

## Rozdział 12

# Kwantowa teoria momentu pędu

**UWAGA :** Począwszy od tego rozdziału będziemy na ogół pomijać "daszki" nad operatorami. Matematyczny sens wielkości pojawiających się w równaniach powinien wynikać z kontekstu.

### 12.1 Orbitalny moment pędu – wstęp

Kwantowo-mechaniczna teoria momentu pędu może być wprowadzana na różne sposoby. W *Uzupełnieniach* omawiamy związek pomiędzy zwykłymi obrotami w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  – przestrzeni położeń, a odpowiednimi transformacjami w przestrzeni  $\mathcal{H}$  stanów układu fizycznego, czyli w przestrzeni Hilberta. Pokazujemy tam, że operator momentu pędu jest generatorem transformacji w przestrzeni Hilberta, a także wyprowadzamy jego postać wynikającą z własności obrotów geometrycznych. Tutaj jednak wybieramy prostą i intuicyjną drogę, wynikającą z fizyki klasycznej.

#### 12.1.1 Podstawowe definicje

Klasyczny moment pędu cząstki dany jest wyrażeniem  $\vec{L}_{kl} = \vec{r}_{kl} \times \vec{p}_{kl}$ . W myśl zasady odpowiedniości kwantowo-mechaniczny operator momentu pędu konstruujemy zastępując wielkości klasyczne operatorami

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{R}} \times \hat{\vec{P}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{r} \times \nabla. \quad (12.1)$$

Z definicji tej, w oczywisty sposób, wynikają wyrażenia dla poszczególnych składowych operatora momentu pędu

$$L_1 \equiv L_x = yp_z - zp_y = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (12.2a)$$

$$L_2 \equiv L_y = zp_x - xp_z = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (12.2b)$$

$$L_3 \equiv L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (12.2c)$$

Składowe operatorów położenia i pędu spełniają kanoniczne relacje komutacyjne

$$[x_j, p_k] = i\hbar \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (12.3)$$

Zwróćmy tu uwagę, że składowe operatora momentu pędu (orbitalnego) (12.2) są utworzone przez różne składowe operatorów położenia i pędu, które komutują ze sobą. Dlatego też niepotrzebna jest tu procedura symetryzacyjna, o której wspominaliśmy przy omawianiu zasady odpowiedniości.

Wygodnie jest zapisać definicję składowych operatora momentu pędu za pomocą standardowych reguł obliczania iloczynu wektorowego

$$L_m = \varepsilon_{mnq} x_n p_q, \quad (12.4)$$

gdzie zawsze obowiązuje konwencja sumacyjna (sumujemy po powtarzających się wskaźnikach od 1 do 3).

Jak wiemy, kwantowo-mechaniczne operatory na ogół są nieprzemienne, zaś relacje komutacyjne odgrywają zasadniczą rolę. Dlatego badanie momentu pędu rozpoczniemy od znalezienia różnych relacji komutacyjnych przydatnych w dalszych rozważaniach.

### 12.1.2 Relacje komutacyjne

Wprowadzone definicje wystarczą do zbadania podstawowych relacji komutacyjnych, które ujmemy jako kolejne lematy.

**Lemat 12.1** *Składowe operatorów orbitalnego momentu pędu  $L_m$ , położenia  $x_n$  i pędu  $p_q$ , spełniają następujące reguły komutacyjne*

$$[L_m, x_n] = i\hbar \varepsilon_{mnq} x_q, \quad (12.5a)$$

$$[L_m, p_n] = i\hbar \varepsilon_{mnq} p_q, \quad (12.5b)$$

$$[L_m, L_n] = i\hbar \varepsilon_{mnq} L_q. \quad (12.5c)$$

**Dowód.** Relację (12.5a) dowodzimy prostym rachunkiem, wprost z definicji (12.4)

$$\begin{aligned} [L_m, x_n] &= [\varepsilon_{mjk} x_j p_k, x_n] = \varepsilon_{mjk} \{ x_j [p_k, x_n] + [x_j, x_n] p_k \} \\ &= \varepsilon_{mjk} \{ x_j (-i\hbar) \delta_{kn} + 0 \} = -i\hbar \varepsilon_{mjn} x_j \\ &= i\hbar \varepsilon_{mnj} x_j. \end{aligned} \quad (12.6)$$

co kończy dowód pierwszej z relacji. Dowód drugiej przebiega całkiem analogicznie, więc go ominiemy. Dowód trzeciej relacji niestety jest nieco dłuższy

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= [L_m, \varepsilon_{nqs} x_q p_s] = \varepsilon_{nqs} \{ x_q [L_m, p_s] + [L_m, x_q] p_s \} \\ &= \varepsilon_{nqs} (i\hbar \varepsilon_{msb} x_q p_b + i\hbar \varepsilon_{mqb} x_b p_s) \\ &= i\hbar (-\varepsilon_{snq} \varepsilon_{smb} x_q p_b + \varepsilon_{qns} \varepsilon_{qmb} x_b p_s). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Ponieważ zachodzi relacja

$$\varepsilon_{abc} \varepsilon_{ade} = \delta_{bd} \delta_{ce} - \delta_{be} \delta_{cd}, \quad (12.8)$$

więc dalej otrzymujemy

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= -i\hbar (\delta_{nm} \delta_{qb} - \delta_{nb} \delta_{qm}) x_q p_b + i\hbar (\delta_{nm} \delta_{sb} - \delta_{nb} \delta_{sm}) x_b p_s \\ &= -i\hbar (\delta_{nm} x_q p_q - x_m p_n) + i\hbar (\delta_{nm} x_s p_s - x_n p_m) \\ &= -i\hbar (x_m p_n - x_n p_m) \\ &= -i\hbar (\delta_{am} \delta_{bn} x_a p_b - \delta_{an} \delta_{bm} x_a p_b) \\ &= -i\hbar (\delta_{ma} \delta_{nb} - \delta_{an} \delta_{bm}) x_a p_b \end{aligned} \quad (12.9)$$

Korzystamy ponownie z (12.8) i dostajemy

$$[L_m, L_n] = i\hbar \varepsilon_{qmn} \varepsilon_{qab} x_a p_b = i\hbar \varepsilon_{qmn} L_q, \quad (12.10)$$

co kończy dowód trzeciej relacji komutacyjnej. ■

Uzyskane relacje komutacyjne dotyczą operatora tzw. orbitalnego momentu pędu, mimo to jednak grają pierwszorzędną rolę w dalszych rozważaniach.

## 12.2 Ogólny operator moment pędu

### 12.2.1 Definicje i uwagi wstępne

Zdefiniowany powyżej operator  $\vec{L}$  jest tzw. orbitalnym momentem pędu pojedynczej cząstki (nazwa ta wynika z analogii klasycznej). Układy fizyczne mogą jednak składać się z więcej niż tylko jednej cząstki. Może być wtedy potrzebny całkowity moment pędu układu. Co więcej (jak to omówimy później) cząstki mogą mieć spin, tzw. wewnętrzny moment pędu, całkowicie niezależny od stanu jej ruchu (a więc niezależny od  $\vec{L}$ ). Widać więc, że pojęcie momentu pędu jest ogólniejsze, nie jest ograniczone do orbitalnego momentu pędu pojedynczej cząstki. Dlatego też uogólnimy nasze rozważania wprowadzając operator  $\vec{J}$  składający się z trzech składowych (operatorowych)  $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ . Na te trzy operatory narzucamy dwa warunki. Po pierwsze żądamy aby były to obserwabla – operatory hermitowskie, których wektory własne rozpinają przestrzeń stanów. Po drugie, żądamy aby spełniały one relacje komutacyjne, formalnie identyczne z relacjami komutacyjnymi dla składowych operatora orbitalnego momentu pędu, a mianowicie, żądamy aby zachodziły relacje

$$[J_m, J_n] = i\hbar \varepsilon_{mnq} J_q. \quad (12.11)$$

Operatory  $J_k$  nazwiemy operatorami momentu pędu (ale już bez przymiotnika) i nie precyzujemy ich konkretnego sensu fizycznego. Stała Plancka  $\hbar$  występuje tu po to, aby zgadzały się wymiary. Operatorowi  $\vec{J}$  przysługuje wymiar stałej Plancka, a więc wymiar momentu pędu (co dodatkowo uzasadnia nazwę). Oczywiście z faktu, że składowe momentu pędu nie komutują wynika, że niemożliwy jest jednoczesny pomiar trzech składowych operatora  $\vec{J}$ . Wprowadzamy także operator całkowitego momentu pędu zdefiniowany jako

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (12.12)$$

oraz dwa operatory pomocnicze

$$J_{\pm} = J_1 \pm i J_2, \quad \hat{J}_+^\dagger = J_-. \quad (12.13)$$

Operatory  $J_{\pm}$  nie są hermitowskie, lecz są swoimi wzajemnymi sprzężeniami.  $J_+$  bywa nazywany operatorem podnoszącym, zaś  $J_-$  obniżającym. Pochodzenie tej terminologii wyjaśni się w trakcie naszej dyskusji.

Podkreślmy, że w prowadzonych tu rozważaniach relacja komutacyjna (12.11) jest w gruncie rzeczy postulatem. Nie wynika ona tu z jakichś definicji, lecz jest z góry narzuconym warunkiem (wynikającym z analogii do orbitalnego momentu pędu). W *Uzupełnieniach* pokazujemy, że relacja ta jest ściśle powiązana z własnościami obrotów w  $\mathbb{R}^3$  i z indukowanymi przez nie transformacjami w przestrzeni Hilberta. Mimo to jednak, przyjmiemy (12.11) jako postulat i przebadamy jego najważniejsze konsekwencje, tj. wynikające z (12.11) inne reguły komutacyjne, a także własności operatorów momentu pędu.

### 12.2.2 Relacje komutacyjne

**Lemat 12.2** *Operator całkowitego momentu pędu  $\vec{J}^2$  i składowa  $J_k$  spełniają relację komutacyjną*

$$[\vec{J}^2, J_k] = 0, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3. \quad (12.14)$$

**Dowód.** Stosując regułę sumacyjną, z relacji (12.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} [\vec{J}^2, J_k] &= [J_n J_n, J_k] = J_n [J_n, J_k] + [J_n, J_k] J_n \\ &= i\hbar \varepsilon_{nkp} J_n J_p + i\hbar \varepsilon_{nkp} J_p J_n. \end{aligned} \quad (12.15)$$

W drugim składniku zamieniamy miejscami wskaźniki  $p \leftrightarrow n$

$$\begin{aligned} [\vec{J}^2, J_k] &= i\hbar \varepsilon_{nkp} J_n J_p + i\hbar \varepsilon_{pkn} J_n J_p = i\hbar (\varepsilon_{nkp} + \varepsilon_{pkn}) J_n J_p \\ &= i\hbar (-\varepsilon_{knp} + \varepsilon_{knp}) J_n J_p = 0. \end{aligned} \quad (12.16)$$

co należało wykazać. ■

Naturalnym wnioskiem z powyższego lematu jest stwierdzenie, że możliwy jest jednoczesny pomiar całkowitego momentu pędu i jednej (dowolnie wybranej) składowej. Zazwyczaj wybieramy (z przyczyn historycznych) składową  $J_3$  jako współmierzalną z  $\vec{J}^2$ .

**Lemat 12.3** *Składowa operatora momentu pędu  $J_3$  i operatory  $J_{\pm}$  spełniają relację*

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}. \quad (12.17)$$

**Dowód.** Przeprowadzamy bezpośredni rachunek, w którym korzystamy z kanonicznej relacji (12.11). A zatem

$$\begin{aligned} [J_3, J_{\pm}] &= [J_3, J_1 \pm iJ_2] = i\hbar \varepsilon_{31k} J_k \pm i^2 \hbar \varepsilon_{32k} J_k \\ &= i\hbar \varepsilon_{312} J_2 \mp \hbar \varepsilon_{321} J_1 = i\hbar J_2 \pm \hbar J_1 \\ &= \pm \hbar (J_1 \pm i\hbar J_2) = \pm \hbar J_{\pm}, \end{aligned} \quad (12.18)$$

co było do wykazania. ■

**Lemat 12.4** *Operatory  $J_+$  oraz  $J_-$  spełniają relację komutacyjną*

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3. \quad (12.19)$$

**Dowód.** Znowu przez bezpośredni rachunek dostajemy

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2] = -i [J_1, J_2] + i [J_2, J_1] \\ &= 2i [J_2, J_1] = 2i^2 \hbar \varepsilon_{21p} J_p = -2\hbar \varepsilon_{213} J_3 = 2\hbar J_3, \end{aligned} \quad (12.20)$$

co było do wykazania. ■

**Lemat 12.5** *Operator całkowitego momentu pędu  $\vec{J}^2$  i operatory  $J_{\pm}$  spełniają relację*

$$[\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0. \quad (12.21)$$

**Dowód.** Na mocy lematu (12.14) mamy

$$[\vec{J}^2, J_{\pm}] = [\vec{J}^2, J_1 \pm iJ_2] = [\vec{J}^2, J_1] \pm i [\vec{J}^2, J_2] = 0. \quad (12.22)$$

co kończy dowód. ■

**Lemat 12.6** *Operator całkowitego momentu pędu  $\vec{J}^2$  można wyrazić w postaci*

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2. \quad (12.23)$$

**Dowód.** Bezpośrednio sprawdzamy (pamiętamy, że składowe  $J_k$  nie komutują)

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= \frac{1}{2}((J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) + (J_1 - iJ_2)(J_1 + iJ_2)) + J_3^2 \\ &= \frac{1}{2}(J_1^2 - iJ_1J_2 + iJ_2J_1 + J_2^2 + J_1^2 + iJ_1J_2 - iJ_2J_1 + J_2^2) + J_3^2 \\ &= \frac{1}{2}(2J_1^2 + 2J_2^2) + J_3^2 \end{aligned} \quad (12.24)$$

co, na mocy definicji (12.12) oczywiście kończy dowód. ■

**Lemat 12.7** *Dla operatorów  $J_\pm$  zachodzi następująca relacja*

$$J_\mp J_\pm = \vec{J}^2 - J_3(J_3 \pm \hbar). \quad (12.25)$$

**Dowód.** Bezpośrednio sprawdzamy (składowe  $J_k$  nie komutują)

$$\begin{aligned} J_\mp J_\pm &= (J_1 \mp iJ_2)(J_1 \pm iJ_2) = J_1^2 \pm iJ_1J_2 \mp iJ_2J_1 - i^2 J_2^2 \\ &= J_1^2 + J_2^2 \pm i(J_1J_2 - J_2J_1) = \vec{J}^2 - J_3^2 \pm i^2 \hbar \varepsilon_{12p} J_p \\ &= \vec{J}^2 - J_3^2 \mp \hbar \varepsilon_{123} J_3 = \vec{J}^2 - J_3(J_3 \pm \hbar). \end{aligned} \quad (12.26)$$

co należało pokazać. ■

## 12.3 Wartości własne operatorów $\vec{J}^2$ oraz $J_3 = J_z$

### 12.3.1 Wprowadzenie

Operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  komutują, a więc z jednej strony są jednocześnie mierzalne, zaś z drugiej strony mają wspólny zbiór wektorów własnych. Wektor własny operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  oznaczmy przez  $|j\ m\rangle$  i napiszemy odpowiednie zagadnienia własne

$$\vec{J}^2 |j\ m\rangle = \hbar^2 \lambda_j |j\ m\rangle, \quad (12.27a)$$

$$J_3 |j\ m\rangle = \hbar m |j\ m\rangle, \quad (12.27b)$$

gdzie  $\hbar$  po prawej wprowadziliśmy dla zgodności wymiarów. Rozważane operatory są hermitowskie, więc bezwymiarowe liczby  $\lambda_j, m \in \mathbb{R}$ . Poprawny wymiar uwzględnia stała Plancka, zatem liczby  $\lambda_j, m$  będziemy nazywać wartościami własnymi operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$ , odpowiednio. Może się tak zdarzyć, że operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  nie wystarczają do utworzenia pełnego zbioru obserwabli komutujących. Wówczas może istnieć kilka stanów spełniających powyższe zagadnienie własne. Wtedy będą się one różnić dodatkowym indeksem numerującym stany własne jakiejś trzeciej obserwabli, którą trzeba dołączyć, aby zbudować ZZOK. Na razie pominiemy ten ewentualny trzeci indeks, ale do dyskusji tego problemu wrócimy później. Stany  $|j\ m\rangle$  i  $|j'\ m'\rangle$  odpowiadają różnym wartościom własnym operatorów hermitowskich, są więc ortogonalne. Można je unormować, więc przyjmujemy

$$\langle j\ m | j'\ m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (12.28)$$

Oczywiście z (12.27) wynikają wartości oczekiwane

$$\langle j m | \vec{J}^2 | j m \rangle = \hbar^2 \lambda_j, \quad (12.29a)$$

$$\langle j m | J_3 | j m \rangle = \hbar m. \quad (12.29b)$$

Operator  $\vec{J}$  jest z założenia obserwabłą, jest więc hermitowski, wobec tego operator  $\vec{J}^2$  jest dodatnio określony, co oznacza że

$$\hbar^2 \lambda_j = \langle j m | \vec{J}^2 | j m \rangle = \|\vec{J} | j m \rangle\|^2 \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_j \geq 0. \quad (12.30)$$

Wobec tego zawsze znajdziemy taką liczbę nieujemną  $j$ , że możemy napisać

$$\lambda_j = j(j+1), \quad j \geq 0, \quad \text{oraz} \quad \vec{J}^2 | j m \rangle = \hbar^2 j(j+1) | j m \rangle. \quad (12.31)$$

Wprowadzenie liczby  $j$  na tym etapie rozważań jest możliwe, choć na razie niekonieczne. Później, wyniknie nam ona w sposób naturalny.

### 12.3.2 Wartość własna $m$ jest ograniczona

Wartość oczekiwana operatora  $J_k^2$  jest nieujemna, bowiem

$$\langle j m | J_k^2 | j m \rangle = \|J_k | j m \rangle\|^2 \geq 0. \quad (12.32)$$

Suma dwóch liczb nieujemnych też jest nieujemna. Zatem stosując (12.27) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle j m | J_1^2 | j m \rangle + \langle j m | J_2^2 | j m \rangle = \langle j m | (J_1^2 + J_2^2) | j m \rangle \\ &= \langle j m | (\vec{J}^2 - J_3^2) | j m \rangle = \hbar^2 (\lambda_j - m^2). \end{aligned} \quad (12.33)$$

Wnioskujemy stąd, że po pierwsze stan  $| j m \rangle$  jest stanem własnym operatora  $(J_1^2 + J_2^2)$ , a po drugie, że

$$\lambda_j - m^2 \geq 0. \quad (12.34)$$

To zaś oznacza, że liczba kwantowa  $m$  jest ograniczona, gdy tylko  $\lambda_j$  jest znane. Wobec tego, stwierdzamy, że

$$\text{dla danego (określonego) } \lambda_j : \quad m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \quad (12.35)$$

### 12.3.3 Własności $J_{\pm} | j m \rangle$

Rozważymy teraz działanie operatora podnoszącego  $J_+$  i obniżającego  $J_-$  na stany  $| j m \rangle$ . Ponieważ operatory  $J_{\pm}$  komutują z  $\vec{J}^2$  (por. (12.21)), więc

$$\vec{J}^2 (J_{\pm} | j m \rangle) = \vec{J}^2 J_{\pm} | j m \rangle = J_{\pm} \vec{J}^2 | j m \rangle = \hbar^2 \lambda_j J_{\pm} | j m \rangle. \quad (12.36)$$

Wektor  $J_{\pm} | j m \rangle$  jest więc stanem własnym operatora  $\vec{J}^2$  z wartością własną  $\lambda_j$ . Co więcej, z relacji komutacyjnej (12.17) wynika, że

$$\begin{aligned} J_3 J_{\pm} | j m \rangle &= (J_{\pm} J_3 \pm \hbar J_{\pm}) | j m \rangle \\ &= J_{\pm} (\hbar m \pm \hbar) | j m \rangle = \hbar (m \pm 1) J_{\pm} | j m \rangle. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Oznacza to, że wektor  $J_{\pm} | j m \rangle$  jest stanem własnym operatora  $J_3$  odpowiadającym wartości własnej  $(m \pm 1)$ . Własności te posiada też stan  $| j, m \pm 1 \rangle$ . Wnioskujemy więc, że musi zachodzić proporcjonalność

$$J_{\pm} | j m \rangle = C_{\pm} | j, m \pm 1 \rangle. \quad (12.38)$$

Stałe proporcjonalności trzeba oczywiście wyznaczyć, czym zajmiemy się dalej. Własność podnoszenia lub obniżania liczby kwantowej  $m$  wyjaśnia dlaczego operatory  $J_{\pm}$  nazywamy podnoszącym lub obniżającym.

**Lemat 12.8** Operatory  $J_{\pm}$  działając na stan  $|j m\rangle$  dają

$$J_+|j m\rangle = \hbar \sqrt{\lambda_j - m(m+1)} |j, m+1\rangle, \quad (12.39a)$$

$$J_-|j m\rangle = \hbar \sqrt{\lambda_j - m(m-1)} |j, m-1\rangle, \quad (12.39b)$$

**Dowód.** Na mocy relacji (12.25) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle j m | J_{\mp} J_{\pm} | j m \rangle &= \langle j m | [\vec{J}^2 - J_3(J_3 \pm \hbar)] | j m \rangle \\ &= [\hbar^2 \lambda_j - m \hbar(m \hbar \pm \hbar)] \langle j m | j m \rangle \\ &= \hbar^2 [\lambda_j - m(m \pm 1)]. \end{aligned} \quad (12.40)$$

Z drugiej strony, z (12.38) mamy od razu

$$\langle j m | J_{\mp} J_{\pm} | j m \rangle = \|C_{\pm} |j, m \pm 1\rangle\|^2 = |C_{\pm}|^2, \quad (12.41)$$

bowiem stany  $|j, m \pm 1\rangle$  są z założenia unormowane. Zestawiając dwie powyższe równości piszemy

$$C_{\pm} = \hbar \sqrt{\lambda_j - m(m \pm 1)}. \quad (12.42)$$

Podstawiając ten wynik do (12.38) otrzymujemy tezę. ■

### 12.3.4 Wartości własne $\vec{J}^2$ oraz $J_3 = J_z$

W naszych poprzednich rozważaniach stwierdziliśmy, że wartość własna  $m$  jest ograniczona, patrz (12.35). Wiemy także, że operator  $J_+$  podnosi liczbę kwantową  $m$  o 1. Ponieważ  $m$  nie może przekroczyć  $m_{max}$ , więc musi zachodzić relacja

$$J_+|j, m_{max}\rangle = 0. \quad (12.43)$$

Analogicznie, operator  $J_-$  obniża liczbę kwantową  $m$  o 1, lecz  $m$  nie może spaść poniżej  $m_{min}$ , więc musi też być

$$J_-|j, m_{min}\rangle = 0. \quad (12.44)$$

Podziałajmy operatorem  $J_-$  na obie strony relacji (12.43) i skorzystajmy z (12.25) biorąc pod uwagę, że stan  $|j, m_{max}\rangle$  jest stanem własnym operatorów  $\vec{J}^2$  i  $J_3$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= J_- J_+ |j, m_{max}\rangle = [\vec{J}^2 - J_3(J_3 + \hbar)] |j, m_{max}\rangle \\ &= \hbar^2 [\lambda_j - m_{max}(m_{max} + 1)] |j, m_{max}\rangle \end{aligned} \quad (12.45)$$

W podobny sposób działamy operatorem  $J_+$  na obie strony (12.44) i mamy teraz

$$\begin{aligned} 0 &= J_+ J_- |j, m_{min}\rangle = [\vec{J}^2 - J_3(J_3 - \hbar)] |j, m_{min}\rangle \\ &= \hbar^2 [\lambda_j - m_{min}(m_{min} - 1)] |j, m_{min}\rangle \end{aligned} \quad (12.46)$$

Z uzyskanych wyrażeń wynika więc układ równań

$$\begin{cases} \lambda_j - m_{max}(m_{max} + 1) = 0 \\ \lambda_j - m_{min}(m_{min} - 1) = 0. \end{cases} \quad (12.47)$$

Z równań tych eliminujemy  $\lambda_j$ , i w kolejnych krokach otrzymujemy

$$\begin{aligned} m_{max}(m_{max} + 1) &= m_{min}(m_{min} - 1), \\ m_{max}^2 + m_{max} - m_{min}^2 + m_{min} &= 0, \\ (m_{max} + m_{min})(m_{max} - m_{min}) + (m_{max} + m_{min}) &= 0, \\ (m_{max} + m_{min})(m_{max} - m_{min} + 1) &= 0, \end{aligned} \quad (12.48)$$

Ponieważ  $m_{max} \geq m_{min}$  więc powyższe równanie może być spełnione tylko wtedy, gdy zeruje się pierwszy czynnik. Wnioskujemy więc, że

$$m_{max} = -m_{min}. \quad (12.49)$$

Stan  $|j, m_{min}\rangle$  ma najmniejszą możliwą liczbę kwantową  $m = m_{min}$ . Na mocy relacji (12.39a) wnioskujemy, że działając na ten stan operatorem  $J_+$  otrzymamy nowy stan z liczbą kwantową  $m$  podniesioną o jeden, tzn  $m = m_{min} + 1$ . Stosując sukcesywnie operator  $J_+$  zwiększamy liczbę  $m$ , aż wreszcie natrafimy na  $m_{max}$ . Dalsze stosowanie  $J_+$  produkuje zera. A więc  $m_{min}$  i  $m_{max}$  muszą różnić się o liczbę całkowitą (o tyle, ile razy stosowaliśmy operator  $J_+$ ). A zatem piszemy

$$m_{max} - m_{min} = 2j, \quad (12.50)$$

gdzie  $j$  jest nieujemną liczbą całkowitą lub połówkową. Liczby kwantowe  $m_{max}$  i  $m_{min}$  spełniają więc równania (12.49) i (12.50). Wynika z nich oczywisty wniosek

$$m_{max} = j \quad \text{oraz} \quad m_{min} = -j. \quad (12.51)$$

Wobec tego wnioskujemy, że dopuszczalne wartości liczby kwantowej  $m$  to

$$m = -j, -j+1, -j+2, \dots, \dots, j-2, j-1, j. \quad (12.52)$$

Natomiast na mocy pierwszego z równań (12.47) otrzymujemy

$$\lambda_j = j(j+1), \quad (12.53)$$

przy czym wiemy, że  $j$  jest liczbą nieujemną całkowitą lub połówkową. Liczba ta, wprowadzona w (12.31), wynikła teraz w sposób naturalny z całego formalizmu, a ponadto został sprecyzowany jej charakter.

### 12.3.5 Podsumowanie

Operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  komutują, mają więc wspólny zbiór (ortonormalnych) wektorów własnych  $\{|j, m\rangle\}$ , spełniających

$$\vec{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \quad (12.54a)$$

$$J_3 |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle, \quad (12.54b)$$

gdzie liczba kwantowa  $m$  może przyjmować  $(2j+1)$  wartości

$$m = -j, -j+1, -j+2, \dots, \dots, j-2, j-1, j. \quad (12.55)$$

Liczba kwantowa  $j$  jest nieujemna całkowita lub połówkowa

$$m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \dots, \quad (12.56)$$

Z własności operatorów  $J_{\pm}$  wynika, że liczba kwantowa  $m$  zmienia się krokami o wielkości jednostkowej. Wobec tego

- jeśli  $j$  – połówkowa, to  $m$  też połówkowa;
- jeśli  $j$  – całkowita, to  $m$  też całkowita.

Widzimy więc, że zbiory wartości własnych  $\{j, m\}$  rozpadają się na dwie klasy, liczb całkowitych (tzw. przypadek bozonowy) i połówkowych (przypadek fermionowy).

Warto także przypomnieć działanie operatorów  $J_{\pm}$  na stany  $|j m\rangle$ :

$$\begin{aligned} J_+ |j m\rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \\ &= \hbar \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle, \end{aligned} \quad (12.57a)$$

$$\begin{aligned} J_- |j m\rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \\ &= \hbar \sqrt{(j-m+1)(j+m)} |j, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (12.57b)$$

## 12.4 Wektory własne operatorów $\vec{J}^2$ oraz $J_3 = J_z$

### 12.4.1 Konstrukcja stanów $|j m\rangle$

Niech  $\mathcal{E}$  oznacza pewną przestrzeń wektorową, w której działają operatory  $\vec{J}^2$  i  $J_3$ . Weźmy pod uwagę wartości własne  $j$  i  $m$ , którym odpowiada unormowany wektor  $|j m\rangle$ . Wektor ten tworzy podprzestrzeń  $\mathcal{E}(j, m)$ . Mamy teraz dwie możliwości:

- $\vec{J}^2$  i  $J_3$  tworzą ZZOK. Wektor  $|j m\rangle$  jest wyznaczony jednoznacznie,  $\dim \mathcal{E}(j, m) = 1$ .
- $\vec{J}^2$  i  $J_3$  nie tworzą ZZOK. Trzeba dobrać jakiś inny operator, który komutuje z  $\vec{J}^2$  i z  $J_3$  tworząc wspólnie z nimi ZZOK. Wówczas podprzestrzeń  $\mathcal{E}(j, m)$  ma wymiar  $\dim \mathcal{E}(j, m) = g(j, m)$ , odpowiadający ilości różnych wartości własnych dodatkowego operatora (mówimy tu skrótowo o jednym operatorze, ale w razie potrzeby dobieramy ich tyle, żeby utworzyć ZZOK). W tej podprzestrzeni budujemy bazę  $|\alpha, j, m\rangle$ , gdzie  $\alpha$  numeruje wartości własne dodatkowego operatora. Baza ta jest ortonormalna

$$\langle \alpha', j, m | \alpha, j, m \rangle = \delta_{\alpha' \alpha} \quad (12.58)$$

Dowolny wektor z podprzestrzeni  $\mathcal{E}(j, m)$  można więc przedstawić w bazie

$$|\phi\rangle \in \mathcal{E}(j, m) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{g(j, m)} C(\alpha) |\alpha, j, m\rangle, \quad (12.59)$$

gdzie zwracamy uwagę, że zakres zmienności parametru  $\alpha$  zależy na ogół od  $j$ .

Idąc dalej, stosujemy do wektorów  $|\alpha, j m\rangle$  operatory  $J_{\pm}$ . W ten sposób (po unormowaniu) dostajemy wektory  $|\alpha, j m \pm 1\rangle$  należące do odpowiednio do podprzestrzeni  $\mathcal{E}(j, m \pm 1)$  i tworzące bazę w tych podprzestrzeniach. Ponieważ operatory  $J_{\pm}$  przyporządkowują wektorom  $|\alpha, j m\rangle$  wektory  $|\alpha, j m \pm 1\rangle$  w sposób jednoznaczny, więc wnioskujemy, że wymiar podprzestrzeni  $\mathcal{E}(j, m \pm 1)$  nie ulega zmianie:  $\dim \mathcal{E}(j, m \pm 1) = g(j, m)$ . Oczywiście możemy dalej stosować  $J_{\pm}$  tworząc  $\mathcal{E}(j, m \pm 2)$ . Kontynuując taką procedurę dojdziemy do  $\mathcal{E}(j, \pm j)$ , każda o wymiarze  $g(j, m)$ . Wynika stąd, że wymiar podprzestrzeni  $\mathcal{E}(j, m)$  nie zależy od liczby kwantowej  $m$

$$\dim \mathcal{E}(j, m) = g(j). \quad (12.60)$$

Rozważania te ilustruje poniższa tabela. Każdą kolumnę stanowią wektory z jednej podprzestrzeni  $\mathcal{E}(j, m)$ . Wektory te mają te same liczby kwantowe  $j$  i  $m$  zaś różnią się liczbami  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{g_j}$ .

$\mathcal{E}(j, -j)$		$\mathcal{E}(j, -j + 1)$		$\dots$		$\mathcal{E}(j, j)$
$ \alpha_1, j, -j\rangle$	$\xrightarrow{J_+}$	$ \alpha_1, j, -j + 1\rangle$	$\xrightarrow{J_+}$	$\dots$	$\xrightarrow{J_+}$	$ \alpha_1, j, j\rangle$
$ \alpha_2, j, -j\rangle$	$\xrightarrow{J_+}$	$ \alpha_2, j, -j + 1\rangle$	$\xrightarrow{J_+}$	$\dots$	$\xrightarrow{J_+}$	$ \alpha_2, j, j\rangle$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$ \alpha_{g(j)}, j, -j\rangle$	$\xrightarrow{J_+}$	$ \alpha_{g(j)}, j, -j + 1\rangle$	$\xrightarrow{J_+}$	$\dots$	$\xrightarrow{J_+}$	$ \alpha_{g(j)}, j, j\rangle$

Liczba kwantowa  $m$  zmienia się (co jeden) od  $m_{min} = -j$  do  $m_{max} = j$ , a więc przyjmuje  $(2j + 1)$  wartości. Fakt ten ilustruje liczba kolumn w tabeli, których jest właśnie  $(2j + 1)$ .

### 12.4.2 Reprezentacja standardowa

W powyższych rozważaniach podprzestrzenie  $\mathcal{E}(j, m)$  składały się z wektorów tworzących kolumny w tabeli. Równie dobrze możemy zbudować podprzestrzenie  $\mathcal{E}_\alpha(j)$ , które są rozpięte przez wektory różniące się liczbą  $m$ . Wiersze tabeli przedstawiają więc zbiory wektorów tworzących podprzestrzenie  $\mathcal{E}_\alpha(j)$ . Ponieważ  $\alpha$  i  $j$  są ustalone, więc

$$\dim \mathcal{E}_\alpha(j) = 2j + 1. \quad (12.61)$$

Podprzestrzenie te są niezmiennicze względem operatora  $\vec{J}$ . Operator  $\vec{J}^2$  nie zmienia liczb kwantowych  $j$  i  $m$ . Operatory  $J_1, J_2, J_3, J_\pm$  mogą mieszać wektory o różnych  $m$ , lecz nie zmieniają  $j$ . A więc działanie tych operatorów na wektory z  $\mathcal{E}_\alpha(j)$  przekształca je w inne wektory z tej samej podprzestrzeni

$$\mathcal{E}_\alpha(j) \xrightarrow{J_1, J_2, J_3, J_\pm} \mathcal{E}_\alpha(j). \quad (12.62)$$

W związku z tym operatory  $\vec{J}$  (i ich kombinacje) działające na tej podprzestrzeni można reprezentować za pomocą macierzy  $(2j + 1) \times (2j + 1)$ .

Podprzestrzeń  $\mathcal{E}_\alpha(j)$  jest więc rozpięta przez wektory  $|\alpha, j, m\rangle$  o ustalonych  $\alpha$  i  $j$ . Cała przestrzeń  $\mathcal{E}$  będzie więc sumą takich podprzestrzeni

$$\mathcal{E} = \oplus_j \oplus_{\alpha=1}^{g(j)} \mathcal{E}_\alpha(j) \quad (12.63)$$

Jeszcze raz podkreślamy, że zakres zmienności parametru  $\alpha$  zależy od konkretnej wartości  $j$ . Wektory rozpinające całą przestrzeń tworzą bazę ortonormalną, zatem

$$\langle \alpha', j', m' | \alpha, j, m \rangle = \delta_{\alpha' \alpha} \delta_{j' j} \delta_{m' m}, \quad (12.64)$$

bowiem indeksy  $\alpha, j$  i  $m$  numerują wartości własne obserwabli (operatorów hermitowskich). Wektory  $|\alpha, j, m\rangle$  spełniają także relację zupełności.

$$\sum_j \sum_{\alpha=1}^{g(j)} \sum_{m=-j}^j |\alpha, j, m\rangle \langle \alpha, j, m| = \hat{1}. \quad (12.65)$$

Dowolny wektor  $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$  można w sposób jednoznaczny rozłożyć na wektory bazy

$$|\psi\rangle = \sum_j \sum_{\alpha=1}^{g(j)} \sum_{m=-j}^j C_{jm}(\alpha) |\alpha, j, m\rangle, \quad \text{gdzie} \quad C_{jm}(\alpha) = \langle \alpha, j, m | \psi \rangle. \quad (12.66)$$

Wektory  $|\alpha, j, m\rangle$  są wektorami własnymi obserwabli  $\vec{J}^2$ ,  $J_3$  oraz pewnego  $\hat{A}$  (które komutują parami i tworzą ZZOK). Zatem

$$\vec{J}^2 |\alpha, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\alpha, j, m\rangle \quad (12.67a)$$

$$J_3 |\alpha, j, m\rangle = m \hbar |\alpha, j, m\rangle \quad (12.67b)$$

$$\hat{A} |\alpha, j, m\rangle = a_{\alpha j} |\alpha, j, m\rangle \quad (12.67c)$$

Wartości własne  $a_{\alpha j}$  obserwabli  $\hat{A}$  numerujemy indeksami  $\alpha, j$ , co jest wyrazem zależności tego, ile wartości własnych  $a_{\alpha j}$  odpowiada danemu  $j$ . Sens fizyczny obserwabli  $\hat{A}$  zależy od kontekstu fizycznego. Jeżeli  $\vec{J}^2$  i  $J_3$  stanowią ZZOK, to wówczas  $\alpha \equiv 1$  i  $g(j) \equiv_j 1$ , co oznacza, że dodatkowy parametr jest zbędny i nie wnosi żadnych informacji.

\*\*\*\*\*