Zestaw 5

1. Stosując metodę algebraiczną (faktoryzacji) wyznacz dozwolone funkcje falowe i dozwolone poziomy energetyczne jednowymiarowego, prostego kwantowo–mechanicznego oscylatora harmonicznego.

2. Wyznacz dozwolone funkcje falowe i odpowiadające im poziomy energetyczne kwantowo–mechanicznego oscylatora harmonicznego korzystając z metody Frobeniusa (rozwinięcia w szereg potęgowy).

3. Podaj treść twierdzenia wirialnego i sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że twierdzenie to jest słuszne dla oscylatora harmonicznego w stanie podstawowym.

4. Korzystając z twierdzenia wirialnego można pokazać, że średnie energie kinetyczna i potencjalna oscylatora harmonicznego w dowolnym stanie własnym spełniają równanie $\langle T\rangle_n = \langle V\rangle_n$, gdzie indeks n oznacza średnie wyznaczone w stanie n–tym.
   Korzystając z tego faktu wykaż, że $\langle \hat{p}^2\rangle = \hbar\omega m\big(n+\frac{1}{2}\big)$ oraz $\langle \hat{x}^2\rangle_n = \frac{\hbar}{m\omega}\big(n+\frac{1}{2}\big)$.
   Pokaż też, że współrzędne i pędy oscylatora harmonicznego w dowolnym stanie własnym spełniają zasadę Heisenberga.

5. Stosując metodę Frobeniusa (rozwinięcia w szereg potęgowy) wyznacz rozwiązania następujących równań różniczkowych

   (a) równanie oscylatora harmonicznego $\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \omega^2 y(x) = 0$,

   (b) $4x\frac{d^2}{dx^2}y + 2\frac{d}{dx}y - y = 0$, w okolicu punktu $x = 0$.

   patrz np. rozdział 2.5, w A. Lenda, *Wybrane rozdziały Matematycznych Metod Fizyki*, Wyd. AGH 2004, dostępna też pod adresem http://www.ftj.agh.edu.pl/∼lenda/mmf23.html

6. Zadania **59–62** w [1].

7. Niech $f(\hat{a})$ i $g(\hat{a}^\dagger)$ są rozwijalnymi w szereg funkcjami odpowiednio operatorów anihilacji i kreacji. Wykaż, że w takim przypadku zachodzą relacje

$$[\hat{a}, g(\hat{a}^\dagger)] = \frac{d\,g(\hat{a}^\dagger)}{d\hat{a}^\dagger}, \qquad [\hat{a}^\dagger, f(\hat{a})] \quad = \quad -\frac{d\,f(\hat{a})}{d\hat{a}}.$$

8. Zadania **66–69**, **71** w [1].

9. Wykaż, że unormowane funkcje falowe oscylatora harmonicznego można przedstawić w postaci

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n\varphi_0(x) \qquad \to \qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

   gdzie $\varphi_0(x)$ jest funkcją falową stanu podstawowego.
   Wskazówka: Należy wyznaczyć $\mathcal{N} = \langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = \langle(\hat{a}^\dagger)^n\varphi_n|(\hat{a}^\dagger)^n\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n|(\hat{a})^n\,(\hat{a}^\dagger)^n|\varphi_n\rangle$ wykorzystując udowodnione wcześniej relacje spełniane przez operatory kreacji i anihilacji. Stan $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}}|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}}|n\rangle$ jest stanem unormowanym do jedności.

10. Operatory kreacji i anihilacji zdefiniowane są następująco

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\big(m\omega\hat{x} - i\hat{p}\big), \qquad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\big(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\big).$$

   Skonstruuj ogólne zagadnienie na wartości własne dla powyższych operatorów i udowodnij, że

   (a) operator kreacji $\hat{a}^\dagger$ nie posiada normowalnych stanów własnych

(b) operator anihilacji $\hat{a}$ posiada normowalne stany własne. Znajdź jawną postać takich stanów.

11. Udowodnij następujące własności i równania spełniane przez operator przesunięcia $\hat{D}(z) = \exp\left(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}\right)$, gdzie $z \in \mathbb{C}$

    (a) operator $\hat{D}(z)$ jest operatorem unitarnym

    (b) $\hat{D}(z) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{x} - x_0\hat{p})\right), \qquad x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\mathrm{Re}(z), \quad p_0 = \sqrt{2m\omega\hbar}\,\mathrm{Im}(z)$

    (c) $[\hat{a}, \hat{D}(z)] = z\hat{D}(z)$

    (d) $[\hat{a}^\dagger, \hat{D}(z)] = z^*\hat{D}(z)$

    (e) $\hat{D}^\dagger(z)\hat{a}\hat{D}(z) = \hat{a} + z$

    (f) $\hat{D}^\dagger(z)\hat{a}^\dagger\hat{D}(z) = \hat{a}^\dagger + z^*$

    (g) $\hat{D}(z)\hat{a}^\dagger\hat{D}^\dagger(z) = \hat{a}^\dagger - z^*$ oraz $\hat{D}(z)\hat{a}\hat{D}^\dagger(z) = \hat{a} - z^*$. Własności te należy dowieść korzystając z faktu unitarności operatora $\hat{D}(z)$ oraz odpowiednio równań (11f) i (11e)

12. Stan koherentny $|z\rangle = \hat{D}(z)|0\rangle$, $z \in \mathbb{C}$ powstający przez działanie operatora przesunięcia $\hat{D}(z)$ na stan podstawowy $|0\rangle$ oscylatora harmonicznego jest stanem własnym operatora anihilacji $\hat{a}$.

    (a) Udowodnij, że stany $|z\rangle$ są stanami własnymi operatora $\hat{a}$. Wyznacz wartości własne odpowiadające takim stanom.

    (b) Operator $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ jest tzw. operatorem liczby cząstek (*liczby wzbudzeń*). Wykaż, że średnie takiego operatora w stanie koherentnym $|z\rangle$ spełniają relacje

$$\begin{aligned} \langle z|\hat{N}|z\rangle &= |z|^2 =: \langle n\rangle, \\ \langle z|\hat{N}^2|z\rangle &= |z|^2\left(|z|^2 + 1\right) = \langle n\rangle^2 + \langle n\rangle. \end{aligned}$$

    Wskazówka: W rachunku należy wykorzystać m. in. fakt ortogonalności stanu podstawowego i kolejnych stanów wzbudzonych oscylatora harmonicznego.

13. Przyjmuje się, że kwantowe stany koherentne są najbliższe stanom klasycznym (nie–kwantowym) w tym sensie, że minimalizują zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Wykaż, że istotnie położenia i pędy oscylatora w stanie koherentnym spełniają relację

$$\sigma_z^2(\hat{x})\sigma_z^2(\hat{p}) = \frac{\hbar^2}{4},$$

    gdzie $\sigma_z^2(\cdot)$ jest wariancją wyznaczoną w stanie koherentnym.

14. Zadanie **77** w [1].

Literatura:

[1] J. B. Brojan, J. Mostowski, K. Wódkiewicz, *Zbiór zadań z mechaniki kwantowej*, rozdz. 1.

[2] np. skrypt S. Kryszewski, *Mechanika kwantowa. Skrypt kursu podstawowego*, do pobrania pod adresem http://iftia9.univ.gda.pl/~sjk/QM/indexQM.html