

Zadania domowe: Seria 2

Zadanie 2.1. (Hermitowskość i unitarność operatorów)(1.11)

Niech \hat{A} – hermitowski. Zbadać unitarność operatora $\hat{B} = \exp(i\alpha\hat{A})$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.2. (Elementarne własności komutatorów)(1.13)

Udowodnić następujące relacje komutacyjne:

- a.) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}],$
- b.) $[\hat{A}, a] = 0,$
- c.) $[(a\hat{A} \pm b\hat{B}), \hat{D}] = a[\hat{A}, \hat{D}] \pm b[\hat{B}, \hat{D}],$
- d.) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{D}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{D}] + [\hat{A}, \hat{D}]\hat{B},$
- e.) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$
- f.) $[\hat{A}^2, \hat{B}] = \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}.$

gdzie a i b są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Zadanie 2.3. (Elementarne własności komutatorów)(1.14)

Następujące komutatory sprowadzić do prostszej postaci:

- a.) $[(\hat{A} - \hat{B}), (\hat{A} + \hat{B})],$
- b.) $[(\hat{A} - \alpha), (\hat{B} + \beta)] \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}),$
- c.) $[(\hat{A} - \hat{B}), (\hat{A} + \hat{B})]_+,$

gdzie $[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}$ jest tak zwanym antykomutatorem dwóch operatorów.

Zadanie 2.4. (Elementarne własności komutatorów)(1.15)

Obliczyć sumę komutatorów:

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{C}] + [[\hat{B}, \hat{C}], \hat{A}] + [[\hat{C}, \hat{A}], \hat{B}].$$

Zadanie 2.5. (Elementarne własności komutatorów)(1.16)

Udowodnić tożsamości operatorowe:

- a.) $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{C}] = [\hat{C}, [\hat{B}, \hat{A}]]$
- b.) $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{C}] = [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{C}, \hat{B}\hat{A}].$

Zadanie 2.6. (Przemienność operatorów)(1.17)

Niech operator \hat{A} spełnia relację: $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1$. Obliczyć komutator: $[\hat{A}^2, \hat{A}^\dagger]$.

Zadanie 2.7. (Przemienność operatorów)(1.18)

Zbadać przemienność operatorów \hat{A} oraz \hat{B} spełniających kolejno warunki:

- a.) $[\hat{A}, \hat{B}]_+ = 2\hat{A}\hat{B};$
- b.) $\hat{A} = \hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1},$

gdzie $[\hat{A}, \hat{B}]_+$ jest antykomutatorem.

Zadanie 2.8. (Przemienność operatorów)(1.19)

Niech operator \hat{A} będzie przemienny z operatorami \hat{B} oraz \hat{C} . Obliczyć komutatory:

$$\text{a.) } [\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]], \quad \text{b.) } [\hat{B}^2 + \hat{C}^2, \hat{A}].$$

Zadanie 2.9. (Przemienność operatorów)(1.20)

Jakie warunki muszą spełniać operatory \hat{A} oraz \hat{B} na to, aby były przemienne z operatorem: $\hat{C} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{B}$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.10. (Przemienność operatorów)(1.21)

Niech \hat{K} , \hat{H} będą operatorami hermitowskimi, spełniającymi relację komutacyjną: $[\hat{H}, \hat{K}] = \frac{1}{2}i$. Określamy nowy operator $\hat{A} = \hat{H} + i\hat{K}$. Obliczyć komutatory:

$$\begin{array}{lll} \text{a.) } [\hat{A}, \hat{A}^\dagger], & \text{b.) } [\hat{A}, \hat{H}], & \text{c.) } [\hat{A}, \hat{K}], \\ \text{d.) } [(\hat{A} + \hat{A}^\dagger), \hat{K}], & \text{e.) } [\hat{K}, \hat{A}\hat{A}^\dagger], & \text{f.) } [\hat{A}, \hat{A}\hat{A}^\dagger]. \end{array}$$

Zadanie 2.11. (Przemienność operatorów)(1.22)

Niech $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. W punkcie a) zakładamy istnienie \hat{B}^{-1} odwrotnego do \hat{B} . Pokazać, że

$$\text{a.) } [\hat{A}, \hat{B}^{-1}] = 0, \quad \text{b.) } [\hat{A}, \hat{B}^n] = 0.$$

Zadanie 2.12. (Pożyteczne relacje komutatorowe)(1.23)

\hat{A} oraz \hat{B} są pewnymi operatorami. Udowodnić następujące stwierdzenie:

$$\left\{ [\hat{A}, \hat{B}] = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{C} \right\} \implies \left\{ [\hat{A}^n, \hat{B}] = n\gamma\hat{A}^{n-1} \right\}.$$

Zadanie 2.13. (Pożyteczne relacje komutatorowe)(1.24)

Pokazać, że zachodzi następująca relacja komutacyjna:

$$[\hat{A}^n, \hat{B}] = \sum_{k=1}^n \hat{A}^{n-k} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A}^{k-1}.$$

Zadanie 2.14. (Pożyteczne relacje komutatorowe)(1.25)

Niech $W(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ oznacza wielomian n-tego stopnia. Wykazać następujące stwierdzenie:

$$\left\{ [\hat{A}, \hat{B}] = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{C} \right\} \implies \left\{ [W(\hat{A}), \hat{B}] = \gamma \frac{dW(\hat{A})}{d\hat{A}} \right\}.$$

Ostatnia pochodna powstaje przez zróżniczkowanie wielomianu $W(x)$ po zmiennej x , a następnie podstawienie \hat{A} zamiast x .

Zadanie 2.15. (Pożyteczne relacje komutatorowe)(1.26)

Niech funkcja $F(z)$ ma rozwinięcie w szereg $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, (szereg Taylora, gdzie a_n są liczbami zespolonymi).

Niech \hat{A} oraz \hat{B} będą dwoma operatorami, których komutator $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$ ma własność

$$[\hat{A}, \hat{C}] = 0 = [\hat{B}, \hat{C}].$$

Udowodnić, że:

$$[\hat{A}, F(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}] \frac{dF(\hat{B})}{d\hat{B}}.$$

gdzie $dF(z)/dz = F'(z)$ jest pochodną funkcji $F(z)$.
