

## Dodatek C

# Harmoniki sferyczne

### C.1 Wprowadzenie

Harmoniki sferyczne są funkcjami specjalnymi pojawiającymi się w wielu zagadnieniach fizyki. W podręcznikach fizyki matematycznej są one zazwyczaj wyprowadzane i omawiane w kontekście cząstkowych równań różniczkowych (np. w elektrodynamice, przy rozwiązywaniu równania Poissona dla skończonego rozkładu ładunków).

Przedstawiona w tym rozdziale dyskusja kładzie zasadniczy nacisk na fakt, że harmoniki sferyczne są (w reprezentacji położeniowej) funkcjami własnymi operatora orbitalnego momentu pędu. W związku z tym, posługujemy się tu dość specyficznymi metodami rachunkowymi. W rozdziale 13) pokazaliśmy, że harmoniki sferyczne są postaci

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \langle \theta \varphi | l m \rangle = e^{im\varphi} F_{lm}(\theta). \quad (\text{C.1})$$

Co więcej, znaleźliśmy jawne wyrażenie dla przypadku maksymalnego  $m = m_{\max} = l$  otrzymując

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} e^{il\varphi} (\sin \theta)^l, \quad (\text{C.2})$$

i wskazaliśmy, że harmoniki z mniejszymi wartościami liczby  $m$  uzyskać możemy stosując wielokrotnie operator obniżający  $L_-$ . Oczywiście z (C.2) natychmiast wynikają proste przypadki szczególne

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad (\text{C.3a})$$

$$Y_{11}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta, \quad (\text{C.3b})$$

$$Y_{22}(\theta, \varphi) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{120}{4\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2 \theta = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2 \theta. \quad (\text{C.3c})$$

Obliczenia  $y_{ll}$  danego w (C.2) musimy tutaj uzupełnić. Chodzi o obliczenie całki normalizacyjnej (13.60) i o dyskusję wyboru fazy. Ten drugi aspekt odłożymy na później (najpierw wyprowadzimy ogólną postać harmonik dla dowolnego  $m$ ).

#### C.1.1 Całka normalizacyjna $I_p(n)$

Konstruując harmoniki sferyczne, do normalizacji funkcji  $Y_{ll}(\theta, \varphi)$  potrzebowaliśmy całki  $I_1(l)$  zdefiniowanej jako

$$I_1(l) = \int_0^1 dx (1-x^2)^l. \quad (\text{C.4})$$

Obliczymy całkę nieco ogólniejszą, a mianowicie wykażemy, że zachodzi relacja

$$I_p(n) = \int_0^p dx (p^2 - x^2)^n = p^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = p^{2n+1} \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}, \quad (C.5)$$

gdzie liczba  $p \leq 1$ , zaś  $n$  – naturalna. Będziemy szukać relacji rekurencyjnej spełnianej przez te całki ze względu na indeks  $n$ . W oczywisty sposób mamy

$$\begin{aligned} I_p(n) &= \int_0^p dx (p^2 - x^2) (p^2 - x^2)^{n-1} \\ &= p^2 I_p(n-1) - \int_0^p dx x^2 (p^2 - x^2)^{n-1}. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Całkę występującą w powyższej relacji obliczamy przez części. Bierzemy  $g(x) = x$  oraz  $f'(x) = x(p^2 - x^2)^{n-1}$  [zatem  $f(x) = -(p^2 - x^2)^n / 2n$ ]. Otrzymujemy więc

$$\int_0^p dx x^2 (p^2 - x^2)^{n-1} = -\frac{x}{2n} (p^2 - x^2)^n \Big|_0^p + \int_0^p dx \frac{1}{2n} (p^2 - x^2)^n. \quad (C.7)$$

Ponieważ człon brzegowy znika, więc uzyskaną całkę możemy podstawić do wzoru (C.6)

$$I_p(n) = p^2 I_p(n-1) - \frac{1}{2n} I_p(n), \quad (C.8)$$

a więc otrzymujemy poszukiwaną relację rekurencyjną

$$I_p(n) = \frac{2n}{2n+1} p^2 I_p(n-1). \quad (C.9)$$

Prosta indukcja prowadzi do wniosku, że

$$I_p(n) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} p^{2n} I_p(0). \quad (C.10)$$

Całka  $I_p(0)$  jest trywialnie prosta do obliczenia

$$I_p(0) = \int_0^p dx = p. \quad (C.11)$$

Łącząc dwa ostatnie rezultaty, otrzymujemy

$$I_p(n) = \int_0^p dx (p^2 - x^2)^n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} p^{2n+1}. \quad (C.12)$$

Proste przekształcenia współczynnika kombinatorycznego pozwalają napisać

$$I_p(n) = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!} p^{2n+1} = \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} p^{2n+1}. \quad (C.13)$$

A zatem teza (C.5) podana na wstępie jest udowodniona.

Na zakończenie zauważmy, że łatwo zastosować uzyskany wynik (C.12) do przypadku, w którym wykładnik  $n$  przechodzi w liczbę połówkową  $n \rightarrow (2k-1)/2$ . Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} I_p\left(\frac{2k-1}{2}\right) &= \int_0^p dx (p^2 - x^2)^{(2k-1)/2} \\ &= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} p^{2k} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} p^{2k}. \end{aligned} \quad (C.14)$$

Oczywiście całkę normalizacyjną harmoniki sferycznej  $Y_{ll}$  otrzymujemy z powyższych formuł kładąc po prostu  $p = 1$ .

## C.2 Wyprowadzenie postaci $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ dla $m < l$

### C.2.1 Zastosowanie operatora obniżającego

Mając  $Y_{ll}(\theta, \varphi)$  możemy, stosując operator obniżający  $L_-$ , obniżyć liczbę  $m$ . Operator  $L_-$  działając na stan  $|lm\rangle$  daje

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right) |lm\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} |l, m-1\rangle \\ &= \sqrt{(l-m+1)(l+m)} |l, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Wobec tego  $k$ -krotne zastosowanie operatora  $(L_-/\hbar)$  do stanu  $|ll\rangle$  produkuje

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^k |ll\rangle \sim |l, l-k\rangle. \quad (\text{C.16})$$

Kładąc  $l-k = m$  otrzymamy

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} |ll\rangle \sim |l, m\rangle, \quad (\text{C.17})$$

gdzie trzeba wyznaczyć stałą proporcjonalności.

**Lemat C.1**  $k = (l-m)$ -krotne działanie operatora  $(L_-/\hbar)$  na stan  $|ll\rangle$  daje

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} |ll\rangle = \sqrt{\frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!}} |lm\rangle, \quad (\text{C.18})$$

gdzie  $m < l$ , lecz  $m \geq -l$ .

**Dowód.** Stosujemy indukcję względem  $m$  malejącego od  $m_{\max} = l$  do  $m_{\min} = -l$ . Relacja (C.18) dla  $m = l$  dale po prostu

$$|ll\rangle = \sqrt{\frac{(2l)!}{(l+l)!}} |ll\rangle, \quad (\text{C.19})$$

czyli tożsamość. Zakładamy, że (C.18) jest spełnione dla pewnego  $m$ . Badamy jej słuszność dla  $m$  o jeden mniejszego, tj. dla  $m-1$ . A więc

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-(m-1)} |ll\rangle = \left(\frac{L_-}{\hbar}\right) \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} |ll\rangle. \quad (\text{C.20})$$

Z założenia indukcyjnego

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-(m-1)} |ll\rangle = \sqrt{\frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right) |lm\rangle. \quad (\text{C.21})$$

Na mocy (C.15) mamy dalej

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-(m-1)} |ll\rangle &= \sqrt{\frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{(l-m+1)(l+m)} |l, m-1\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(2l)!(l-m+1)!}{(l+m-1)!}} |l, m-1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

co stanowi tezę dla  $m-1$ . Na mocy zasady indukcji lemat jest udowodniony. ■

Z wykazanego wzoru (C.18) wynika więc, że

$$\begin{aligned}
 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \langle \theta \varphi | l m \rangle = \langle \theta \varphi | \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{l-m} | l, l \rangle \\
 &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi) \\
 &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left[ e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi), \quad (C.23)
 \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy postać (13.34c) operatora obniżającego w reprezentacji położeniowej. Podstawiamy teraz  $Y_{ll}(\theta, \varphi)$  według (C.2) otrzymując

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \left[ e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]^{l-m} e^{il\varphi} (\sin \theta)^l. \quad (C.24)$$

Musimy teraz zbadać działanie  $(l-m)$ -tej potęgi operatora różniczkowego  $L_-/\hbar$  na funkcje stojące po jego prawej stronie.

### C.2.2 Operator $(L_-/\hbar)^k$ w reprezentacji położeniowej

Najpierw wyrażenie, w którym operator  $L_-/\hbar$  działa jednokrotnie. Zatem

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{L_-}{\hbar} \right) e^{il\varphi} (\sin \theta)^l &= e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{il\varphi} (\sin \theta)^l \\
 &= e^{i(l-1)\varphi} \left( -\frac{d}{d\theta} (\sin \theta)^l - l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\sin \theta)^l \right) \quad (C.25)
 \end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz użyteczne oznaczenie, które będziemy stosować w dalszych rozważaniach, wtedy gdy będzie to wygodne. Zamienimy zmienną, pisząc

$$\xi = \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta} = \frac{d\xi}{d\theta} \frac{d}{d\xi} = -\sin \theta \frac{d}{d\xi}. \quad (C.26)$$

Po takiej zamianie z (C.25) dostajemy

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{L_-}{\hbar} \right) e^{il\varphi} (\sin \theta)^l &= e^{i(l-1)\varphi} \left( \sin \theta \frac{d}{d\xi} (\sin \theta)^l - l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\sin \theta)^l \right) \\
 &= \frac{e^{i(l-1)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \left[ (\sin \theta)^l \frac{d}{d\xi} (\sin \theta)^l - l \cos \theta (\sin \theta)^{l-2} (\sin \theta)^l \right]. \quad (C.27)
 \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$\frac{d}{d\xi} (\sin \theta)^l = \frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2)^{l/2} = \frac{l}{2} (1 - \xi^2)^{l/2-1} (-2\xi) = -l \cos \theta (\sin \theta)^{l-2}. \quad (C.28)$$

Wykorzystując (C.28) w (C.27) dostajemy

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{L_-}{\hbar} \right) e^{il\varphi} (\sin \theta)^l &= \frac{e^{i(l-1)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \left[ (\sin \theta)^l \frac{d}{d\xi} (\sin \theta)^l + \left( \frac{d}{d\xi} (\sin \theta)^l \right) (\sin \theta)^l \right] \\
 &= \frac{e^{i(l-1)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \frac{d}{d\xi} (\sin \theta)^{2l}, \quad (C.29)
 \end{aligned}$$

co wynika z elementarnych zasad różniczkowania. Uogólniamy rezultat (C.29) pisząc

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^k e^{il\varphi} (\sin \theta)^l &= \frac{e^{i(l-k)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \\ &= \frac{e^{i(l-k)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d(\cos \theta)^k} (\sin \theta)^{2l}. \end{aligned} \quad (C.30)$$

Formuła ta została już sprawdzona dla  $k = 1$ . Udowodnimy ją przez indukcję. Zakładamy słuszność (C.30) dla pewnego  $k$  i badamy tezę dla  $k + 1$ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{k+1} e^{il\varphi} (\sin \theta)^l &= \left(\frac{L_-}{\hbar}\right) \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^k e^{il\varphi} (\sin \theta)^l \\ &= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \frac{e^{i(l-k)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l}, \end{aligned} \quad (C.31)$$

gdzie skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego. Dalej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{k+1} e^{il\varphi} (\sin \theta)^l &= e^{-i\varphi} \left\{ -e^{i(l-k)\varphi} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{(\sin \theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \right] \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{ctg} \theta \frac{i(l-k) e^{i(l-k)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \right\} \\ &= e^{i(l-k-1)\varphi} \left\{ \sin \theta \frac{d}{d\xi} \left[ (1-\xi^2)^{-(l-k)/2} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \right] \right. \\ &\quad \left. - (l-k) \frac{\cos \theta}{(\sin \theta)^{l-k+1}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \right\} \\ &= e^{i(l-k-1)\varphi} \left\{ \sin \theta \frac{d}{d\xi} (1-\xi^2)^{-(l-k)/2} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta (1-\xi^2)^{-(l-k)/2} \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} (\sin \theta)^{2l} \right. \\ &\quad \left. - (l-k) \frac{\cos \theta}{(\sin \theta)^{l-k+1}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \right\}. \end{aligned} \quad (C.32)$$

Obliczamy pochodną w pierwszym składniku

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} (1-\xi^2)^{-(l-k)/2} &= -\frac{l-k}{2} (1-\xi^2)^{-(l-k)/2-1} (-2\xi) = \xi(l-k) (1-\xi^2)^{-(l-k+2)/2} \\ &= (l-k) \cos \theta (\sin \theta)^{-(l-k+2)} = \frac{(l-k) \cos \theta}{(\sin \theta)^{l-k+2}}. \end{aligned} \quad (C.33)$$

Wstawiając tą pochodną do (C.32) widzimy, że pierwszy i trzeci składnik wzajemnie się znoszą. Mamy więc

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{k+1} e^{il\varphi} (\sin \theta)^l &= e^{i[l-(k+1)]\varphi} \frac{\sin \theta}{(\sin \theta)^{(l-k)}} \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} (\sin \theta)^{2l} \\ &= e^{i[l-(k+1)]\varphi} \frac{1}{(\sin \theta)^{l-(k+1)}} \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} (\sin \theta)^{2l}. \end{aligned} \quad (C.34)$$

Wyrażenie to pokrywa się z tezą (C.30) wziętą dla  $k + 1$ . Na mocy zasady indukcji, równość (C.30) jest udowodniona.

### C.2.3 Harmoniki $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

Wypiszmy udowodnioną relację (C.30) dla  $k = l - m$ :

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} e^{il\varphi} (\sin \theta)^l = \frac{e^{im\varphi}}{(\sin \theta)^m} \frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}} (\sin \theta)^{2l}, \quad (\text{C.35})$$

i zastosujemy w wyrażeniu (C.24) dla harmonik sferycznych

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{e^{im\varphi}}{(\sin \theta)^m} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l}, \quad (\text{C.36})$$

co stanowi końcowy wynik, określający postać harmonik sferycznych dla dowolnego  $l \geq 0$  oraz dla liczby  $m$  w odpowiednim zakresie, tj.  $(-l \leq m \leq l)$ . Bez trudu sprawdzamy, że wzór ten, dla  $l = m$ , od razu sprowadza się do wcześniej obliczonej harmoniki  $Y_{ll}$  danej w (C.2).

## C.3 Jawne obliczenia pewnych harmonik sferycznych

### A. Harmoniki $Y_{l,-l}(\theta, \varphi)$

Wyliczmy z (C.36) harmonikę z  $m = -l$ , a więc

$$Y_{l,-l}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{0!}{(2l)!}} \frac{e^{-il\varphi}}{(\sin \theta)^{-l}} \frac{d^{2l}}{d\xi^{2l}} (1 - \xi^2)^l, \quad (\text{C.37})$$

gdzie (jak zwykle w tym rozdziale)  $\xi = \cos \theta$ . Wyrażenie  $(1 - \xi^2)^l$  jest wielomianem zmiennej  $\xi$ , w którym w najwyższej potędze mamy  $(-\xi^2)^l = (-1)^l \xi^{2l}$ , co wynika z rozwinięcia dwumianu Newtona. Wkład do pochodnej rzędu  $2l$  da jedynie owa najwyższa potęga  $\xi$ . Dlatego też

$$\frac{d^{2l}}{d\xi^{2l}} (1 - \xi^2)^l = \frac{d^{2l}}{d\xi^{2l}} (-1)^l \xi^{2l} = (-1)^l (2l)!. \quad (\text{C.38})$$

Wykorzystując pochodną w (C.37) otrzymujemy

$$\begin{aligned} Y_{l,-l}(\theta, \varphi) &= \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{1}{(2l)!}} e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l (-1)^l (2l)! \\ &= \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

### B. Inna postać $Y_{ll}(\theta, \varphi)$

Weźmy pod uwagę  $Y_{ll}(\theta, \varphi)$ . Zgodnie z (C.2) mamy

$$\begin{aligned} Y_{ll}(\theta, \varphi) &= \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} e^{il\varphi} (\sin \theta)^l \\ &= \frac{(-1)}{2l} \sqrt{(2l+1) \cdot 2l} e^{i\varphi} \sin \theta \\ &\quad \times \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1} (l-1)!} \sqrt{\frac{[2(l-1)+1]!}{4\pi}} e^{i(l-1)\varphi} (\sin \theta)^{l-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

W ostatniej linii od razu rozpoznajemy harmonikę  $Y_{l-1,l-1}(\theta, \varphi)$  i tym samym piszemy

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = - \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} e^{i\varphi} \sin \theta Y_{l-1,l-1}(\theta, \varphi). \quad (\text{C.41})$$

Podobne formuły rekurencyjne, pozwalające wyrazić harmoniki o większych indeksach przez te o indeksach niższych bywają pożyteczne w praktycznych obliczeniach.

**C. Harmoniki  $Y_{l,l-1}(\theta, \varphi)$** 

Po raz kolejny bierzemy ogólną formułę (C.36), w której kładziemy  $m = l - 1$  i dostajemy

$$Y_{l,l-1}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (2l-1)! \frac{e^{i(l-1)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2)^l. \quad (\text{C.42})$$

Obliczenie pochodnej jest proste

$$\frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2)^l = -2l \xi (1 - \xi^2)^{l-1} = -2l \cos \theta (\sin \theta)^{2(l-1)} \quad (\text{C.43})$$

i po podstawieniu do (C.42) otrzymujemy

$$Y_{l,l-1}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1} (l-1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (2l-1)! e^{i(l-1)\varphi} \cos \theta (\sin \theta)^{l-1}. \quad (\text{C.44})$$

Ze wzoru tego wynikają szczególne przypadki dla  $l = 1$  i  $l = 2$ , a mianowicie

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad (\text{C.45})$$

$$Y_{21}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot 6 e^{i\varphi} \cos \theta \sin \theta = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \cos \theta \sin \theta. \quad (\text{C.46})$$

Wzór (C.44) bywa też przydatny w nieco innej postaci. Przekształcając go, dostajemy

$$\begin{aligned} Y_{l,l-1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{2l+1} \cos \theta \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1} (l-1)!} \sqrt{\frac{(2l-1)!}{4\pi}} e^{i(l-1)\varphi} \cos \theta (\sin \theta)^{l-1} \\ &= \sqrt{2l+1} \cos \theta Y_{l-1,l-1}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

gdzie rozpoznaliśmy harmonikę  $Y_{l-1,l-1}$ . Wzór ten zapiszemy w postaci

$$\cos \theta Y_{l-1,l-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} Y_{l,l-1}(\theta, \varphi). \quad (\text{C.48})$$

Jest to kolejny, pożyteczny związek łączący harmoniki o różnych wartościach indeksów.

**D. Harmoniki  $Y_{l,l-2}(\theta, \varphi)$** 

Ponownie bierzemy formułę (C.36), tym razem kładziemy  $m = l - 2$  i dostajemy

$$Y_{l,l-2}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(2l-2)!}{2!} \frac{e^{i(l-2)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-2}} \frac{d^2}{d\xi^2} (1 - \xi^2)^l. \quad (\text{C.49})$$

Znów musimy obliczyć pochodną

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} (1 - \xi^2)^l &= \frac{d}{d\xi} [-2l \xi (1 - \xi^2)^{l-1}] \\ &= -2l [(1 - \xi^2)^{l-1} + \xi (l-1)(1 - \xi^2)^{l-2}(-2\xi)] \\ &= -2l (1 - \xi^2)^{l-2} [1 - \xi^2 - 2\xi^2 (l-1)] \\ &= -2l (1 - \xi^2)^{l-2} [1 - (2l-1)\xi^2] \\ &= -2l [1 - (2l-1) \cos^2 \theta] (\sin \theta)^{2(l-2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Podstawiając obliczoną pochodną do (C.49) dostajemy

$$Y_{l,l-2}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}(l-1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}} (2l-2)! e^{i(l-2)\varphi} (\sin \theta)^{l-2} [1 - (2l-1) \cos^2 \theta] \quad (C.51)$$

Stąd, w szczególności wynika

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)}{2} \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{8\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta) = - \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta). \quad (C.52)$$

W tym przypadku warto także zająć się formułą (C.51). Przepisujemy ją w postaci

$$\begin{aligned} Y_{l,l-2}(\theta, \varphi) &= \frac{(-1)}{2(l-1)} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} (2l-2) [1 - (2l-1) \cos^2 \theta] \\ &\quad \times \frac{(-1)^{l-2}}{2^{l-2}(l-2)!} \sqrt{\frac{(2l-3)!}{4\pi}} e^{i(l-2)\varphi} (\sin \theta)^{l-2} \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4(l-1)}} [(2l-1) \cos^2 \theta - 1] Y_{l-2,l-2}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (C.53)$$

bowiem w pierwszej równości rozpoznaliśmy harmonikę  $Y_{l-2,l-2}$ . Relacja powyższa stanowi kolejny, przydatny związek pomiędzy harmonikami sferycznymi o różnych indeksach.

## C.4 Inny sposób konstrukcji

Harmoniki sferyczne (C.36) wyprowadziliśmy wychodząc z warunku  $L_+ |l, l\rangle = 0$ , gdzie  $m = l$  jest maksymalne. Równie dobrze moglibyśmy rozpocząć od stanu  $|l, -l\rangle$  z minimalną dopuszczalną wartością  $m$ . Odpowiedni warunek miałby postać  $L_- |l, -l\rangle = 0$ , który w reprezentacji położeniowej sprowadza się do równania

$$e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{l,-l}(\theta, \varphi) = 0. \quad (C.54)$$

Ponieważ według (C.1)  $Y_{l,-l}(\theta, \varphi) = e^{-il\varphi} F_{l,-l}(\theta)$ , więc równanie (C.54) redukuje się do

$$\frac{d F_{l,-l}(\theta)}{d\theta} - l \operatorname{ctg} \theta F_{l,-l}(\theta) = 0, \quad (C.55)$$

a więc identycznego z (13.52). Postać rozwiązania także będzie identyczna, czyli zamiast (13.56) mamy teraz  $F_{l,-l}(\theta) = C_l (\sin \theta)^l$ . Normowanie przebiega również identycznie, co prowadzi do rezultatu

$$Y_{l,-l}(\theta, \varphi) = \frac{e^{i\alpha}}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l. \quad (C.56)$$

Normowanie nie pozwala ustalić fazy. W poprzednim wypadku fazę ustaliliśmy dokonując pewnego wyboru. Tutaj możemy postąpić analogicznie, żądając  $e^{i\alpha} = 1$ , po to aby zachować zgodność ze wzorem (C.39). Mając więc

$$Y_{l,-l}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l, \quad (C.57)$$

możemy konstruować harmoniki sferyczne o coraz większym  $m$ . Oczywiście w tym przypadku musimy posłużyć się operatorem podnoszącym

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_+}{\hbar}\right) |l m\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} |l, m+1\rangle \\ &= \sqrt{(l+m+1)(l-m)} |l, m+1\rangle. \end{aligned} \quad (C.58)$$

Operator ten spełnia relację

$$\left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^{l+m} |l, -l\rangle = \sqrt{\frac{(2l)!(l+m)!}{(l-m)!}} |l m\rangle, \quad (C.59)$$

której dowód (tak jak w lemacie (C.18)) przeprowadzimy przez indukcję, rozpoczynając od  $m = -l$ , a potem idąc w kierunku rosnących  $m$ . Następnie otrzymujemy formułę analogiczną do (C.23)

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \langle \theta \varphi | l m \rangle = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!(l+m)!}} \left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^{l+m} Y_{l,-l}(\theta, \varphi) \\ &= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!(l+m)!}} \left[ e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]^{l+m} Y_{l,-l}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (C.60)$$

co po wykorzystaniu w (C.57) prowadzi do wyrażenia

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left[ e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]^{l+m} e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l, \quad (C.61)$$

w pełni analogicznego do (C.24). Działanie potęg operatora  $L_+/\hbar$  na funkcję stojącą z prawej możemy obliczać tak samo jak w obliczeniach prowadzących do wzoru (C.30). Możemy jednak postąpić inaczej, zauważając że (w reprezentacji położeniowej)

$$\left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^k e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l = \left[ \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^k e^{il\varphi} (\sin \theta)^l \right]^\dagger. \quad (C.62)$$

Korzystając teraz z (C.30) otrzymujemy (oczywiście  $\xi = \cos \theta$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^k e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l &= \left[ \frac{e^{i(l-k)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l} \right]^\dagger \\ &= (-1)^k \frac{e^{-i(l-k)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d\xi^k} (\sin \theta)^{2l}, \end{aligned} \quad (C.63)$$

bowiem operator różniczkowania zmienia znak przy sprzężeniu hermitowskim tyle razy ile wynosi jego rząd. Zapisując (C.63) dla  $k = l + m$  mamy

$$\left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^{l+m} e^{-il\varphi} (\sin \theta)^l = (-1)^{l+m} \frac{e^{im\varphi}}{(\sin \theta)^{-m}} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\sin \theta)^{2l}, \quad (C.64)$$

co z kolei jest analogiem (C.35). Stosując teraz (C.64) w (C.61) otrzymujemy następujące wyrażenie dla harmonik sferycznych

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} (\sin \theta)^m \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\sin \theta)^{2l}. \quad (C.65)$$

co jest wyrażeniem nieco innym niż (C.36), lecz w pełni równoważnym.

## C.5 Harmoniki i ich sprzężenia zespolone

Mamy dwie równoważne definicje

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{e^{im\varphi}}{(\sin \theta)^m} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \quad (\text{C.66})$$

lub

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} (\sin \theta)^m \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\sin \theta)^{2l} \quad (\text{C.67})$$

Obliczając sprzężenie zespolone określenia (C.66) mamy

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{e^{-im\varphi}}{(\sin \theta)^m} \frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}} (\sin \theta)^{2l}. \quad (\text{C.68})$$

Weźmy teraz drugi wzór, tj. (C.67), w którym położymy  $-m$  zamiast  $m$ . Otrzymamy w ten sposób

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} e^{-im\varphi} (\sin \theta)^{-m} \frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}} (\sin \theta)^{2l} \quad (\text{C.69})$$

Zestawiając dwa powyższe wzory widzimy, że

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi), \quad (\text{C.70})$$

wystarczy więc obliczać harmoniki sferyczne tylko dla  $m$  nieujemnych. Harmoniki o ujemnym indeksie  $m$  otrzymujemy przez sprzężenie zespolone i dopasowanie znaku.

## C.6 Relacja rekurencyjna dla harmonik sferycznych

Udowodnimy teraz następującą relację rekurencyjną dla harmonik sferycznych

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cos \theta &= Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \\ &+ Y_{l-1,m}(\theta, \varphi) \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

Dowód tego wzoru jest dosyć żmudny, mimo to warto go uważnie prześledzić. Najpierw jednak wykażemy kilka stwierdzeń pomocniczych

**Lemat C.2** *Dla operatora obniżającego (w reprezentacji położeniowej) zachodzi następująca relacja komutacyjna*

$$\left[ \frac{L_-}{\hbar}, \cos \theta \right] = e^{-i\varphi} \sin \theta. \quad (\text{C.72})$$

**Dowód.** Niech  $f = f(\theta, \varphi)$  oznacza dowolną funkcję falową (zależną od zmiennych kątowych). Obliczamy działanie komutatora na funkcję  $f$

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{L_-}{\hbar}, \cos \theta \right] f(\theta, \varphi) &= \left( \frac{L_-}{\hbar} \right) \cos \theta f - \cos \theta \left( \frac{L_-}{\hbar} \right) f \\
 &= e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cos \theta f \\
 &\quad - \cos \theta e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) f \\
 &= e^{-i\varphi} \left( \sin \theta f - \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \\
 &\quad + e^{-i\varphi} \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} - i \operatorname{ctg} \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \tag{C.73}
 \end{aligned}$$

Po skróceniu mamy

$$\left[ \frac{L_-}{\hbar}, \cos \theta \right] f(\theta, \varphi) = e^{-i\varphi} \sin \theta f(\theta, \varphi). \tag{C.74}$$

Z dowolności funkcji  $f$  wynika teza (C.72). ■

**Lemat C.3** Dla operatora obniżającego (w reprezentacji położeniowej) zachodzi także

$$\left[ \frac{L_-}{\hbar}, e^{-i\varphi} \sin \theta \right] = 0. \tag{C.75}$$

**Dowód.** Jak poprzednio, dla dowolnej funkcji falowej  $g = g(\theta, \varphi)$  mamy

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{L_-}{\hbar}, e^{-i\varphi} \sin \theta \right] g(\theta, \varphi) &= e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{-i\varphi} \sin \theta g \\
 &\quad - e^{-2i\varphi} \sin \theta \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) g \\
 &= e^{-i\varphi} \left[ -e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta g) + i \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{-i\varphi} g) \right] \\
 &\quad + e^{-2i\varphi} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} - i \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) \\
 &= e^{-2i\varphi} \left[ -\cos \theta g - \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} + i \cos \theta \left( -i g + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) \right] \\
 &\quad + e^{-2i\varphi} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} - i \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) \\
 &= 0, \tag{C.76}
 \end{aligned}$$

bowiem wszystkie człony się znoszą parami. ■

**Lemat C.4** Dla  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi (w reprezentacji położeniowej) relacja komutacyjna

$$\left[ \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^k, \cos \theta \right] = k \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{k-1} e^{-i\varphi} \sin \theta. \tag{C.77}$$

**Dowód.** Przez indukcję. Teza dla  $k = 1$  jest udowodniona w (C.72). Przyjmujemy (C.77) za prawdziwe dla pewnego  $k$  i badamy dla  $k + 1$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{k+1}, \cos \theta \right] &= \left( \frac{L_-}{\hbar} \right) \left[ \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^k, \cos \theta \right] + \left[ \left( \frac{L_-}{\hbar} \right), \cos \theta \right] \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^k \\ &= \left( \frac{L_-}{\hbar} \right) k \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{k-1} e^{-i\varphi} \sin \theta + e^{-i\varphi} \sin \theta \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^k \\ &= (k+1) \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^k e^{-i\varphi} \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

Pierwsza równość wynika z własności komutatorów, druga z (C.72) i z założenia indukcyjnego, a trzecia z faktu, że funkcja  $e^{-i\varphi} \sin \theta$  i operator  $L_-$  komutują. Odtworzyła się teza dla  $k + 1$  co, na mocy zasady indukcji, kończy dowód. ■

Udowodnione wzory zastosujemy do analizy wyrażenia  $\cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi)$ . Dla skrócenia notacji będziemy pomijać argumenty harmonik sferycznych. Na mocy relacji (C.23) piszemy

$$\cos \theta Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \cos \theta \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{l-m} Y_{ll}. \quad (\text{C.79})$$

Stosując komutator (C.77) dla  $k = l - m$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left[ \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{l-m} \cos \theta Y_{ll} \right. \\ &\quad \left. - (l-m) \left( \frac{L_-}{\hbar} \right)^{l-m-1} e^{-i\varphi} \sin \theta Y_{ll} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

Następne kroki polegają na przekształceniu funkcji na które działają potęgi operatora obniżającego  $L_-$ . Najpierw skorzystamy z (C.48), w którym zamieniamy  $l \rightarrow l + 1$ , a zatem

$$\cos \theta Y_{l,l} = \frac{1}{\sqrt{2l+3}} Y_{l+1,l}. \quad (\text{C.81})$$

Natomiast z (C.41) wynika, że

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} \sin \theta Y_{ll} &= -\sqrt{\frac{2l+1}{2l}} \sin^2 \theta Y_{l-1,l-1} \\ &= -\sqrt{\frac{2l+1}{2l}} Y_{l-1,l-1} + \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} \cos^2 \theta Y_{l-1,l-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

I dalej, z (C.53) po zamianie  $l \rightarrow l + 1$  otrzymujemy

$$Y_{l+1,l-1} = \sqrt{\frac{2l+3}{4l}} \left[ (2l+1) \cos^2 \theta - 1 \right] Y_{l-1,l-1} \quad (\text{C.83})$$

skąd, po elementarnych przekształceniach dostajemy

$$\frac{1}{2l+1} \left( \sqrt{\frac{4l}{2l+3}} Y_{l+1,l-1} + Y_{l-1,l-1} \right) = \cos^2 \theta Y_{l-1,l-1}. \quad (\text{C.84})$$

Wobec tego z (C.82) po podstawieniu (C.84) dostajemy

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} \sin \theta Y_{ll} &= -\sqrt{\frac{2l+1}{2l}} Y_{l-1,l-1} \\ &\quad + \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} \frac{1}{2l+1} \left( \sqrt{\frac{4l}{2l+3}} Y_{l+1,l-1} + Y_{l-1,l-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.85})$$

W wyrażeniu tym występują tylko dwie harmoniki sferyczne. Uporządkowanie współczynników prowadzi do

$$e^{-i\varphi} \sin \theta Y_{ll} = \sqrt{\frac{2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,l-1} - \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} Y_{l-1,l-1}. \quad (\text{C.86})$$

I teraz podstawiamy wzory (C.81) i (C.86) do formuły (C.80) dostając

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{lm} = & \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2l+3}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} Y_{l+1,l} \right. \\ & - (l-m) \sqrt{\frac{2}{(2l+1)(2l+3)}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m-1} Y_{l+1,l-1} \\ & \left. + (l-m) \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m-1} Y_{l-1,l-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

Na podstawie (C.76) (w reprezentacji położeniowej) po zamianie  $l \rightarrow l-1$ , mamy

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m-1} Y_{l-1,l-1} = \sqrt{\frac{(2l-2)!(l-m-1)!}{(l+m-1)!}} Y_{l-1,m}, \quad (\text{C.88})$$

co pozwala przekształcić ostatni człon w (C.87)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (l-m) \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m-1} Y_{l-1,l-1} \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (l-m) \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} \sqrt{\frac{(2l-2)!(l-m-1)!}{(l+m-1)!}} Y_{l-1,m} \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)}{2l(2l-1)(l-m)}} (l-m) \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} Y_{l-1,m} \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}. \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

Podstawiając teraz (C.89) zamiast ostatniego składnika do (C.87) dostajemy

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{lm} = & \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l+3)(2l)!(l-m)!}} \left[ \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} Y_{l+1,l} \right. \\ & - (l-m) \sqrt{\frac{2}{(2l+1)}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m-1} Y_{l+1,l-1} \left. \right] \\ & + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}. \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

Porównując powyższy wzór z naszą tezą (C.71) widzimy, że jedna jej część jest już "gotowa". Pozostaje rozważyć pierwsze dwa składniki (C.90). W tym celu znów wracamy do wzoru (C.18), w którym zamieniamy  $l \rightarrow l+1$  i wtedy

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l+1-m} Y_{l+1,l+1} = \sqrt{\frac{(2l+2)!(l-m+1)!}{(l+m+1)!}} Y_{l+1,m}. \quad (\text{C.91})$$

Położmy teraz  $m = l$ , wobec tego dostajemy

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right) Y_{l+1,l+1} = \sqrt{\frac{(2l+2)!}{(2l+1)!}} Y_{l+1,l} = \sqrt{2(l+1)} Y_{l+1,l}. \quad (C.92)$$

Stąd oczywiście wynika, że

$$Y_{l+1,l} = \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} Y_{l+1,l+1}. \quad (C.93)$$

Weźmy ponownie (C.91) ale tym razem dla  $m = l - 1$ , zatem

$$\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^2 Y_{l+1,l+1} = \sqrt{\frac{2(2l+2)!}{(2l)!}} Y_{l+1,l-1} = \sqrt{2(2l+2)(2l+1)} Y_{l+1,l-1}. \quad (C.94)$$

Wobec tego mamy

$$Y_{l+1,l-1} = \sqrt{\frac{1}{2(2l+2)(2l+1)}} Y_{l+1,l+1}. \quad (C.95)$$

Mamy już wszystko co potrzeba do obliczenia pierwszego składnika w (C.90). Wstawiamy do niego (C.93) i (C.95) i dostajemy

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l+3)(2l)!(l-m)!}} \left[ \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m} Y_{l+1,l} - (l-m) \sqrt{\frac{2}{(2l+1)}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l-m-1} Y_{l+1,l-1} \right] \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l+3)(2l)!(l-m)!}} \left[ \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l+1-m} Y_{l+1,l+1} \right. \\ & \quad \left. - (l-m) \sqrt{\frac{2}{(2l+1)}} \sqrt{\frac{1}{2(2l+2)(2l+1)}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l+1-m} Y_{l+1,l+1} \right]. \end{aligned} \quad (C.96)$$

Oba człony zawierają tę samą potęgę operatora  $L_-$ , która działa na tę samą harmonikę sferyczną. Można więc te wielkości wyłączyć z nawiasu kwadratowego, w którym zostanie jedynie czynnik liczbowy. Porządkując ten czynnik, wyrażamy pierwszy składnik wzoru (C.90) w postaci

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l+2)(2l+3)(2l)!(l-m)!}} \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right) \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{l+1-m} Y_{l+1,l+1} \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l+2)(2l+3)(2l)!(l-m)!}} \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right) \\ & \quad \times \sqrt{\frac{(2l+2)!(l+1-m)!}{(l+1+m)!}} Y_{l+1,m}, \end{aligned} \quad (C.97)$$

gdzie po prawej stronie równości wykorzystaliśmy (C.18) wzięte po zamianie  $\rightarrow l+1$ . Dokonując uproszczeń w czynnikach liczbowych sprowadzamy pierwszy składnik wzoru (C.90) do

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{(2l+2)(2l+3)}} \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right) \sqrt{\frac{(2l+2)(2l+1)(l+1-m)}{(l+1+m)}} Y_{l+1,m} \\ &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m} \end{aligned} \quad (C.98)$$

I wreszcie, uproszczony pierwszy składnik wzoru (C.90) podstawiamy na jego miejsce (tj. do (C.90)) i w końcu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{lm} = & \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m} \\ & + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}, \end{aligned} \quad (\text{C.99})$$

co dokładnie pokrywa się z równością (C.71). Pracochłonne i skomplikowane wyprowadzenie jest więc zakończone.

\*\*\*\*\*