Mechanika kwantowa, FTiMS PG, semestr05

Zestaw 2

1. Wykorzystując równanie Schrödingera w jednym wymiarze, wyprowadź kwantowe równanie ciągłości i zinterpretuj występujące w nim wielkości. Pokaż, że jednowymiarowa gęstość prądu prawdopodobieństwa opisana jest równaniem

$$j_x = \frac{\hbar}{2mi}\Big(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\Big).$$

   Jaka jest postać gęstości prądu prawdopodobieństwa w przypadku gdy $\psi(x,t)$ jest wielkością rzeczywistą?
   Podaj klasyczny przykład równania ciągłości i zinterpretuj je.

2. Niech $p_{ab}(t)$ jest prawdopodobieństwem znalezienia cząstki w jednowymiarowym obszarze $a < x < b$, w chwili czasu t.
   Pokaż, że

$$\frac{dp_{ab(t)}}{dt} = j(a,t) - j(b,t),$$

   gdzie $j(x,t)$ jest gęstością prądu prawdopodobieństwa.

3. Rozpatrzmy cząstkę niestabilną poruszającą się w jednowymiarowym obszarze $-\infty < x < \infty$, która po upływie określonego czasu może ulec spontanicznemu rozpadowi (anihilacji). W takim przypadku całkowite prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przestrzeni nie jest zachowane (zmienia się w czasie).
   Do opisu cząstek tego typu stosuje się potencjały postaci

$$V(x) = V_r(x) - iV_i, \qquad V_i = const. \in \mathbb{R}, \qquad V_r(x) \in \mathbb{R}$$

   Pokaż, że istotnie, w takim przypadku całkowite prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przestrzeni nie jest zachowane i maleje eksponencjalnie z czasem jak $e^{-2V_i t/\hbar}$.

4. Wykaż, że dla jednowymiarowej *funkcji falowej* postaci

$$\psi(x,t) = A\, e^{iF(x,t)}, \qquad A = const. \in \mathbb{C}, \qquad F(x,t) \in \mathbb{R}$$

   gęstość prądu jest równa $j(x,t) = \frac{\hbar}{m}|A|^2\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$.

5. Dana jest funkcja falowa postaci

$$\psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t},$$

   gdzie A, λ, ω są stałymi rzeczywistymi.
   Znormalizuj funkcję $\psi(x,t)$ oraz wyznacz wartości oczekiwane operatorów $\hat{x}$ oraz $\hat{x}^2$.