Mechanika kwantowa, FTiMS PG, semestr06

Zestaw I

1. Dany jest operator $\hat{T} = \frac{d}{dx} + x$. Proszę obliczyć $\hat{T}^2$ oraz $\hat{T}^3$.

2. Proszę pokazać, że dla funkcji macierzowej $\hat{F}(M) = e^M$, zachodzi relacja
$$\left(e^M\right)^T = e^{(M^T)}.$$

3. Proszę rozwinąć funkcję operatorową
$$e^{\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}}.$$

4. Dana jest funkcja macierzowa (operatorowa) $\hat{T}(\hat{\sigma}_i) = e^{i\alpha\hat{\sigma}_i}$, gdzie $\alpha$ jest pewnym parametrem. Proszę wyznaczyć $e^{i\alpha\hat{\sigma}_i}$, gdy macierze (operatory) $\hat{\sigma}_i$ są postaci
$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Równaniem charakterystycznym dla danej macierzy $M$ nazywamy równanie postaci
$$\det(M - \lambda 1\!\!1) = \begin{vmatrix} M_{11}-\lambda & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22}-\lambda & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = C_n\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + C_1\lambda + C_0.$$
Proszę wykazać, że współczynniki $C_n$ i $C_{n-1}$ są odpowiednio równe $C_n = (-1)^n$ i $C_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(M)$.

6. Obroty o kąt $\varphi$, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, wokół osi $x$, $y$ i $z$, w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ realizowane są poprzez operatory (macierze) postaci, odpowiednio
$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Proszę
   (a) wyznaczyć $[R_i(\alpha), R_i(\beta)]$ dla dowolnego $i \in \{x, y, z\}$ i dowolnych wartości $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$. Zinterpretować otrzymany wynik,
   (b) pokazać, że $\det(R_i) = 1$, dla każdego $i \in \{x, y, z\}$
   (c) wykazać, że $(R_i(\varphi))^{-1} = \left(R_i(\varphi)\right)^T = R_i(-\varphi)$, dla $i \in \{x, y, z\}$

7. Wyznacz generatory $J_1$, $J_2$ i $J_3$ obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wykorzystaj równanie definiujące generatory
$$R_i(\varphi)\,\mathbf{v} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_i}\,\mathbf{v} = e^{\varphi L_i}\,\mathbf{v},$$
gdzie $i \in \{x, y, z\}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, natomiast $\mathbf{v}$ jest dowolnym wektorem należącym do przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Proszę pokazać, że wyznaczone generatory spełniają związek komutacyjny
$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k.$$

8. Niech dany jest operator $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$. Proszę pokazać, że $\hat{p}/\hbar$ jest generatorem grupy translacji, tzn. że zachodzi
$$e^{ix_0\hat{p}/\hbar}f(x) = f(x + x_0),$$
dla każdej funkcji $f(x)$ rozwijalnej w szereg Taylora.

9. Niech dana jest macierz $2 \times 2$

$$R_{xy} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

reprezentująca w płaszczyźnie $xy$ obrót o kąt $\theta$.
Proszę wyznaczyć

   (a) wartości własne macierzy $R_{xy}$. Jak interpretować fakt, że tylko dla pewnych wartości parametru $\theta$ (jakich?) wartości własne są rzeczywiste? Jak interpretować sytuację, gdy wartości własne są rzeczywiste?
   (b) wektory własne macierzy $R_{xy}$
   (c) transformację podbieństwa $SR_{xy}S^{-1}$ diagonalizującą macierz $R_{xy}$. Wyznaczyć postać takiej macierzy.
   **Podpowiedź:** kolumnami macierzy $S^{-1}$ są wektory własne macierzy $R_{xy}$.

10. Proszę udowodnić następujące własności komutatorów

   (a) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
   (b) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$
   (c) $[\hat{A}^n, \hat{A}] = 0$
   (d) $[e^{\hat{A}}, \hat{A}] = 0$
   (e) $[\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}, \hat{C}] = \alpha[\hat{A}, \hat{C}] + \beta[\hat{B}, \hat{C}], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
   (f) niech $\hat{A}$ i $\hat{B}$ są operatorami hermitowskimi. Wykaż, że komutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ jest antyhermitowski.

11. Dane są operatory położenia $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ oraz pędu $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = (-i\hbar\frac{d}{dx}, -i\hbar\frac{d}{dy}, -i\hbar\frac{d}{dz})$

   (a) wykaż, że zachodzi relacja $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$,
   (b) wykaż, że zachodzi relacja $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, gdzie indeksy $i, j \in \{x, y, z\}$
   (c) wykaż, że zachodzi relacja $[\hat{x}^n, \hat{p}_x] = i\hbar n x^{n-1}$
   (d) niech $f(x)$ jest dowolną funkcją rozwijalną w szereg potęgowy. Wykaż, że zachodzi związek $[f(\hat{x}), \hat{p}_x] = i\hbar\frac{d}{dx}f(\hat{x})$.

12. Niech dane są operatory $\hat{A}$ oraz $\hat{B}$ określone na pewnej przestrzeni Hilberta. Proszę wyznaczyć

   (a) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger$,
   (b) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger$,
   (c) $(\hat{A} + \hat{B})^\dagger$,
   (d) $(a\hat{A} + b\hat{B})^\dagger, \quad a, b \in \mathbb{C}$,
   (e) $(\hat{A}^\dagger\hat{A})^\dagger$,

13. Wykaż, że wartości własne operatora hermitowskiego są rzeczywiste.

14. Wykaż, że wektory własne operatora hermitowskiego, odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

15. Operatory $\hat{x}$ i $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ są operatorami położenia i pędu (w jednym wymiarze). Wykaż, że

   (a) $\hat{x}$ i $\hat{p}_x$ są operatorami hermitowskimi
   (b) dla cząstki poruszającej się w jednym wymiarze operator $\hat{x}\hat{p}_x$ nie jest hermitowski. Z czego to wynika?

Liboff, §4.5

16. Niech w przestrzeni $\mathbb{C}^2$ określony jest operator

$$\hat{T} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sprawdź, że $\hat{T}$ jest hermitowski

(b) Wyznacz wartości własne operatora $\hat{T}$ (rzeczywiste, czy zespolone?),

(c) Wyznacz i znormalizuj wektory własne operatora $\hat{T}$. Czy wektory te są do siebie ortogonalne?

(d) Skonstruuj macierz $\hat{S}$ diagonalizującą $\hat{T}$ i przedstaw diagonalną postać operatora $\hat{T}$

(e) Pokaż, że diagonalizacja nie zmienia śladu i wyznacznika operatora $\hat{T}$.

17. Czy istnieją skończenie wymiarowe macierze $\hat{A}$ i $\hat{B}$ spełniające związek komutacyjny $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar$?

Brojan, Mostowski, Wódkiewicz, *Zbi r zadań..., 47*

18. Udowodnij następujące relacje operatorowe

(a) $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}\Big[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]\Big] + \dots$

(b) formułę Bakera–Hausdorffa: $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$, prawdziwą, gdy spełnione są warunki $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]$.

19. Dane jest zagadnienie na wartości własne operatora $\hat{A}$

$$\hat{A}\varphi_n \quad = \quad a_n\varphi_n,$$

gdzie $\{\varphi_n\}$ i $\{a_n\}$ stanowią odpowiednio zbiór funkcji własnych i wartości własnych operatora $\hat{A}$. Wykaż, że z powyższego równania wynika równanie

$$f(\hat{A})\varphi_n \quad = \quad f(a_n)\varphi_n,$$

przy czym funkcja $f(x)$ jest rozwijalna w nieskończony szereg $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ (rozwinięcie jest analogiczne, gdy argumentem funkcji $f$ jest operator).

Liboff, 3.16

(4) Na przykład, funkcja $e^{i\alpha\sigma_3}$ jest równa

$$e^{i\alpha\sigma_3} \quad = \quad \mathbb{1}\cos\alpha + i\sigma_3\,\sin\alpha.$$

(12a) $\hat{A}$; (12b) $\hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$; (12c) $\hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$; (12d) $a^*\hat{A}^\dagger + b^*\hat{B}^\dagger$; (12e) $\hat{A}^\dagger \hat{A}$.
(9a) wartości własne: $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$
(9b) wektory własne:

$$v^{(1)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad v^{(2)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad t \neq 0$$

(9c) macierze $S$, $S^{-1}$ mają postać

$$S \quad = \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Transformacja podobieństwa daje diagonalną postać macierzy obrotu

$$SR_{xy}S^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(16) Zdiagonalizowana postać operatora $\hat{T}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$