MOMENT MAGNETYCZNY ELEKTRONU

Płaska pętla przewodząca przez którą płynie prąd I wytwarza moment magnetyczny

$$\mu = IA$$

gdzie A jest powierzchnią zamkniętą wewnątrz pętli.

Elektron ma moment magnetyczny proporcjonalny do spinowego momentu pędu

$$\hat{\mu} = \frac{e}{mc}\hat{S} = \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\sigma} =$$

$$= -\mu_B\hat{\sigma}$$

μ_B - magneton Bohra

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

$$\mu = -\mu_0 \hat{\sigma} = -2 \frac{\mu_0}{\hbar} \hat{S}$$

W statym jednorodnym polu magnetycznym

$$\hat{N} = \hat{\mu} \times \hat{B}$$

PRECESJA ELEKTRONU W POLU MAGNETYCZNYM

Początkowo elektron jest w stanie

$$\zeta(0) = \alpha_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jaką postać ma $\zeta(t)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\zeta = \hat{H} \zeta$$

Hamiltonianem jest energia oddziaływania

$$\hat{H} = -\hat{\mu}\cdot\vec{B} = +\mu_B\,\hat{\sigma}\cdot\vec{B} =$$
$$= \mu_B\, B\,\hat{\sigma}_z$$

$$\hat{H} = \mu_B\, B\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

szukamy rozwiązania w postaci

$$\xi(t) = \begin{bmatrix}a(t)\\ b(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{a}\\ \dot{b}\end{bmatrix} = -\frac{i\Omega}{2}\begin{bmatrix}a\\ -b\end{bmatrix}$$

$\frac{\Omega}{2}$ - częstość Larmora $\Omega = \frac{|e|B}{mc}$

$$\dot{a} = -\frac{i\Omega}{2} a$$

$$\dot{b} = +\frac{i\Omega}{2} b$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \\ e^{i\frac{\Omega}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$\xi(0) = \alpha_x$$

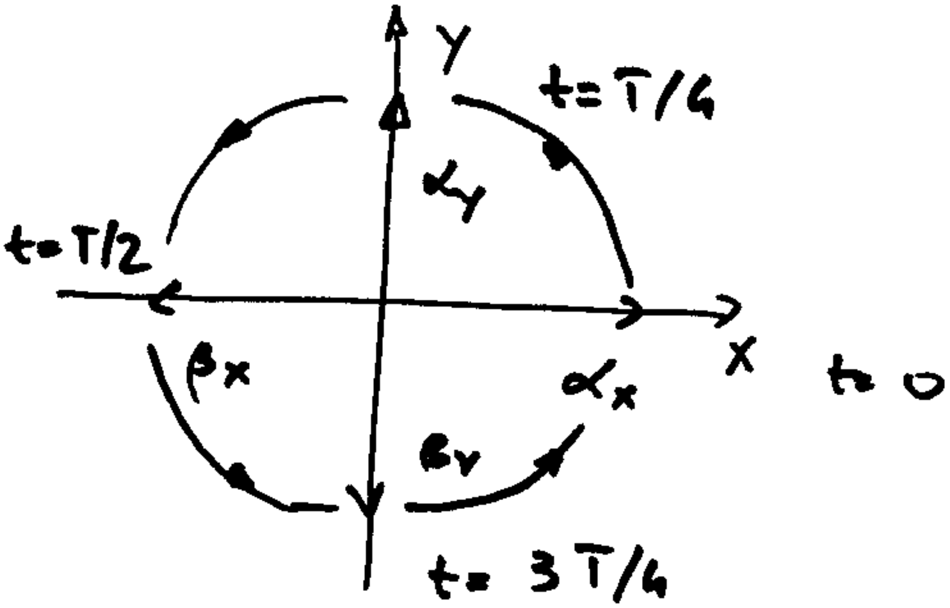
$$\xi(T/4) = e^{-i\pi/4} \alpha_y$$

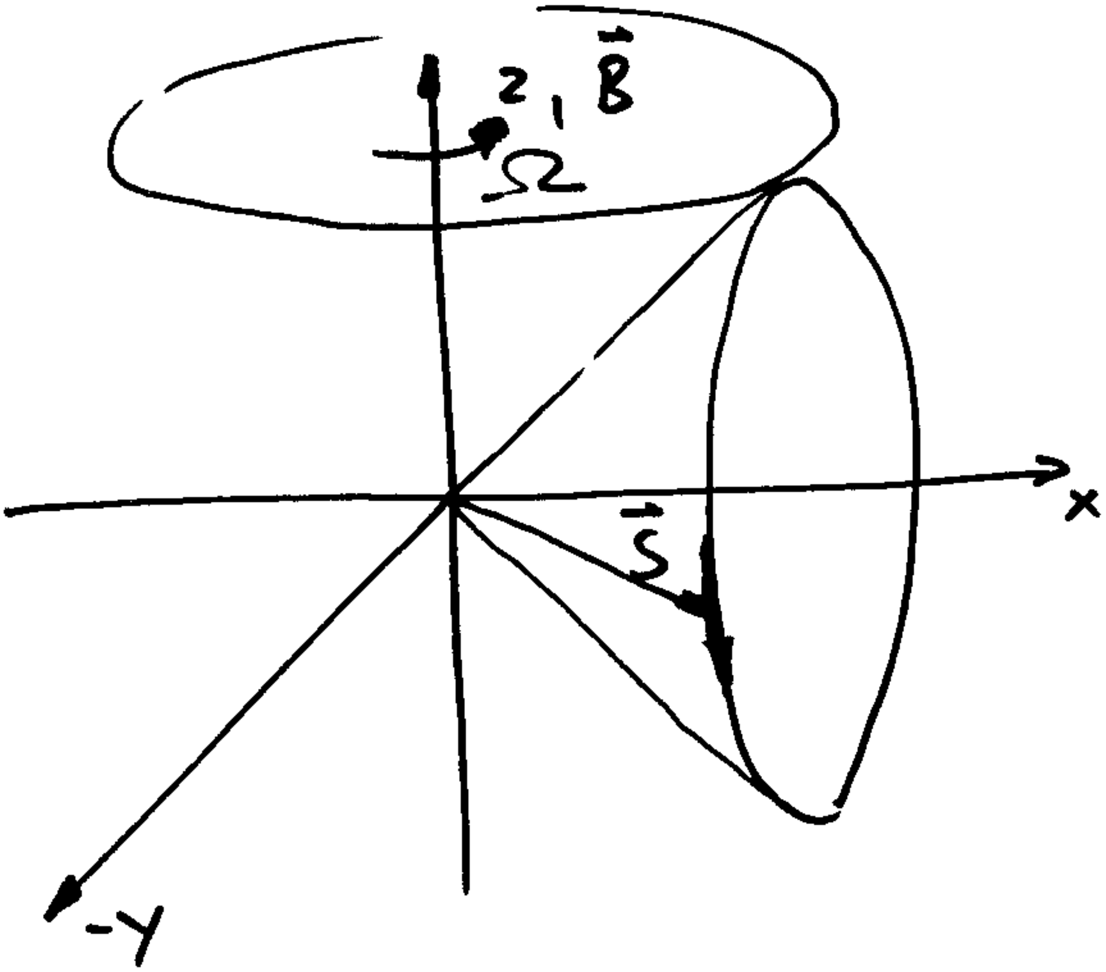
$$\xi(T/2) = e^{-i\pi/2} \beta_x$$

$$\xi(3T/4) = e^{-i3\pi/4} \beta_y$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Spin elektronu dokonuje precesji wokół osi z z częstością kątową Ω





Energie własne

$$\hat{H}\xi = E\xi$$

$$\hat{H} = \mu_b B \hat{\sigma}_z$$

$$\xi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\mu_b B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$(\mu_b B - E)\, a = 0$$

$$(\mu_b B + E)\, b = 0$$

Jeżeli $a \neq 0$ to $E = \mu_b B \wedge b = 0$

Jeżeli $b \neq 0$ to $E = -\mu_b B \wedge a = 0$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \mu_b B = \frac{\hbar\Omega}{2}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = -\mu_b B = -\frac{\hbar\Omega}{2}$$

REZONANS MAGNETYCZNY (7)

$$\hat{\mu} = -2\left(\frac{\mu_b}{\hbar}\right)\hat{S}$$

$$\mu = g\left(\frac{\mu_b}{\hbar}\right)\hat{S}$$

$g = -2$

dla cząstek jądrowych (proton, neutron) $\mu_b \Rightarrow \mu_N$

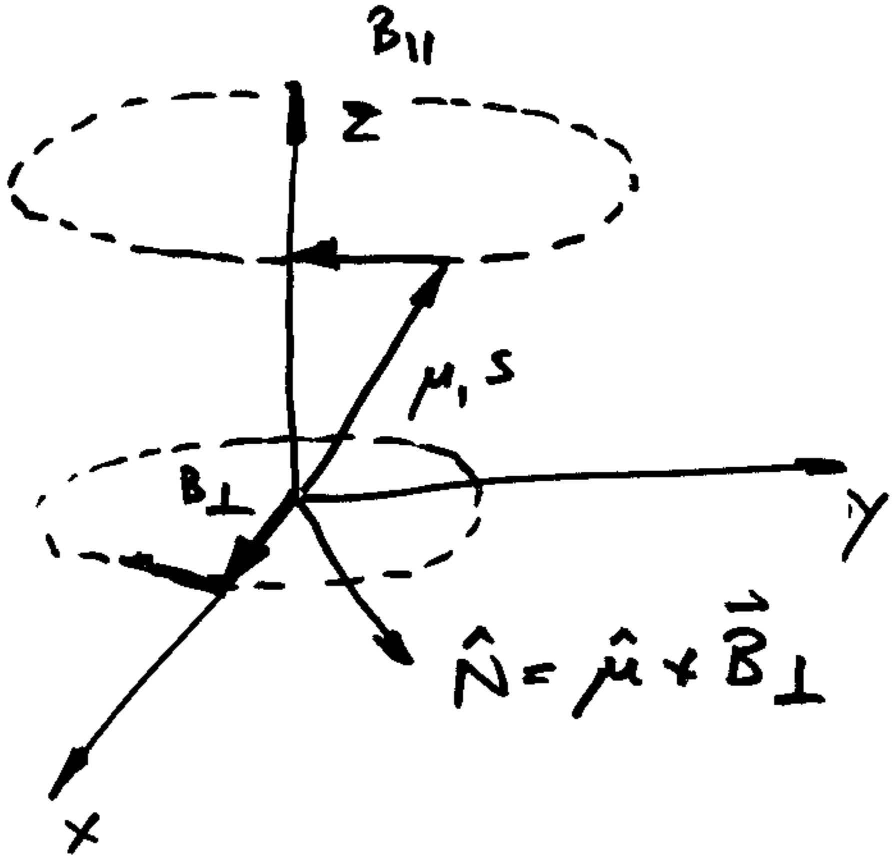
$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p c}$$

M_p – masa protonu

$$\hat{\mu} = g\left(\frac{\mu_N}{\hbar}\right)\hat{S}$$

dla protonu $g = 2\cdot(2{,}79)$

dla neutronu $g = 2\cdot(-1{,}91)$



cząstka o spinie $\frac{1}{2}$

$\vec{B}$ ma trzy składowe

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\frac{g\mu_N}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$- i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{g\mu_N}{2} B_y \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$- \frac{g\mu_N}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} B_z \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$B_x = B_{\perp} \cos\omega t \quad B_y = -B_{\perp} \sin\omega t \quad B_z = B_{\parallel}$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = i\left(\Omega_\perp b e^{i\omega t} + \Omega_\parallel a\right)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = i\left(\Omega_\perp a e^{-i\omega t} - \Omega_\parallel b\right)$$

$$2\hbar \Omega_\perp = g\mu_N B_\perp$$

$$2\hbar \Omega_\parallel = g\mu_N \Omega_\parallel$$

szukamy rozwiązań przy warunkach początkowych $a=1$ $b=0$ $t=0$ w postaci

$$a = \bar{a}\, e^{i\omega_a t}$$

$$b = \bar{b}\, e^{i\omega_b t}$$

$$\begin{bmatrix} (\omega_a - \Omega_\parallel) & -\Omega_\perp e^{-i\phi t} \\ -\Omega_\perp e^{i\phi t} & (\omega_b + \Omega_\parallel) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = 0$$

$$\phi \equiv \omega_a - \omega_b - \omega$$

Aby $\bar{a}$ i $\bar{b}$ były niezależne od czasu $\phi = 0$

$$\omega_a = \omega_b + \omega$$

r-nie

$$\omega_b = -\frac{\omega}{2} \pm \bar{\omega}$$

$$\omega_a = \frac{\omega}{2} \pm \bar{\omega}$$

$$\bar{\omega}^2 \equiv \left(\Omega_{\parallel} - \frac{\omega}{2}\right)^2 + \Omega_{\perp}^2$$

r-nie ogólne

$$b(t) = b_1 \exp\left[-i\left(\frac{\omega}{2} - \bar{\omega}\right)t\right] + b_2 \exp\left[-i\left(\frac{\omega}{2} + \bar{\omega}\right)t\right]$$

ale warunek brzegowy $b(0) = 0$ $\Rightarrow$

$$b_1 = -b_2 = C/2i$$

Stąd

$$b(t) = C \sin \bar{\omega} t \, e^{-i(\omega/2)t}$$

$$C = \frac{i \Omega_\perp}{\bar{\omega}} \quad \left(\begin{matrix} \text{wyznaczamy dla} \\ t=0 \quad a(0)=1 \end{matrix} \right)$$

$$|\xi\rangle = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega}} \begin{bmatrix} e^{i(\omega/2)t} \left[i(\Omega_\parallel - \omega/2) + \bar{\omega} \operatorname{ctg} \bar{\omega} t \right] \\ i e^{-i(\omega/2)t} \Omega_\perp \end{bmatrix}$$

$$\langle \xi(0) | \xi(0) \rangle = |a(0)|^2 + |b(0)|^2 = 1$$

ale warunek normalizacji musi być spełniony w dowolnej chwili czasu

$$|a|^2 + |b|^2 = \frac{\sin^2 \bar{\omega}(t)}{\bar{\omega}^2} \left[\left(\Omega_\parallel - \frac{\omega}{2} \right)^2 + \Omega_\perp^2 \right] +$$
$$+ \cos^2 \bar{\omega} t$$

$$\langle \xi(t) | \xi(t) \rangle = \sin^2 \bar{\omega} t + \cos^2 \bar{\omega} t = 1$$

$\Downarrow$

Normalizacja O.K.

$$|b(t)|^2 = \sin^2 \bar{\omega} t \left[\frac{\Omega_\perp^2}{(\Omega_{\parallel} - \omega/2)^2 + \Omega_\perp^2} \right]$$

Ze zbioru spinów, które wszystkie skierowane są w kierunku $+z$ w chwili $t=0$, w chwili t ułamek spinów równy $|b(t)|^2$ będzie miał kierunek $-z$.

Maksymalna liczba spinów zmieni kierunek dla częstości rezonansowej

$$\omega = 2\Omega_{\parallel} = \frac{g \mu_N B_{\parallel}}{\hbar}$$