Mechanika kwantowa, FTiMS PG, semestr06

Zestaw "0"

1. Niech $f(x)$ i $g(x)$ są elementami przestrzeni Hilberta $L^2[0,1]$. Wyznacz iloczyn skalarny (f,g) oraz normę funkcji f i g, w przypadku, gdy funkcje te określone są następująco
   (a) $f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = -x - 1$
   (b) $f(x) = ix, \quad g(x) = x + i$. Wykaż, że $(f,g) = \overline{(g,f)}$.

2. Wykaż, że podane układy funkcji są ortonormalne/ortogonalne w podanych przestrzeniach
   (a) układ $\left\{\sqrt{2}\sin(n\pi x)\right\}$, $n = 1,2,\dots$ jest ortonormalny w przestrzeni $L^2[0,1]$
   (b) układ $\left\{e^{inx}\right\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ jest ortonormalny w przestrzeni $L^2[-\pi,\pi]$
   (c) wielomiany Legendre'a

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

   są ortogonalne w przestrzeni $L^2[-1,1]$

   Wskazówka: wielomian $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia n, zatem zamiast wykazywać $(P_n(x), P_m(x)) = 0$, przy $n \neq m$, wystarczy pokazać $(P_n(x), x^m) = 0$.

   (d) układ $\left\{\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x)\right\}$, gdzie $H_n(x)$ jest n–tym wielomianem Hermite'a

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

   jest układem ortogonalnym w przestrzeni $L^2(-\infty,\infty)$

3. Operator $\hat{T}^*$ nazywamy sprzężeniem operatora $\hat{T}$ gdy spełnione jest równanie

$$(\hat{T}^* x, y) = (x, \hat{T}y).$$

   Proszę wyznaczyć macierz A^* sprzężoną w powyższym sensie do macierzy $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

   przy czym, należy przyjąć, że elementy macierzowe a_{ij} są znane.
   Co się zmieni w przypadku gdy $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$?

4. Niech przestrzeń $\mathbb{X} \subset L^2[0,1]$ i niech każda funkcja $f \in \mathbb{X}$ spełnia warunek $f(0) = f(1) = 0$. Niech w tak zdefiniowanej przestrzeni określony jest operator

$$T = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}.$$

   Wyznacz sprzężenie operatora T.

5. Proszę pokazać, że funkcje $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ nie należą do przestrzeni Hilberta L^2 funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $(-\infty,\infty)$.