układzie obróconym (gdzie $\hat{H}' = \hat{H}$).

Niech teraz układ będący w stanie $|\psi(t)\rangle$ ewoluje do chwili $t + \Delta t$. Stosując rozwinięcie w szereg Taylora piszemy więc

$$\begin{aligned} |\psi(t + \Delta t)\rangle &= |\psi(t)\rangle + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \\ &= |\psi(t)\rangle + \frac{\Delta t}{i\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle, \end{aligned} \quad (32.91)$$

gdzie druga równość wynika z równania Schrödingera.

Zastosujmy powyższy opis w bardziej szczegółowej analizie pierwszego z podanych wyżej scenariuszy. W pewnej chwili t układ fizyczny opisany stanem $|\psi(t)\rangle$ poddany został obrotowi i znalazł się w stanie $|\psi'(t)\rangle = \mathbf{R} |\psi(t)\rangle$. Następnie (już w układzie obróconym, gdzie $\hat{H}' = \hat{H}$, zgodnie z założeniami (32.88)-(32.90)) ewoluje do stanu

$$\begin{aligned} |\psi'(t + \Delta t)\rangle &= |\psi'(t)\rangle + \frac{\Delta t}{i\hbar} \hat{H}' |\psi'(t)\rangle \\ &= \mathbf{R} |\psi(t)\rangle + \frac{\Delta t}{i\hbar} \hat{H} \mathbf{R} |\psi(t)\rangle, \end{aligned} \quad (32.92)$$

Przechodzimy do drugiego scenariusza. Najpierw mamy ewolucję od chwili t do chwili $t + \Delta t$, a potem dokonujemy obrotu, otrzymując w rezultacie stan

$$\mathbf{R} |\psi(t + \Delta t)\rangle = |\psi'(t + \Delta t)\rangle = \mathbf{R} |\psi(t)\rangle + \frac{\Delta t}{i\hbar} \mathbf{R} \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (32.93)$$

Prawe strony dwóch ostatnich równań są równe, bowiem hamiltonian \hat{H} i operator obrotu \mathbf{R} komutują. A zatem równe są także lewe strony $\mathbf{R} |\psi(t + \Delta t)\rangle = |\psi'(t + \Delta t)\rangle$, co zgodnie z (32.87) oznacza, że układ jest niezmienniczy względem obrotów. Wykazaliśmy więc, że jeśli hamiltonian \hat{H} komutuje z operatorem (całkowitego) momentu pędu, to układ jest niezmienniczy względem obrotów. Innymi słowy, hamiltonian układu izolowanego jest skalarem. Układy oddziałujące nie muszą już mieć tej własności. Co więcej, relacja $[\hat{H}, \vec{\mathbf{J}}] = 0$ oznacza, że moment pędu układu jest stałą ruchu. Podkreślamy raz jeszcze, że mówimy tu o całkowitym momencie pędu.

Omówione w tym rozdziale związki pomiędzy obrotami a momentem pędu układu fizycznego stanowią jedynie bardzo powierzchowny przegląd ogromnego bogactwa bardzo różnorodnych zagadnień. Szczególnie istotne są tu prawa zachowania. W układzie, którego hamiltonian jest skalarem moment pędu jest zachowany, a układ jest niezmienniczy (w omówionym sensie) względem obrotów. Symetria układu daje więc w rezultacie prawa zachowania. Związek ten jest bardzo ogólny i ma dalekosiężne konsekwencje. Samo omówienie (nie wspominając o pełniejszej dyskusji) tych problemów wybiega jednak daleko poza zakres niniejszych wykładów.

* * * * *