

## Rozdział 5

# Zasada nieoznaczoności

### 5.1 Formalna zasada nieoznaczoności

#### 5.1.1 Średnie i dyspersje. Pojęcia wstępne

Niech  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  oraz  $\hat{C}$  będą operatorami hermitowskimi (obserwabłami  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ ,  $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$ ,  $\hat{C} = \hat{C}^\dagger$ ). Niech operatory te spełniają relację komutacyjną

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar\hat{C}. \quad (5.1)$$

Czynnik  $\hbar$  został po prawej stronie wprowadzony dla wygody. Natomiast jednostka urojona po prawej jest konieczna, ze względu na to, że komutator dwóch operatorów hermitowskich jest antyhermitowski (zmienia znak przy sprzężeniu), skoro zaś  $\hat{C}$  jest z założenia hermitowski, zgodność można zapewnić tylko poprzez ów dodatkowy czynnik  $i$ . Istotnie, z hermitowskości operatorów  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  oraz  $\hat{C}$  wynika

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}]^\dagger &= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} \\ &= -[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hbar\hat{C}^\dagger = (i\hbar\hat{C})^\dagger. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wprowadzone operatory są obserwabłami pewnego układu fizycznego opisanego funkcją falową  $\psi$  (którą przyjmujemy za znaną). W stanie tym wartości oczekiwane są dane przez elementy macierzowe

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \quad \langle B \rangle = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle, \quad (5.3)$$

które obliczamy zgodnie z zasadami omówionymi w rozdziale 3. W podobny sposób definiujemy dyspersję obserwabli. Dla obserwabli  $\hat{A}$  mamy (patrz (3.80))

$$\sigma^2(A) = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2. \quad (5.4)$$

bowiem wartość oczekiwana  $\langle A \rangle$  jest liczbą i komutuje z dowolnym operatorem. Dla obserwabli  $\hat{B}$  mamy oczywiście identyczne wyrażenia. Obie dyspersje, zgodnie z (3.89) są dodatnie

$$\sigma^2(A) \geq 0, \quad \sigma^2(B) \geq 0. \quad (5.5)$$

Dla wygody dalszych rozważań wygodnie jest przededefiniować obserwable  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$ :

$$\tilde{A} = \hat{A} - \langle A \rangle = \tilde{A}^\dagger, \quad \tilde{B} = \hat{B} - \langle B \rangle = \tilde{B}^\dagger, \quad (5.6)$$

które są także hermitowskie, bo wartości oczekiwane  $\langle A \rangle$  i  $\langle B \rangle$  są rzeczywiste. Obserwable  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  spełniają następujące lematy.

**Lemat 5.1** Wartości oczekiwane operatorów  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  znikają

$$\langle \tilde{A} \rangle = \langle \tilde{B} \rangle = 0. \quad (5.7)$$

**Dowód.** Relacja ta w oczywisty sposób wynika z określeń (5.6) i (5.3). ■

**Lemat 5.2** Dyspersje operatorów  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  są równe dyspersjom operatorów  $\hat{A}$  oraz  $\hat{B}$ .

$$\sigma^2(\tilde{A}) = \sigma^2(A), \quad \sigma^2(\tilde{B}) = \sigma^2(B). \quad (5.8)$$

**Dowód.** Weźmy pod uwagę  $\hat{A}$  i  $\tilde{A}$ . Wprost z (5.6) mamy

$$\sigma^2(A) = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \tilde{A}^2 \rangle. \quad (5.9)$$

Z relacji (5.7) wynika dalej

$$\sigma^2(A) = \langle (\tilde{A} - 0)^2 \rangle = \langle (\tilde{A} - \langle \tilde{A} \rangle)^2 \rangle = \sigma^2(\tilde{A}), \quad (5.10)$$

co należało wykazać. Dla operatorów  $\hat{B}$  i  $\tilde{B}$  dowód przebiega identycznie. ■

**Lemat 5.3** Operatory  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  spełniają tę samą relację komutacyjną co operatory wyjściowe  $\hat{A}$  oraz  $\hat{B}$ , to jest

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = [\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}. \quad (5.11)$$

**Dowód.** Z definicji (5.6) łatwo otrzymujemy

$$\begin{aligned} [\tilde{A}, \tilde{B}] &= (\hat{A} - \langle A \rangle)(\hat{B} - \langle B \rangle) - (\hat{B} - \langle B \rangle)(\hat{A} - \langle A \rangle) \\ &= \hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B \rangle - \langle A \rangle\hat{B} + \langle A \rangle\langle B \rangle \\ &\quad - \hat{B}\hat{A} + \hat{B}\langle A \rangle + \langle B \rangle\hat{A} - \langle A \rangle\langle B \rangle \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ponieważ  $\langle A \rangle$  oraz  $\langle B \rangle$  to liczby (rzeczywiste) więc komutują one z dowolnymi operatorami. Większość członów znosi się parami. Zostaje nam tylko

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar\hat{C}. \quad (5.13)$$

zgodnie z przyjętym założeniem (5.1), co oczywiście kończy dowód lematu. ■

Wykażemy teraz twierdzenie kluczowe dla wyprowadzenia zasady nieoznaczoności.

**Twierdzenie 5.1** Niech  $\hat{G}$  oznacza operator w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Operator  $\hat{G}$  może, ale nie musi być hermitowski. Wówczas, dla dowolnej funkcji falowej  $\psi \in \mathcal{H}$  zachodzi nierówność

$$\langle \psi | \hat{G}^\dagger \hat{G} | \psi \rangle \geq 0. \quad (5.14)$$

**Dowód.** Z określenia operatora sprzężonego i sposobu w jaki on działa (por. (3.26)), mamy

$$\langle \psi | \hat{G}^\dagger \hat{G} | \psi \rangle = \langle \hat{G}\psi | \hat{G}\psi \rangle = \| \hat{G}\psi \|^2 \geq 0, \quad (5.15)$$

co wynika z podstawowych własności normy w przestrzeni wektorowej. Na zakończenie dowodu, zwróćmy uwagę, że równość w relacji (5.16) zachodzi tylko i tylko wtedy, gdy

$$\hat{G}^\dagger \psi = 0, \quad (5.16)$$

co także wynika z własności normy. ■

### 5.1.2 Zasada nieoznaczoności

Zasadę nieoznaczoności wyprowadzimy przy tych samych założeniach wstępnych, przy których dyskutowaliśmy dyspersje, nie będziemy więc ich powtarzać. Dla operatorów (obserwabili)  $\tilde{A}$  oraz  $\tilde{B}$  budujemy operatory pomocnicze

$$\hat{G} = \tilde{A} - ia\tilde{B}, \quad \hat{G}^\dagger = \tilde{A} + ia\tilde{B}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (5.17)$$

gdzie  $a$  jest parametrem. Zauważmy, że tak zdefiniowany operator  $\hat{G}$  nie jest hermitowski. Na mocy twierdzenia (5.14) mamy natychmiast (po podstawieniu (5.17)):

$$\langle \psi | (\tilde{A} + ia\tilde{B}) (\tilde{A} - ia\tilde{B}) | \psi \rangle \geq 0. \quad (5.18)$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy

$$\hat{G}^\dagger \psi = (\tilde{A} - ia\tilde{B}) \psi = 0. \quad (5.19)$$

Analizując dalej relację (5.18) utrzymujemy uporządkowanie operatorów (bo na ogół nie komutują) i korzystamy z liniowości tego wyrażenia. W ten sposób uzyskujemy

$$\langle \psi | \tilde{A}^2 | \psi \rangle - ia \langle \psi | (\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A}) | \psi \rangle + a^2 \langle \psi | \tilde{B}^2 | \psi \rangle \geq 0. \quad (5.20)$$

Na podstawie lematu (5.8) rozpoznajemy dyspersje  $\langle \psi | \tilde{A}^2 | \psi \rangle = \sigma^2(A)$  i analogicznie dla operatora  $\tilde{B}^2$ . W drugim członie występuje komutator równy  $i\hbar\hat{C}$ , zatem

$$\sigma^2(A) + a^2 \sigma^2(B) + a\hbar \langle \hat{C} \rangle \geq 0. \quad (5.21)$$

Otrzymaliśmy więc trójmian kwadratowy parametru  $a \in \mathbb{R}$ . Trójmian jest nieujemny, więc jego wyróżnik musi być niedodatni, a to odpowiada warunkowi

$$\Delta = \hbar^2 \langle \hat{C} \rangle^2 - 4 \sigma^2(A) \sigma^2(B) \leq 0. \quad (5.22)$$

Powyższy warunek jest równoważny relacji

$$\sigma^2(A) \sigma^2(B) \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{C} \rangle^2, \quad (5.23)$$

która stanowi treść formalnej zasady nieoznaczoności. Zasada ta stanowić będzie punkt wyjścia do dalszej dyskusji.

### 5.1.3 Warunki minimalizacji zasady nieoznaczoności

Zasada nieoznaczoności (5.23) będzie zminimalizowana, tzn. zachodzić będzie równość

$$\sigma^2(\hat{A}) \sigma^2(\hat{B}) = \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{C} \rangle^2, \quad (5.24)$$

jeżeli wyróżnik  $\Delta$  w równaniu (5.22) jest zerem. Wówczas trójmian (5.21) ma jeden (podwójny) pierwiastek wynoszący

$$a = -\frac{\hbar \langle \hat{C} \rangle}{2\sigma^2(\hat{B})} \quad (5.25)$$

Ponadto, będzie mieć miejsce relacja (5.19). Wnioskujemy więc, że funkcja falowa  $\psi$  minimalizuje zasadę nieoznaczoności (zachodzi (5.24)), jeżeli spełnione jest równanie

$$(\tilde{A} - ia\tilde{B}) \psi = 0, \quad (5.26)$$

gdzie parametr  $a$  dany jest wzorem (5.25). Zwróćmy uwagę, że skoro zachodzi (5.24), to możemy równie dobrze wyrazić w (5.25)  $\sigma^2(\hat{B})$  za pomocą  $\sigma^2(\hat{A})$  i wobec tego możemy napisać

$$a = -\frac{\hbar\langle\hat{C}\rangle}{2\sigma^2(\hat{B})} = -\frac{\hbar\langle\hat{C}\rangle}{2} \frac{4\sigma^2(\hat{A})}{\hbar^2\langle\hat{C}\rangle^2} = -\frac{2\sigma^2(\hat{A})}{\hbar\langle\hat{C}\rangle} \quad (5.27)$$

Dla wygody dalszych zastosowań rozpiszmy starannie równanie (5.26), definiujące funkcję falową  $\psi$ , dla której następuje minimalizacja zasady nieoznaczoności. Używając określeń  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  w (5.26) mamy więc

$$(\hat{A} - \langle A \rangle) \psi = i a (\hat{B} - \langle B \rangle) \psi \quad (5.28)$$

Wykorzystując dalej (5.27) uzyskujemy

$$\begin{aligned} (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi &= -\frac{i\hbar\langle\hat{C}\rangle}{2\sigma^2(\hat{B})} (\hat{B} - \langle B \rangle) \psi \\ &= -\frac{2i\sigma^2(\hat{A})}{\hbar\langle\hat{C}\rangle} (\hat{B} - \langle B \rangle) \psi \end{aligned} \quad (5.29)$$

Równania (5.28) i (5.29) są ściśle równoważne, pozwalają wyznaczyć stan  $|\psi\rangle$ , który minimalizuje zasadę nieoznaczoności. Dla układu fizycznego w stanie spełniającym któreś z tych równań zachodzi relacja (5.24), a więc zasada nieoznaczoności jest zminimalizowana. Przykłady obliczeń ilustrujących minimalizację zasady nieoznaczoności można znaleźć w *Uzupełnieniach*.

## 5.2 Dyskusja i pewne zastosowania

### 5.2.1 Ogólne sformułowanie

Uzyskana ogólna postać zasady nieoznaczoności może być sformułowana tak:

Dwie obserwabla niekomutujące  $\hat{A}$  oraz  $\hat{B}$  nie mogą być jednocześnie określone (zmierzone) z dowolną dokładnością. Dyspersje pomiaru spełniają nierówność

$$\sigma^2(\hat{A}) \sigma^2(\hat{B}) \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle\hat{C}\rangle^2, \quad (5.30)$$

gdzie  $\hat{C} = \hat{C}^\dagger$  wynika z relacji komutacyjnej

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar\hat{C}. \quad (5.31)$$

**Wniosek :** Pomiar wielkości fizycznych (jednoczesny), których operatory komutują, jest możliwy z dowolną dokładnością, bowiem wtedy  $\hat{C} = 0$ .

Zasada nieoznaczoności (5.30) ma następujący sens. Przygotowujemy  $N \gg 1$  identycznych egzemplarzy badanego układu fizycznego. Każdy z nich jest w stanie opisanym tą samą funkcją falową  $\psi$ . W  $N/2$  układów dokonujemy pomiarów wielkości fizycznej  $\mathcal{A}$  (której odpowiada obserwabla  $\hat{A}$ ). Otrzymujemy pewien rozkład rezultatów pomiarowych wokół wartości średniej  $\langle A \rangle$ . Rozkład ten ma szerokość scharakteryzowaną przez dyspersję  $\sqrt{\sigma^2(\hat{A})}$ . W pozostałych układach dokonujemy pomiaru wielkości  $\mathcal{B}$  (obserwabla  $\hat{B}$ ). Otrzymujemy rozkład wokół  $\langle B \rangle$  o szerokości  $\sqrt{\sigma^2(\hat{B})}$ . Niezależnie od dokładności aparatury pomiarowej (może być idealna) szerokości obu rozkładów spełniać muszą nierówność (5.30). Zasada nieoznaczoności jest prawem przyrody. Dyspersje wielkości fizycznych w niej występujące nie mają nic wspólnego z błędami pomiarowymi (aparaturowymi). Nieokreśloności wynikłe z zasady nieoznaczoności mają charakter zasadniczy.

Idealny (bezbłędny) pomiar nie może przekroczyć ograniczeń wynikających z zasady nieoznaczoności.

Znaczenie zasady nieoznaczoności jest nie do przecenienia, a jej zastosowania są praktycznie nieograniczone. W tym rozdziale, z konieczności ograniczamy się do omówienia tylko kilku wybranych zastosowań. Inne można znaleźć w dalszych rozdziałach.

- W *Uzupełnieniach* omawiamy pakiet falowy, który minimalizuje zasadę nieoznaczoności.
- Przedstawiamy tam także dyskusję doświadczenia interferencyjnego na dwóch szczelinach. Zasada nieoznaczoności pozwala wnioskować, że stwierdzenie przez którą szczelinę przeszła cząstka prowadzi do zniszczenia (rozmycia) obrazu interferencyjnego.
- W rozdziale 15 pokazujemy, że stabilność atomu (ograniczenie energii z dołu) wynika wprost z zasady nieoznaczoności.
- W rozdziale 27 *Uzupełnień* stosujemy zasadę nieoznaczoności do oszacowania stanu energii stanu podstawowego kwantowo-mechanicznego oscylatora harmonicznego.

### 5.2.2 Relacja nieoznaczoności położenie–pęd

Najczęstszym przykładem zastosowania zasady nieoznaczoności jest niewspółmierzalność współrzędnej i odpowiedniej składowej pędu. Weźmy pod uwagę składową  $x$ -ową położenia i pędu oraz spełnianą przez nie regułę komutacyjną (por. (3.97), (3.94) i (3.104c))

$$\hat{x}_j = x, \quad \hat{p}_j = \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar. \quad (5.32)$$

Z relacji komutacyjnej oczywiście wynika  $\hat{C} = \hat{1}$ . Ścisłe zastosowanie zasady nieoznaczoności (5.30) pozwala więc napisać

$$\sigma^2(x) \sigma^2(p_x) \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (5.33)$$

co odnosi się do minimalnych (uzyskanych za pomocą idealnej aparatury) dyspersji pomiarowych, np. dla położenia  $\sigma^2(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ . Najczęściej, choć zupełnie nieściśle, pisze się

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5.34)$$

mówiąc, że nieokreśloność położenia  $\Delta x$  i nieokreśloność (rozmycie) pędu  $\Delta p_x$  spełniają (5.34). Pamiętać jednak należy, że ścisły sens zasady nieoznaczoności przypisujemy relacji (5.33), natomiast wzór (5.34) jest jedynie intuicyjnym przybliżeniem.

Zwróćmy uwagę, że z zasady nieoznaczoności wynika, że nie istnieją takie stany (funkcje falowe) kwantowo-mechaniczne, w których jednocześnie znikają dyspersje położenia i pędu. Możliwe jest, że  $\sigma^2(x) \rightarrow 0$ , wówczas jednak musi być  $\sigma^2(p_x) \rightarrow \infty$ . Zyskując pełną informację o składowej  $x$  położenia cząstki, tracimy jednocześnie jakąkolwiek możliwość określenia  $x$ -owej składowej pędu. Rzecz jasna, może też być odwrotnie.

Warto w tym miejscu zdać sobie sprawę z rzędów wielkości. W tym celu zastosujemy zasadę nieoznaczoności (5.34) do pyłku kurzu o średnicy  $d = 1 \mu m = 1 \cdot 10^{-6} m$  i masie  $m \approx 10^{-15} kg$ . Przyjmijmy, że pyłek porusza się z prędkością  $v = 1 mm/s = 1 \cdot 10^{-3} m/s$ . Pęd takiego pyłku wynosi więc  $p = mv \approx 10^{-18} Js/m$ . Jeżeli teraz położenie takiego pyłku określamy (mierzymy) z dokładnością do  $0.01d = 10^{-8} m$ , to kwantowo-mechaniczna niepewność określenia pędu jest rzędu

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \approx \frac{6 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-8}} \approx 3 \cdot 10^{-26} \frac{Js}{m}. \quad (5.35)$$

Widzimy więc, że relacja nieoznaczoności wprowadza względną nieokreśloność pędu o wartości rzędu  $\Delta p/p \approx 10^{-8}$ , co jest grubo poniżej możliwości pomiarowych.

Wnioskujemy zatem, że w odniesieniu do ciał makroskopowych o masach rzędu od  $10^{-6} \text{ kg}$  wzwyż, niepewność pędu (przy  $\Delta x \approx 10^{-8} \text{ m}$ ) prowadzi na ogół do jeszcze mniejszych względnych błędów. A więc w zagadnieniach fizyki makroskopowej relacja nieoznaczoności nie ma żadnego praktycznego znaczenia. Natomiast w mikroświecie (a więc w zagadnieniach mechaniki kwantowej) zasada nieoznaczoności ma znaczenie bardzo istotne.

### 5.2.3 Zastosowanie do atomu w modelu Bohra

Model atomu Bohra jest znany ze szkoły średniej, więc nie będziemy go tu omawiać, lecz po prostu zeń skorzystamy. W modelu tym, elektron krążący wokół protonu (atom wodoru) traktowany jest jako cząstka klasyczna poruszająca się po orbicie kołowej. Podany przez Bohra warunek kwantowania określa moment pędu elektronu, a więc wiąże pęd elektronu i promień jego orbity

$$L = rp = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.36)$$

Żeby móc sensownie mówić o elektronie jako cząstce posiadającej dobrze określoną trajektorię (a więc w terminach fizyki klasycznej) względne niepewności położenia (mierzonego wzdłuż orbity) i pędu powinny być małe, tzn.

$$\Delta x \ll r, \quad \Delta p \ll p. \quad (5.37)$$

Oczywiście, obie powyższe nierówności oznaczają, że

$$\frac{\Delta x \Delta p}{rp} \ll 1. \quad (5.38)$$

Z drugiej strony, relacja nieoznaczoności narzuca ograniczenie na iloczyn niepewności położenia i pędu. Ponieważ interesują nas tu oszacowania rzędów wielkości, więc zastosujemy zasadę nieoznaczoności w jej intuicyjnej postaci (5.34):  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$  (pominiemy czynnik  $\frac{1}{2}$ , bo on i tak nie zmienia oszacowań). Wobec tego, powyższą nierówność możemy zapisać jako

$$1 \gg \frac{\Delta x \Delta p}{rp} \geq \frac{\hbar}{rp}. \quad (5.39)$$

Wyrażając iloczyn  $rp$  za pomocą warunku kwantowania (5.36) otrzymujemy

$$1 \gg \frac{\Delta x \Delta p}{rp} \geq \frac{1}{n}, \quad \Rightarrow \quad 1 \gg \frac{1}{n}, \quad \Rightarrow \quad n \gg 1. \quad (5.40)$$

Widzimy więc, że uzyskany warunek może być spełniony co najwyżej dla dużych wartości liczby kwantowej  $n$ . Model atomu Bohra dla  $n$  małych prowadzi do sprzeczności z zasadą nieoznaczoności. Wystarcza to do jego odrzucenia. Zasada nieoznaczoności sprawia, że model oparty na pojęciu (klasycznym) trajektorii musi zostać odrzucony. Warto jednak zauważyć, że dla dużych  $n$  (tzw. atomy Rydbergowskie) analogie klasyczne mogą być pożyteczne. Innymi słowy możemy stwierdzić, że elektrony wzbudzone do stanów kwantowych o dużej wartości liczby kwantowej  $n$  zachowują się podobnie do cząstek klasycznych. Analogia ta ma jednak jakościowy charakter i w związku z tym, przy praktycznych obliczeniach, lepiej posługiwać się mechaniką kwantową.

### 5.3 Zasada nieoznaczoności energia – czas

Przypomnijmy, że dla dwóch obserwabli  $\hat{A}$  oraz  $\hat{B}$  spełniających relację komutacyjną (5.1) obowiązuje, relacja (5.23), to jest zasada nieoznaczoności

$$\sigma^2(A) \sigma^2(B) \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \langle \hat{C} \rangle \right|^2. \quad (5.41)$$

Operator Hamiltona jest operatorem energii. Weźmy więc  $\hat{B} = \hat{H}$ . Dyspersja hamiltonianu odpowiada dyspersji energii, więc zamiast (5.41), możemy teraz napisać

$$\sigma^2(A) \sigma^2(E) \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \left\langle \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] \right\rangle \right|^2, \quad (5.42)$$

gdzie jawnie wpisaliśmy komutator. Załóżmy dalej, że obserwabla  $\hat{A}$  nie zależy jawnie od czasu, a więc  $\partial \hat{A} / \partial t = 0$ . Wobec tego, na mocy formuły (4.40), wartość oczekiwaną komutatora występującego we wzorze (5.42) możemy zastąpić przez pochodną czasową wartości oczekiwanej obserwabli  $\hat{A}$ . W ten sposób otrzymujemy

$$\sigma^2(A) \sigma^2(E) \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \frac{d\langle A \rangle}{dt} \right|^2, \quad (5.43)$$

co oczywiście prowadzi do wniosku, że

$$\frac{\sigma^2(A)}{\left| \frac{d\langle A \rangle}{dt} \right|^2} \sigma^2(E) \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (5.44)$$

Konieczne jest teraz omówienie sensu ułamka stojącego po lewej stronie powyższego wyrażenia. Dyspersja  $\sigma^2(A) = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$  opisuje odchylenie (średniokwadratowe) wartości obserwabli  $\hat{A}$  od wartości oczekiwanej  $\langle A \rangle$  (średniej). Natomiast pochodna  $d\langle A \rangle / dt$  mówi, nam jakie jest tempo zmian (w czasie) wartości oczekiwanej. Jeżeli przez  $\Delta A$  oznaczmy charakterystyczne dla obserwabli  $\hat{A}$  odchylenie, zachodzące w ciągu czasu  $\tau_A$ , wówczas możemy oszacować

$$\sigma^2(A) \approx (\Delta A)^2, \quad \text{oraz} \quad \frac{d\langle A \rangle}{dt} \approx \frac{\Delta A}{\tau_A}. \quad (5.45)$$

Oszacowania te pozwalają zapisać ułamek z (5.44) w postaci

$$\frac{\sigma^2(A)}{\left| \frac{d\langle A \rangle}{dt} \right|^2} \approx \frac{(\Delta A)^2}{\left( \frac{\Delta A}{\tau_A} \right)^2} = \tau_A^2. \quad (5.46)$$

Czas  $\tau_A$  możemy interpretować jako charakterystyczny czas trwania typowych fluktuacji (zmian w czasie) obserwabli  $\hat{A}$ . Innymi słowy, czas  $\tau_A$  jest to czas potrzebny na to, aby zmiany wartości  $\langle A \rangle$  wynikłe z ewolucji czasowej były porównywalne z typowym odchyleniem określonym przez  $\sqrt{\sigma^2(A)}$ . Wykorzystując (5.46) w relacji (5.44), piszemy

$$\tau_A \cdot \sigma(E) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5.47)$$

co nazwiemy relacją nieoznaczoności energia–czas. Podejście takie jest nieodzowne, bowiem nie istnieje wielkość, którą moglibyśmy nazwać operatorem czasu. Zazwyczaj, relację tę zapisuje się nieco prościej, a mianowicie

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar. \quad (5.48)$$

Wynik ten możemy interpretować tak: jeśli w układzie fizycznym zachodzą pewne zmiany mające charakterystyczny czas trwania  $\Delta t$ , to towarzyszące tym efektom zmiany energii są określone z dokładnością  $\Delta E$  tak, aby spełnione były powyższe relacje. Na przykład, z doświadczenia wiadomo, że elektron w atomie przebywa w stanie wzbudzonym przez pewien skończony czas  $\Delta t$  (tzw. czas życia stanu wzbudzonego), a następnie przechodzi do stanu podstawowego emitując jednocześnie foton – kwant pola elektromagnetycznego. Z relacji nieoznaczoności (5.48) wynika, że energia fotonu jest określona z dokładnością do  $\Delta E = \hbar/\Delta t$ . Możemy więc powiedzieć, że stan wzbudzony elektronu w atomie ma pewne rozmycie  $\Delta E$  energii.

Jeżeli konserwatywny układ fizyczny znajduje się w stanie własnym hamiltonianu, to jak wiemy, jego energia jest stała w czasie, co odpowiada nieokreśloności (rozmyciu) energii  $\Delta E = 0$ . Zasada nieoznaczoności (5.48) wymaga wówczas aby  $\Delta t \rightarrow \infty$ , co oznacza, że układ taki przebywa w danym stanie dowolnie długo. Jest to dodatkowe uzasadnienie nazwy "stan stacjonarny". Oczywiście obecność oddziaływań zewnętrznych może spowodować, że stan układu będzie ulegać zmianom. Wpływ oddziaływań (zaburzeń) zewnętrznych dyskutować będziemy w dalszych rozdziałach.

\* \* \* \* \*