Zestaw 3

1. Stosując metodę separacji zmiennych, rozwiąż równanie Schrödingera dla cząstki swobodnej. Co można powiedzieć o energii takiej cząstki (czy widmo energii jest ciągłe, czy dyskretne)?

   (a) Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa $\rho = |\psi(x,t)|^2$ dla cząstki swobodnej. Czy ρ jest funkcją czasu?

   (b) Wyznacz gęstość prądu prawdopodobieństwa $j_x(x,t)$

   (c) Pokaż, że $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)dx \to \infty$. Czy uzyskane rozwiązanie $\psi(x,t)$ może zatem reprezentować fizyczny stan cząstki? Dlaczego?

2. Proszę pokazać, że funkcja

$$\psi(x,t) \quad = \quad A\, e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \omega = \hbar k^2/2m, \qquad A = const.$$

jest rozwiązaniem jednowymiarowego równania Schrödingera ($V(x) \equiv 0$)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \quad = \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t),$$

a następnie pokazać, że ogólne rozwiązanie powyższego równania zapisać można w postaci pakietu falowego, tj. jako superpozycję fal płaskich

$$\psi(x,t) \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\, e^{i(kx-\omega t)},$$

gdzie $A(k)$ jest tzw. profilem paczki falowej.

3. Proszę pokazać, że równanie Schrödingera zachowuje warunek unormowania funkcji falowej, tzn. że dla funkcji falowej spełniającej równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \quad = \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t),$$

wyrażenie $\int dx\, |\psi(x,t)|^2$ jest stałe w czasie.

4. Proszę pokazać, że profil $A(k)$ paczki falowej

$$\psi(x,t) \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}, \tag{1}$$

przedstawić można jako transformatę Fouriera paczki falowej $\psi(x,t)$ w chwili $t=0$, tzn.

$$A(k) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\psi(x,0).$$

5. Stosując metodę separacji zmiennych, ogólną postać rozwiązania $\psi(x,t)$ równania Schrödingera można zapisać w postaci

$$\psi(x,t) \;=\; \varphi(x)T(t) \;=\; \varphi(x)e^{-iEt/\hbar},$$

gdzie E jest stałą separacji i jest interpretowana jako energia układu fizycznego. Pokaż, że dla rozwiązań normowalnych do jedności (a więc mających interpretację fizyczną), konieczne jest by $E \in \mathbb{R}$.
Wskazówka: Wystarczy zapisać E w postaci $E = E_0 + i\beta$, gdzie $\beta \in \mathbb{R}$, a następnie pokazać, że dla spełnienia warunku $\int dx\, |\psi(x,t)|^2 = 1$ konieczne jest by $\beta \equiv 0$.

6. Dana jest cząstka o masie m poruszająca się w polu siły o potencjale opisanym wzorem

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,a], \\ \infty, & x \notin [0,a] \end{cases}$$

   (a) Pokaż, że w obszarze w którym $V(x) \to \infty$ funkcja falowa jest równa zero, tzn. $\varphi(x) = 0$
   (b) Wyznacz dozwolone energie E_n oraz funkcje falowe $\psi_n(x,t) = \varphi_n(x)T_n(t)$ omawianej cząstki
   (c) Unormuj funkcje $\varphi_n(x,t)$
   (d) Pokaż, że rozwiązania $\varphi_n(x)$ są naprzemiennie parzyste i nieparzyste względem środka studni potencjału $V(x)$
   (e) Pokaż, że rozwiązania są wzajemnie ortogonalne, tzn. $(\psi_n, \psi_m) = 0$ dla $m \neq n$. Co można powiedzieć o widmie energii (zdegenerowane/niezdegenerowane)?

7. Rozwiąż równanie Schrodingera dla cząstki w nieskończonej studni potencjału, przyjmując, że $E = 0$. Pokaż, że nie ma akceptowalnych fizycznie rozwiązań takiego zagadnienia, ponieważ funkcja falowa będąca rozwiązaniem równania, nie spełnia postawionych warunków brzegowych (jakich?).

8. Rozpatrz cząstkę o masie m, poruszającą się w polu siły o potencjale opisanym wzorem

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-a/2, a/2], \\ \infty, & x \notin [-a/2, a/2]. \end{cases}$$

   Wyznacz poziomy energetyczne E_n oraz unormowane funkcje falowe $\varphi_n(x)$ cząstki. Czy dozwolone poziomy energetyczne uzyskane w tym przypadku różnią się od dozwolonych poziomów energetycznych uzyskanych w zadaniu (6b)? Z czego to wynika?

9. Wyznacz poziomy energetyczne cząstki o masie m poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < -a/2, \\ -V_0, & |x| < a/2, \\ 0, & x > a/2. \end{cases}$$

   Od czego i w jaki sposób zależy liczba poziomów energetycznych cząstki w takiej studni potencjału?

10. Wyznacz współczynniki przejścia T oraz odbicia R cząstki od prostokątnego progu potencjału

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x \geq 0. \end{cases}$$

   Rozpatrz dwa przypadki
   (a) $E > V_0$,
   (b) $E < V_0$.

11. Wyznacz współczynniki przejścia T i odbicia R cząstki od prostokątnej bariery potencjału

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x \in [0,a], \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

   Pokaż, że minimalna wartość współczynnika przejścia jest równa $T_{min} = \left(1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\right)^{-1}$. Dla jakich wartości a wartość T jest maksymalna?
   W zadaniu rozpatrz tylko sytuację gdy $E > V_0$.

12. Wykaż, że współczynniki odbicia dla dwóch prostych potencjałów schodkowych V_1 i V_2

$$V_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x > 0, \end{cases} \quad , \quad V_2(x) = \begin{cases} V_0, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

   są równe.
   Przyjmij, że cząstka została wyemitowana przez źródło znajdujące się w $x \to -\infty$, a jej energia E spełnia nierówność $E > V_0$.