

M. M. Smirnow

Walt

**ZADANIA
Z RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH
CZĄSTKOWYCH**

Wydanie trzecie

Pw

Warszawa 1976

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Dane oryginału:

М. М. СМІРНОВ

Задачи по уравнениям математической физики

Издательство „Наука”

Москва 1968

Тłumaczył

RYSZARD BITTNER

Okładkę projektowała

IZABELA KULCZYŃSKA-PAŁDOWA

Drukarnia Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu

PRZEDMOWA

Niniejszy zbiór zadań stawia sobie za cel ilustrację treści teoretycznej wykładu pt. *Równania różniczkowe fizyki matematycznej*.

Wszystkie zadania podzielono na trzy paragrafy. W paragrafie pierwszym umieszczono zadania wprowadzające, związane ze sprowadzaniem równania do postaci kanonicznej. W paragrafie drugim umieszczono zadania, w których należy znaleźć ogólne rozwiązanie równania, rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego lub zagadnienie Goursata, a także zagadnienie mieszane metodą charakterystyk. Trzeci paragraf jest podstawowy. Zebrano tu zadania, w których należy rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych bądź zagadnienie mieszane (dla równań hiperbolicznych i parabolicznych), bądź zagadnienie brzegowe (dla równań eliptycznych).

Do wszystkich zadań podano odpowiedzi. Większość zadań jest zaopatrzona wskazówkami, co daje możliwość posługiwania się zbiorem samodzielnie.

ZADANIA

§1. SPROWADZANIE DO POSTACI KANONICZNEJ RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH W PRZYPADKU DWÓCH ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH

Mówimy, że równanie

$$(1) \quad a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

ma typ *hiperboliczny* (jest typu *hiperbolicznego*), jeżeli $b^2 - ac > 0$, typ *paraboliczny* (typu *parabolicznego*), jeżeli $b^2 - ac = 0$, i typ *eliptyczny* (typu *eliptycznego*), jeżeli $b^2 - ac < 0$; a , b i c są tu funkcjami zmiennych x i y , mającymi ciągle pochodne do rzędu drugiego włącznie.

Aby sprowadzić równanie (1) do postaci kanonicznej, należy utworzyć równanie charakterystyk

$$(2) \quad a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0,$$

które rozkłada się na dwa równania:

$$(3) \quad a dy - (b + \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0,$$

$$(4) \quad a dy - (b - \sqrt{b^2 - ac}) dx = 0,$$

i znaleźć całki ogólne tych równań.

Równanie typu *hiperbolicznego*: $b^2 - ac > 0$. Całki ogólne $\varphi(x, y) = c_1$, $\psi(x, y) = c_2$ równań (3) i (4) są rzeczywiste i różne, określają one dwie różne rodziny charakterystyk rzeczywistych.

Wprowadzając zamiast zmiennych x, y nowe zmienne niezależne ξ, η :

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

sprowadzamy równanie (1) do postaci

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Jest to *postać kanoniczna równania typu hiperbolicznego*.

Równanie typu *parabolicznego*: $b^2 - ac = 0$. Równania (3) i (4) pokrywają się i otrzymujemy jedną całkę ogólną równania (2): $\varphi(x, y) = c$.

W tym przypadku, przyjmując

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

gdzie $\eta = \eta(x, y)$ jest taką funkcją, że $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ w rozważanym obszarze, sprowadzamy równanie (1) do postaci

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Jest to *postać kanoniczna równania typu parabolicznego*.

Równanie typu *eliptycznego*: $b^2 - ac < 0$. Całki ogólne równań (3) i (4) są zespolone, sprzężone i określają dwie rodziny charakterystyk zespolonych.

Niech całka ogólna równania (3) ma postać

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c,$$

gdzie $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ są funkcjami rzeczywistymi. Przyjmując wówczas

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

sprowadzamy równanie (1) do postaci

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Jest to *postać kanoniczna równania typu eliptycznego*.

W przypadku równania eliptycznego zakładamy, że współczynniki a , b i c są funkcjami analitycznymi.

Zadania

Sprowadzić do postaci kanonicznej następujące równania różniczkowe (zad. 1-11):

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$5. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$6. \operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$7. y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$8. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 4y \frac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0.$$

$$9. (1+x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$10. \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$11. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ gdzie } \alpha = \text{const.}$$

§2. METODA CHARAKTERYSTYK

Zadania

12. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

$$a) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$b) x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (x > 0, y > 0).$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne następujących równań (zad. 13-20):

$$13. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$14. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$15. \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$16. (x-y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$17. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + xy u = 0.$$

$$18. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2zx \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0.$$

$$19. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (a_{11} a_{22} = a_{12}^2),$$

gdzie a_{11} , a_{12} i a_{22} są liczbami dodatnimi.

$$20. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

21. Znaleźć obszary hiperboliczności, eliptyczności i paraboliczności, a także ogólne rozwiązanie równań:

$$a) (1-x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (1+y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$b) (x^2-1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (y^2-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

22. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne istnienia funkcyjno-niezmienniczych rozwiązań równania o stałych współczynnikach:

$$(*) \quad L(u) = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

($\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$), a także ogólne rozwiązanie tego równania.

Funkcję u nazywamy *funkcyjno-niezmienniczym* (fn) *rozwiązaniem* równania (*), jeżeli $F(u)$ jest rozwiązaniem przy dowolnej funkcji F .

23. Dowieść, że jeżeli spełniony jest warunek

$$a_{11}b_2^2 - 2a_{12}b_1b_2 + a_{22}b_1^2 + 4\delta c = 0,$$

to równanie o stałych współczynnikach

$$(*) \quad L(u) + cu = 0$$

ma ogólne rozwiązanie postaci

$$u(x, y) = \exp \left\{ \frac{kx + my}{2\delta} \right\} (\psi_1(\alpha_1 x - y) + \psi_2(\alpha_2 x - y)),$$

gdzie ψ_1 i ψ_2 są dowolnymi funkcjami, $k = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, $m = a_{11}b_2 - a_{12}b_1$, a α_1, α_2 są pierwiastkami równania

$$a_{11}x^2 - 2a_{12}x + a_{22} = 0.$$

Jeżeli podany warunek nie jest spełniony, to należy sprowadzić równanie (2) do postaci

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{c}v,$$

gdzie

$$\bar{c} = \frac{a_{11}(\alpha_1 b_1 - b_2)(\alpha_2 b_1 - b_2) + 4a_{11}c\delta}{16\delta^2},$$

$$\xi = \alpha_1 x - y, \quad \eta = \alpha_2 x - y.$$

24. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = v$$

ma postać

$$v(x, y) = \int_0^x \psi_1(t) J_0(2i\sqrt{y(x-t)}) dt + \\ + \int_0^y \psi_2(t) J_0(2i\sqrt{x(y-t)}) dt + v(0, 0) J_0(2i\sqrt{xy}),$$

gdzie $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ są dowolnymi funkcjami.

25. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$(*) \quad \frac{2x}{2n+1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ma postać

$$u = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\frac{F_1(\sqrt{2(2n+1)x+y}) + F_2(\sqrt{2(2n+1)x-y})}{\sqrt{x}} \right),$$

gdzie F_1 i F_2 są dowolnymi funkcjami.

26. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$(*) \quad \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{n(n+1)}{x^2} u$$

ma postać

$$u = x^n \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left(\frac{\Phi(x-at) + \Psi(x+at)}{x} \right),$$

gdzie Φ i Ψ są dowolnymi funkcjami.

27. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{n}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{m}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ma postać

$$u(x, y) = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \left(\frac{X(x) - Y(y)}{x-y} \right),$$

gdzie $X(x)$ i $Y(y)$ są dowolnymi funkcjami.

28. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{3}{(x-y)^2} u = 0.$$

29. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

($0 < \alpha, \beta < 1, \alpha + \beta \neq 1$) ma postać

$$u(x, y) = (y-x)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \varphi(x+(y-x)t) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt + \\ + \int_0^1 \psi(x+(y-x)t) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt,$$

gdzie φ i ψ są dowolnymi funkcjami.

30. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{n}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{m}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ma postać

$$u(x, y) = (y-x)^{m+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\frac{X(x) - Y(y)}{x-y} \right),$$

gdzie $X(x)$ i $Y(y)$ są dowolnymi funkcjami.

31. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

gdzie

$$a) -m < \beta < -\frac{2m-1}{2}, \quad -n < \alpha < -\frac{2n-1}{2},$$

$$b) -\frac{2m+1}{2} < \beta < -m, \quad -\frac{2n+1}{2} < \alpha < -n,$$

a m i n są liczbami naturalnymi.

32. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2a}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - b^2 u = 0$$

($0 < 2a < 1$), gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą lub urojoną, ma postać

$$u = \int_0^1 \frac{\Phi(x+y(2t-1))}{(t(1-t))^{1-a}} \bar{J}_{a-1}(2by\sqrt{t(1-t)}) dt + \\ + y^{1-2a} \int_0^1 \frac{\Psi(x+y(2t-1))}{(t(1-t))^a} \bar{J}_{-a}(2by\sqrt{t(1-t)}) dt,$$

gdzie

$$\bar{J}_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(1-\nu) z^\nu}{2^\nu} J_{-\nu}(z),$$

a Φ i Ψ są funkcjami dowolnymi.

33. Znaleźć fale tłumione dla równania:

$$a) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4} u,$$

$$b) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u = 0.$$

34. Znaleźć osobliwe rozwiązanie równania:

$$a) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu,$$

$$b) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + cu,$$

które dąży do nieskończoności, jeżeli zmienny punkt dąży do powierzchni stożka charakterystycznego.

35. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0.$$

36. Znaleźć rozwiązanie równania

$$4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1+y^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_1(x).$$

37. Znaleźć rozwiązanie równania

$$(1+x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_1(x).$$

38. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{y=\sin x} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\sin x} = \varphi_1(x).$$

39. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$$

40. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{y=1} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = \varphi_1(x).$$

41. Pokazać, że rozwiązanie równania

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x),$$

dane jest wzorem

$$u = \frac{(h-x+at)f(x-at) + (h-x-at)f(x+at)}{2(h-x)} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{h-z}{h-x} F(z) dz.$$

42. Znaleźć rozwiązanie równania falowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(r),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a $\varphi(r)$ i $\psi(r)$ są funkcjami określonymi dla wszystkich $r \geq 0$ (przypadek symetrii środkowej).

43. Znaleźć rozwiązanie równania

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

($y \geq 0, m > 0$), spełniające warunek Cauchy'ego

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = v(x).$$

44. Znaleźć rozwiązanie równania

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a y^{1-m-1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

($a = \text{const}, y \geq 0, m \geq 2$), spełniające warunki

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = v(x).$$

45. Pokazać, że równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

($y < 0$) ma jednoznaczne rozwiązanie spełniające warunki

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \text{ jest wielkością ograniczoną.}$$

46. Znaleźć rozwiązanie równania

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a y^{m-1} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

($a = \text{const}, 0 < m < 2$), spełniające warunki

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad y^2 \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = v_1(x).$$

47. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2a}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - b^2 u = 0$$

($0 < 2a < 1$), spełniające warunki

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad y^{2a} \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = v(x).$$

48. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = v,$$

spełniające warunki

$$v|_{y=x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{y=x} = \omega_1(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y}|_{y=x} = \omega_2(x),$$

przy czym $\varphi'(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$.

49. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

($a_{11}a_{22} = a_{12}^2$), spełniające warunki początkowe

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x, y).$$

Rozwiązać zadania dla przypadku szczególnego

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad F(x, y) = 0.$$

50. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = v(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{y=0} = v_1(x), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}|_{y=0} = v_2(x).$$

51. Znaleźć rozwiązanie równania

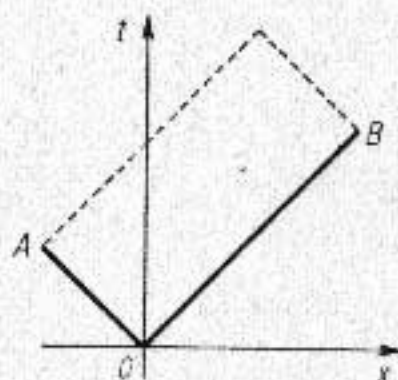
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

znając jego wartości na dwóch łukach charakterystyki (rys. 1):

$u(x, t) = \varphi(x)$ na odcinku OA charakterystyki $t+x=0$,

$u(x, t) = \psi(x)$ na odcinku OB charakterystyki $t-x=0$,

przy czym $\varphi(0) = \psi(0)$.



Rys. 1

52. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

znając jego wartości na dwóch charakterystykach:

$u(x, y) = \varphi(x)$ na charakterystyce $x-y=0$,

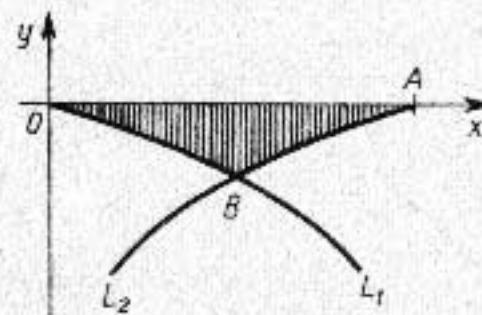
$u(x, y) = \psi(x)$ na charakterystyce $5x-y=0$,

przy czym $\varphi(0) = \psi(0)$.

53. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

($y < 0$), jeżeli znane są wartości rozwiązania na łuku OB (rys. 2) charakte-



Rys. 2

rystyki $L_1: x - 2\sqrt{-y} = 0$ i na łuku AB charakterystyki $L_2: x + 2\sqrt{-y} = 1$:

$u(x, y)|_{L_1} = \varphi_1(x)$, jeżeli $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

$u(x, y)|_{L_2} = \varphi_2(x)$, jeżeli $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

przy czym $\varphi_1(\frac{1}{2}) = \varphi_2(\frac{1}{2})$.

54. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

($y < 0$), jeżeli znane są wartości rozwiązania na dodatniej części osi Ox i na charakterystyce L_1 (rys. 2):

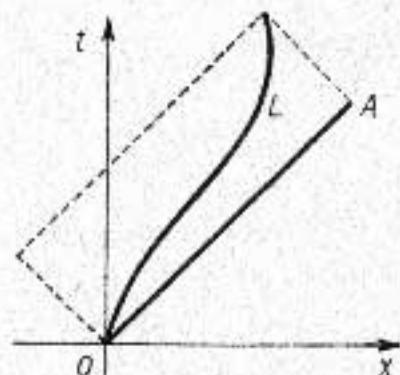
$u(x, y)|_{y=0} = \varphi_1(x)$, $u(x, y)|_{L_1} = \varphi_2(x)$,

przy czym $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

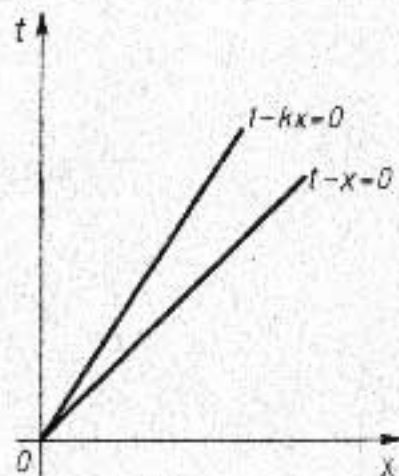
55. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

jeżeli znane są wartości rozwiązania na odcinku OA (rys. 3) charakterystyki $t-x=0$ i na krzywej L , wychodzącej z punktu O i leżącej wewnątrz kąta ograniczonego charakterystykami $t \pm x = 0$, przy czym krzywa L ma tę własność, że każda charakterystyka $t-x=c$ przecina ją w jednym punkcie. Rozważ też przypadek szczególny, gdy L jest prostą $t-kx=0$ ($k>1$).



Rys. 3



Rys. 4

56. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

jeżeli znane są wartości rozwiązania i jego pierwszej pochodnej po normalnej na dodatniej części osi Ox (rys. 4), a także wartości rozwiązania na półprostej $t-kx=0$ ($k>1$):

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (x \geq 0), \quad u|_{t=kx} = \psi(x) \quad (x \geq 0),$$

przy czym $\varphi_0(0) = \psi(0)$.

Znaleźć warunek gładkości rozwiązania w rozważanym obszarze.

57. Obszar drgań początkowych gazu jednorodnego jest kulą o promieniu R . Początkowe prędkości cząsteczek gazu są wszędzie równe zero, a początkowa kondensacja S_0 jest stała wewnątrz kuli i równa zero na zewnątrz jej. Określić kondensację S w dowolnej chwili w punkcie M położonym na zewnątrz obszaru początkowego zaburzenia.

58. Półograniczona struna jednorodna $0 \leq x < +\infty$ o zamocowanym końcu $x=0$ pobudzona została do drgań przez wychylenie początkowe

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq l, \\ -\sin \frac{\pi x}{l} & \text{dla } l \leq x \leq 2l, \\ 0 & \text{dla } 2l \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Podać graficznie kształt struny w chwilach

$$t = \frac{l}{4a}, \frac{l}{a}, \frac{5l}{4a}, \frac{3l}{2a}, \frac{7l}{4a}, \frac{9l}{4a},$$

zakładając, że prędkość początkowa jest równa zero.

59. Półograniczona struna jednorodna $0 \leq x < +\infty$ o zamocowanym końcu $x=0$ leży w położeniu równowagi. W chwili $t=0$ zostaje ona uderzona młoteczkiem o szerokości h w odległości c od punktu zamocowania. Główna młoteczka jest tak skonstruowana, że prędkość początkowa nadana strunie jest maksymalna w środku i równa zero na brzegu główki. Krzywa początkowej prędkości tej części struny ma postać

$$v_0 \cos \frac{\pi}{h}(x-c) \quad \text{dla } |x-c| \leq \frac{h}{2}.$$

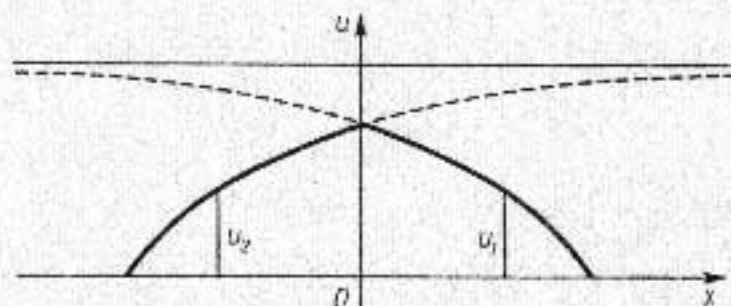
Określić kształt struny w chwili $t>0$.

60. Nieskończenie długa struna $x>0$ o gęstości liniowej ρ i napięciu ρa^2 znajduje się w położeniu równowagi. Przy $t>0$ punkt $x=0$ wykonuje małe drgania $A \sin \omega t$. Pokazać, że przemieszczenie punktu struny o odciętej $x>0$ określone jest wzorem

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < \frac{x}{a}, \\ A \sin \omega \left(t - \frac{x}{a} \right) & \text{dla } t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

61. Rurka półograniczona ($x>0$), wypełniona idealnym gazem, ma na jednym końcu ($x=0$) swobodnie poruszający się tłok o masie M . W chwili

$t=0$ tłok poprzez uderzenie przyjmuje prędkość początkową v_0 . Opisać proces propagacji fali w gazie, jeżeli wiadomo, że wychylenie początkowe i początkowa prędkość cząsteczek gazu są równe zeru.



Rys. 5

62. Struna nieskończona, mająca w punkcie $x=0$ skupioną masę M , znajduje się w położeniu równowagi. W początkowej chwili $t=0$ poprzez uderzenie młoteczka nadano masie M prędkość początkową v_0 . Dowiedzieć, że w chwili $t>0$ struna zaburzona ma kształt wskazany na rysunku 5, gdzie $u_1(x, t)$ jest falą biegnącą w prawo:

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T_0} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{2T_0}{Ma^2} (x - at) \right\} \right) & \text{dla } x - at < 0, \\ 0 & \text{dla } x - at > 0, \end{cases}$$

$u_2(x, t)$ jest falą biegnącą w lewo:

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T_0} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{2T_0}{Ma^2} (x + at) \right\} \right) & \text{dla } x + at > 0, \\ 0 & \text{dla } x + at < 0, \end{cases}$$

a T_0 jest napięciem struny.

63. Jednorodna struna o długości l zamocowana jest na końcach $x=0$ i $x=l$. W chwili początkowej strunę odciągnięto w punkcie $x=\frac{1}{3}l$ na małą odległość h od osi Ox , a następnie puszczono bez nadania jej punktom prędkości początkowej. Pokazać, że kształt struny przy $0 \leq t \leq \frac{1}{3}a$ wyraża

się wzorem

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{3hx}{l} & \text{dla } 0 < x \leq \frac{1}{3}l - at, \\ \frac{3h}{4l}x + \frac{9h}{4l}(\frac{1}{3}l - at) & \text{dla } \frac{1}{3}l - at < x < \frac{1}{3}l + at, \\ \frac{3h}{2l}(l - x) & \text{dla } \frac{1}{3}l + at < x \leq l. \end{cases}$$

64. Wyprowadzić równanie małych drgań podłużnych walcowego pręta i scałkować to równanie przy założeniu, że jeden koniec pręta jest zamocowany, a drugi swobodny.

65. Dany jest nieograniczony pręt walcowy, złożony z dwóch półograniczonych prętów jednorodnych połączonych w punkcie $x=0$. Niech z obszaru $x<0$ po przecie biegnie fala

$$u_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) \quad (t \leq 0).$$

Znaleźć falę odbitą i załamana w chwili $t>0$.

66. Walec o długości l porusza się ruchem postępowym o prędkości v_1 , i styka się z drugim walcem o długości l i prędkości $v_2 < v_1$. Należy określić rozkład prędkości fali podłużnej w jednym i drugim walcu, przyjmując, że przekroje i materiały walców są jednakowe.

67. Jeden koniec pręta walcowego ($x=0$) jest zamocowany, a drugi ($x=l$) jest swobodny. W chwili początkowej $t=0$ koniec swobodny zostaje uderzony ruchomym ciężarem o masie M i prędkości v , skierowanej wzdłuż osi pręta. Znaleźć podłużne drgania pręta w chwili $t>0$.

68. Rozwiązać zadanie 67, gdy koniec $x=0$ jest swobodny.

69. Ciężka bryła o masie M bez prędkości obciąża chwilowo dolny koniec pionowego pręta zamocowanego u góry. Znaleźć drgania podłużne pręta.

70. Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -b(\theta - T), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = a(\theta - T),$$

spełniające warunki

$$\theta|_{x=0}=0, \quad T|_{y=0}=1.$$

71. Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\rho a \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{a}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x},$$

spełniające warunki początkowe

$$u|_{t=0}=0, \quad v|_{t=0}=0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

i warunki brzegowe

$$u|_{x=0}=0, \quad v|_{x=l}=\alpha(t)(1+\beta u)-1 \quad (t \geq 0),$$

gdzie a, β, ρ są stałymi, a $\alpha(t)$ jest daną funkcją.

§3. METODA SEPARACJI ZMIENNYCH

Poszukujemy rozwiązania równania

$$(1) \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x) u$$

(gdzie $p(x), \rho(x)$ i $q(x)$ są funkcjami dostatecznie gładkimi, przy czym $p(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geq 0$), spełniającego warunki brzegowe

$$(2) \quad \alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \gamma u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$$

i warunki początkowe

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

Znajdujemy najpierw nietrywialne rozwiązanie równania (1), spełniające warunki brzegowe (2), w postaci iloczynu

$$(4) \quad u(x, t) = T(t) X(x).$$

Podstawiając wyrażenie (4) do równania (1), otrzymujemy

$$\rho(x) T''(t) X(x) = T(t) \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX}{dx} \right) - q(x) T(t) X(x),$$

czyli

$$\frac{\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX}{dx} \right) - q(x) X(x)}{\rho(x) X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

gdzie λ jest pewną stałą. Wynika stąd, że

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX}{dx} \right) + (\lambda \rho(x) - q(x)) X = 0,$$

$$(6) \quad T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Ponieważ $T(t) \neq 0$, więc warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by funkcja (4) spełniała warunki brzegowe (2), jest spełnienie warunków

$$(7) \quad \alpha X(0) + \beta X'(0) = 0, \quad \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0.$$

Tak więc, w celu określenia funkcji $X(x)$ należy rozwiązać następujące zagadnienie brzegowe dla zwyczajnego równania różniczkowego:

Znaleźć takie wartości λ , nazywane wartościami własnymi, przy których istnieje nietrywialne rozwiązanie równania (5), spełniające warunki brzegowe (7); znaleźć również te rozwiązania nietrywialne, nazywane funkcjami własnymi.

Dowodzi się, że:

1. Istnieje przeliczalny zbiór wartości własnych

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

którym odpowiadają funkcje własne

$$X_1(x), X_2(x), \dots$$

2. Przy $q(x) \geq 0$ oraz $(p(x) X_n(x) X_n'(x))_{x=0}^{x=l} \leq 0$ wszystkie wartości własne λ_n są dodatnie.

3. Funkcje własne tworzą w przedziale $\langle 0, l \rangle$ układ ortogonalny, unormowany z wagą $\rho(x)$:

$$(8) \quad \int_0^l \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{przy } m \neq n, \\ 1 & \text{przy } m = n. \end{cases}$$

4. Każda funkcja $f(x)$, spełniająca warunki brzegowe (7) i mająca ciągłą pierwszą pochodną oraz przedziałami ciągłą drugą pochodną, rozwija się w szereg względem funkcji $X_n(x)$, bezwzględnie i jednostajnie zbieżny:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

gdzie

$$c_n = \int_0^l \rho(x) X_n(x) f(x) dx.$$

Następnie dla każdej wartości własnej λ_n rozwiązujemy równanie (6). Ogólne rozwiązanie równania (6) przy $\lambda = \lambda_n$ będziemy oznaczali symbolem $T_n(t)$; ma ono postać

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

gdzie A_n i B_n są dowolnymi stałymi.

Otrzymaliśmy zatem przeliczalny zbiór rozwiązań równania (1) w postaci

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= T_n(t) X_n(x) = \\ &= (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \end{aligned}$$

W celu spełnienia warunków początkowych (3) tworzymy szereg

$$(9) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

Jeżeli ten szereg jest jednostajnie zbieżny wraz z szeregami, które można z niego otrzymać przez dwukrotne różniczkowanie wyraz po wyrazie względem x i t , to suma szeregu spełnia równanie (1) i warunki brzegowe (2).

Wówczas dla spełnienia warunków początkowych (3) należy przyjąć

$$(10) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi_0(x),$$

$$(11) \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B_n X_n(x) = \varphi_1(x).$$

Zakładając, że szeregi (10) i (11) są jednostajnie zbieżne, możemy określić współczynniki A_n i B_n , mnożąc obie strony równości (10) i (11) przez $\rho(x) X_n(x)$ i całkując względem x w przedziale $\langle 0, l \rangle$.

Ze względu na (8) otrzymujemy

$$A_n = \int_0^l \rho(x) \varphi_0(x) X_n(x) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \rho(x) \varphi_1(x) X_n(x) dx.$$

Podstawiając znalezione wartości współczynników do szeregu (9) otrzymujemy rozwiązanie naszego zagadnienia.

Zadania

Równania typu hiperbolicznego

72. Struna jednorodna, zamocowana na końcach $x=0$, $x=l$, mająca w chwili początkowej kształt

$$u(x, 0) = \frac{16}{5} h \left[\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \frac{x}{l} \right],$$

gdzie $h > 0$ jest liczbą dostatecznie małą, zaczyna drgać bez prędkości początkowej. Znaleźć swobodne drgania struny.

73. Struna jednorodna, zamocowana na końcach $x=0$ i $x=l$, ma w chwili początkowej kształt paraboli symetrycznej względem prostopadłej przeprowadzonej przez punkt $x = \frac{1}{2}l$. Określić przemieszczenie punktów struny od poziomego położenia równowagi, zakładając, że brak prędkości początkowych.

74. Struna jednorodna o długości l została naciągnięta pomiędzy punktami $x=0$ i $x=l$. W punkcie $x=c$ strunę odchylamy na niewielką odległość h i w chwili $t=0$ puszczamy bez prędkości początkowej. Określić przemieszczenie $u(x, t)$ struny dla dowolnej chwili.

75. Struna jednorodna o długości l , zamocowana na obu końcach, znajduje się w poziomym położeniu równowagi. W pewnej chwili przyjmowanej za początkową, struna doznaje w punkcie $x=c$ uderzenia młoteczka, który nadaje temu punktowi stałą prędkość v_0 . Znaleźć przemieszczenie $u(x, t)$ struny w dowolnej chwili.

Rozpatrzeć dwa przypadki:

a) Struna zostaje zaburzona prędkością początkową

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0, & \text{jeżeli } |x-c| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & \text{jeżeli } |x-c| > \frac{\pi}{2h}. \end{cases}$$

Ten przypadek odpowiada płaskiemu sztywnemu młoteczkowi o szerokości π/h , uderzającemu w punkcie $x=c$.

b) Struna zostaje pobudzona prędkością początkową

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0 \cos h(x-c), & \text{jeżeli } |x-c| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & \text{jeżeli } |x-c| > \frac{\pi}{2h}. \end{cases}$$

Przypadek ten odpowiada sztywnemu wypukłemu młoteczkowi o szerokości π/h . Taki młoteczek w środku przedziału nadaje prędkość największą.

76. Jednorodna struna o długości l została zamocowana w końcu $x=0$, a do drugiego końca struny przymocowano pierścień, którego masę można zaniedbać. Pierścień może się przesuwać po gładkim pręcie. Pierścień został odchylony na małą odległość h od położenia równowagi i puszczony w chwili $t=0$. Znaleźć odchylenie $u(x, t)$ struny w dowolnej chwili.

77. Znaleźć drgania struny jednorodnej $0 \leq x \leq l$, o końcach zamocowanych i o masie M skupionej w punkcie $x=c$ struny, pod wpływem po-

czątkowego przemieszczenia

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} h \frac{x}{c}, & \text{gdy } 0 \leq x \leq c, \\ h \frac{l-x}{l-c}, & \text{gdy } c \leq x \leq l, \end{cases}$$

gdzie h jest małą liczbą. Początkowe prędkości punktów struny są równe zeru.

78. Rura otwarta z jednego końca porusza się ruchem postępowym w kierunku swojej osi ze stałą prędkością v . W chwili $t=0$ rura nagle zatrzymuje się. Określić przemieszczenie powietrza wewnątrz rury w odległości x od zakrytego końca rury.

79. Scałkować równanie małych drgań podłużnych walcowego pręta przy założeniu, że jeden koniec pręta jest zamocowany, a drugi swobodny.

80. Jeden koniec pręta zamocowano sprężysto, a drugi pozostał swobodny. Znaleźć podłużne drgania pręta przy dowolnych warunkach początkowych.

81. Jeden koniec pręta został zamocowany, na drugi działa siła Q . Znaleźć podłużne drgania pręta, jeżeli w chwili początkowej siła przestaje działać.

82. Zbadać swobodne drgania podłużne jednorodnego walcowego pręta o długości l i swobodnych obydwu końcach.

83. Pręt jednorodny o długości $2l$ zostaje ściśnięty przez siły przyłożone do końców pręta i w wyniku tej operacji skraca się do długości $2l(1-\varepsilon)$. Przy $t=0$ obciążenie zostaje zniesione. Pokazać, że przemieszczenie u przekroju pręta o odciętej x określone jest wzorem

$$u(x, t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l},$$

jeżeli punkt $x=0$ znajduje się w środku pręta, a a jest prędkością fali podłużnych w pręcie.

84. Drganiami skrętnymi pręta nazywamy takie drgania, przy których poprzeczne przekroje pręta obracają się względem osi obrotu, zmieniając położenia względem siebie. Wyprowadzić równanie małych drgań skrętnych

jednorodnego walcowego pręta i scałkować to równanie przy założeniu, że jeden z końców pręta jest zamocowany, a do drugiego przyczepiono dysk.

85. Jednorodny pręt ma długość l i pole σ przekroju poprzecznego. Koniec $x=0$ pręta został zamocowany nieruchomo, a na końcu $x=l$ skupiono masę m . Pręt poprzednio rozciągnięto siłą Q . Zbadać podłużne drgania pręta, które powstają przy nagłym przerwaniu działania siły rozciągającej.

86. Końce jednorodnej struny o długości l zostają podtrzymywane za pomocą sił sprężystych na prostych równoległych do osi Ou . Zbadać swobodne poprzeczne drgania struny, jeżeli znane są w chwili początkowej przemieszczenia i prędkości punktów struny.

87. Zbadać drgania swobodne struny zamocowanej drgającej w ośrodku, którego opór jest proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości.

88. Zbadać wymuszone poprzeczne drgania struny zaczepionej w punkcie $x=0$ i poddanej na końcu $x=l$ działaniu zaburzającej siły harmoniczej, powodującej przemieszczenie równe $A \sin \omega t$.

89. Pręt o długości l , którego koniec $x=0$ zamocowano, znajduje się w stanie spoczynku. W chwili $t=0$ do swobodnego końca przyłożono siłę Q (na jednostkę powierzchni), skierowaną wzdłuż pręta. Znaleźć przemieszczenie $u(x, t)$ pręta w dowolnej chwili $t>0$.

90. Zbadać podłużne drgania jednorodnego pręta walcowego, którego jeden koniec zamocowano, a do drugiego końca przyłożono siłę $F = A \sin \omega t$ o kierunku osi pręta.

91. Pręt zawieszono pionowo i zamocowano tak, że przemieszczenie we wszystkich punktach jest równe zeru. W chwili $t=0$ pręt oswobadza się z więzów poza zamocowaniem u góry pręta. Zbadać wymuszone drgania pręta.

92. Struna jednorodna o długości l , zamocowana na końcach $x=0$ i $x=l$, drga pod działaniem zewnętrznej siły harmoniczej

$$F(x, t) = \rho f(x) \sin \omega t,$$

liczonej na jednostkę długości. Znaleźć odchylenie $u(x, t)$ struny przy dowolnych warunkach początkowych. Zbadać możliwość rezonansu i znaleźć rozwiązanie w przypadku rezonansu.

93. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \sinh x$$

przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

94. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$$

przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

95. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x-l)t^2$$

przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

96. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = t^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

($\alpha > -1$), spełniające warunki początkowe

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

oraz jednorodne warunki brzegowe

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0.$$

97. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2h \frac{\partial u}{\partial t} - b^2 u = 0$$

przy jednorodnych warunkach początkowych oraz przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = A, \quad u(l, t) = 0.$$

98. Ważka nić jednorodna o długości l , zamocowana pionowo górnym końcem ($x=l$) obraca się wokół osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω . Wyprowadzić równanie małych drgań i pokazać, że odchylenie nici od położenia równowagi wyraża się wzorem

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos a\lambda_k t + B_k \sin a\lambda_k t) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

gdzie

$$A_k = \frac{1}{l J_1^2(\mu_k)} \int_0^l f(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k l J_1^2(\mu_k)} \int_0^l F(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_k^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2},$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami funkcji Bessela $J_0(x)$.

99. Znaleźć drgania własne jednorodnej membrany kołowej o promieniu R , zamocowanej na brzegu, jeżeli w chwili początkowej membrana ma kształt paraboloidy obrotowej, a prędkości początkowe są równe zeru.

100. Zbadać swobodne drgania radialne membrany kołowej zamocowanej na brzegu, drgającej w ośrodku, którego opór jest proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości.

101. Ważka nić jednorodna o długości l , zawieszona jednym z końców $x=l$, zostaje wyprowadzona z położenia równowagi i puszczona bez prędkości początkowej. Pokazać, że równanie małych drgań nici, wywołanych

działaniem siły ciężkości, ma postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

gdzie $a = \sqrt{g}$. Scałkować to równanie przy warunkach danego zadania.

102. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

($\alpha > 0$), spełniające warunki początkowe

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

i jeden z warunków brzegowych:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0 \quad \text{przy } \alpha < 1;$$

$$u|_{x=0} \text{ ograniczone, } u|_{x=a} = 0 \quad \text{przy } 1 \leq \alpha < 2.$$

103. Rozwiązać poprzednie zadanie o tych samych warunkach początkowych przy warunkach brzegowych

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{x=a} = 0 \quad (0 < \alpha < 1).$$

104. Dana jest rurka walcowa o promieniu R , na tyle długa, że można uważać ją za nieskończoną. Zbadać małe drgania radialne jednorodnego gazu zawartego w rurce.

105. Gibka nić jednorodna obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół osi pionowej. W chwili przyjmowanej za początkową nić zostaje wyprowadzona ze względnego położenia równowagi i punktom nici zostają nadane prędkości początkowe. Określić wychylenia $u(x, t)$ nici po upływie czasu t od chwili początkowej.

106. Kołowa membrana jednorodna o promieniu R , zamocowana na brzegu, znajduje się w położeniu równowagi przy napięciu T . W chwili $t=0$ do membrany zostaje przyłożone normalne ciśnienie P , liczone na jednostkę

poła. Pokazać, że drganie punktów membrany określone jest wzorem

$$u(r, t) = \frac{P}{T} \left(\frac{1}{4}(R^2 - r^2) - 2R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos \frac{a\mu_k t}{R} \right),$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

107. Kołowa membrana jednorodna o promieniu R , zamocowana na brzegu, znajduje się w położeniu równowagi przy napięciu T . W chwili $t=0$ powierzchnię membrany obciążono równomiernie ciężarem $f = P_0 \sin \omega t$. Znaleźć radialne drgania membrany.

108. Jednorodna membrana kwadratowa, mająca w chwili początkowej $t=0$ kształt $Axy(b-x)(b-y)$, gdzie A jest stałą, zaczyna drgać bez prędkości początkowej. Zbadać drgania swobodne membrany zamocowanej na brzegu.

109. Jednorodna membrana prostokątna, zamocowana na brzegu, w początkowej chwili $t=0$ zostaje uderzona w otoczeniu środka, tak że

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\sigma_\epsilon} v_0 dx dy = A,$$

gdzie v_0 jest prędkością początkową, a A stałą. Określić swobodne drgania membrany.

110. Znaleźć rozwiązanie równania falowego

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

w obszarze D : $t \geq 0$, $0 < a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \alpha < \pi$, spełniające warunki brzegowe

$$u|_{r=a} = u|_{r=b} = u|_{\theta=\alpha} = 0$$

i warunki początkowe

$$u|_{t=0} = \varphi(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta) e^{im\varphi},$$

gdzie m jest liczbą naturalną.

111. Znaleźć rozwiązanie równania falowego

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

wewnątrz kuli o promieniu R i środku w początku współrzędnych, spełniające warunek brzegowy

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

i warunki początkowe

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x, y, z).$$

Zadanie to powstaje w związku z rozważaniem małych drgań gazu w naczyniu kulistym.

112. Znaleźć rozwiązanie równania falowego

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

w obszarze $r < t$, przyjmujące na stożku charakterystycznym $r=t$ zadane wartości, stałe wzdłuż tworzących stożka charakterystycznego

$$u|_{r=t} = \Phi(\theta, \varphi),$$

gdzie $\Phi(\theta, \varphi)$ jest znaną funkcją ciągłą zmiennych θ i φ w obszarze $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

113. Zbadać za pomocą metody separacji zmiennych poprzeczne drgania belki o długości l opartej na dwóch końcach.

114. Linia o długości l , wolna od zniekształceń ($R/L = G/C$) ma potencjał E . Koniec $x=l$ izolowano, a w chwili $t=0$ koniec $x=0$ uziemiono. Pokazać, że potencjał w punkcie x równa się

$$V = \frac{4E}{\pi} e^{-bt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \cos \frac{2n+1}{2l} \pi at,$$

gdzie $b = R/L$, $a^2 = 1/LC$.

115. W linii przesyłowej o długości l upływność $G=0$. Początkowy prąd i napięcie są równe zeru. Koniec $x=l$ jest izolowany. Przy $t=0$ w punk-

cie $x=0$ przyłożono siłę elektromotoryczną E . Znaleźć natężenie prądu i potencjał w dowolnej chwili.

116. Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\omega}{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\omega}{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

gdzie

$$\sigma = k \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right),$$

spełniające warunki

$$\begin{aligned} \sigma|_{y=0} &= 0, \quad \eta|_{y=h} = 0, \\ \xi &= -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad \text{przy} \quad x=0, \\ \sigma &\rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gdzie ω , g , k , α i T są stałymi.

Równania typu parabolicznego

117. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

($0 < x < l$, $t > 0$), spełniające warunki

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

oraz

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{przy} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}l, \\ l-x & \text{przy} \quad \frac{1}{2}l \leq x < l, \end{cases}$$

118. Cienki, jednorodny pręt o długości l , izolowany od przestrzeni zewnętrznej, ma temperaturę początkową

$$f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$

Końce pręta utrzymywane są w temperaturze 0. Określić temperaturę pręta w chwili $t > 0$.

119. Dowieść, że stężenie $C(x, y, z, t)$ materii dyfundującej w nieruchomym ośrodku spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right) + F(x, y, z, t),$$

gdzie D jest współczynnikiem dyfuzji, a F gęstością źródeł materii dyfundującej.

W przypadku $D = \text{const}$ i $F = 0$ równanie dyfuzji przybiera postać

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right).$$

Wskazówka. Posłużyć się podstawowym prawem dyfuzji w ośrodku nieruchomym

$$q = -D \frac{\partial C}{\partial n},$$

gdzie q jest strumieniem dyfuzji, tj. ilością materii przenoszonej przez jednostkę pola powierzchni w jednostce czasu, a n jest normalną do powierzchni w kierunku malenia stężenia.

120. Rozpuszczona substancja o początkowym stężeniu $C_0 = \text{const}$ dyfunduje z roztworu zawartego pomiędzy płaszczyznami $x=0$ i $x=h$ do rozpuszczalnika ograniczonego płaszczyznami $x=h$ i $x=l$. Opisać proces wyrównania stężeń, zakładając, że brzegi $x=0$ i $x=l$ są nieprzenikliwe dla rozpuszczonej substancji.

121. Dana jest jednorodna kula o promieniu R , której środek leży w początku współrzędnych. Wiadomo, że początkowa temperatura dowolnego punktu kuli zależy tylko od odległości r tego punktu od środka kuli. Przez cały czas obserwacji zewnętrzna powierzchnia kuli podtrzymywana jest w temperaturze zerowej. Określić temperaturę dowolnego punktu wewnątrz kuli w chwili $t > 0$.

122. Znaleźć rozkład temperatury w jednorodnej kuli o promieniu R , wewnątrz której poczynając od chwili $t=0$ działa źródło ciepła o stałej gęstości Q , a powierzchnia kuli utrzymywana jest w temperaturze 0. Początkowa temperatura kuli wynosi 0.

123. Kula o promieniu R zawiera roztwór o początkowym stężeniu $C_0 = \text{const}$. Stężenie na powierzchni kuli jest podtrzymywane w stałej wartości $C_1 > C_0$. Znaleźć ilość absorbowanej substancji w chwili $t > 0$.

124. Dany jest cienki jednorodny pręt o długości l , którego boczna powierzchnia jest izolowana od ciepła. Znana jest początkowa temperatura pręta. Koniec pręta $x=0$ utrzymywany jest w temperaturze 0, a na końcu $x=l$ zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem o temperaturze 0. Określić temperaturę pręta w chwili $t > 0$.

125. Rozwiązać zadanie 124, zakładając, że wymiana ciepła z otoczeniem zachodzi na obu końcach pręta.

126. Rozwiązać zadanie 121 zakładając, że powierzchnia kuli przez cały czas chłodzi się w ośrodku o temperaturze 0.

127. Rozwiązać zadanie 122 przy warunku, że na powierzchni kuli zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem według prawa Newtona. Zakładamy, że temperatura ośrodka wynosi 0.

128. Jednorodna kula o promieniu R znajduje się w stałej temperaturze u_0 w sferycznej powłoce z tego samego materiału o grubości R i temperaturze 0. Całość chłodzi się w ośrodku o temperaturze 0. Znaleźć temperaturę w wewnętrznych punktach kuli w odległości r od środka w chwili $t > 0$.

129. Jednorodne ciało stałe ograniczone jest dwiema współśrodkowymi sferami o promieniach R i $2R$. Wewnętrzna powierzchnia ciała nie przepuszcza ciepła. Warstwę kulistą nagrzano do temperatury u_0 , a następnie chłodzi się ją w ośrodku o temperaturze 0. Znaleźć temperaturę w punktach wewnętrznych warstwy kulistej w chwili $t > 0$.

130. Opisać proces ostygnięcia jednorodnego pręta o powierzchni bocznej izolowanej od ciepła, jeżeli początkowa temperatura pręta wynosi $u(x, 0) = \varphi(x)$, przy założeniu, że jeden koniec izolowano od ciepła, a drugi utrzymywany jest w stałej temperaturze u_0 .

131. Dany jest cienki pręt jednorodny o długości l i temperaturze początkowej 0. Na końcu $x=l$ pręta utrzymywana jest temperatura 0, a na końcu $x=0$ temperatura rośnie liniowo wraz z upływem czasu, czyli $u(0, t) = At$, gdzie A jest stałą. Znaleźć rozkład temperatury wzdłuż pręta przy $t > 0$.

132. Rozwiązać zadanie 131 przyjmując, że temperatura końca $x=0$ zmienia się według prawa $u(0, t) = A \sin \omega t$.

133. Dany jest cienki pręt jednorodny o długości l , którego temperatura początkowa równa się $A(x/l)$. Na końcu $x=0$ podtrzymywana jest temperatura 0, a na końcu $x=l$ temperatura zmienia się według prawa $u(l, t) = Ae^{-t}$. Znaleźć rozkład temperatury wzdłuż pręta w chwili $t > 0$.

134. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

($0 < x < l$, $t > 0$), spełniające warunek początkowy

$$u(x, 0) = 0$$

i warunki brzegowe

$$u|_{x=0} = A(1 - e^{-\alpha t}), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu|_{x=l} = 0,$$

gdzie A , $H > 0$ i $\alpha > 0$ są stałymi.

135. Dana jest kula jednorodna o promieniu R przy temperaturze równej zero. Poczynając od chwili $t=0$ temperatura ośrodka rośnie liniowo z upływem czasu, czyli $u_c = bt$, gdzie b jest stałą. Wymiana ciepła pomiędzy powierzchnią kuli a ośrodkiem przebiega według prawa Newtona. Nagrzewanie kuli jest równomierne (symetria zadania). Znaleźć rozkład temperatury w zależności od promienia w chwili $t > 0$.

136. Dana jest nieograniczona błona o grubości $2R$ w temperaturze 0. Błona jest ogrzewana jednakowo z obu stron stałym strumieniem ciepła q . Znaleźć rozkład temperatury w zależności od grubości w dowolnej chwili $t > 0$.

137. Dana jest kula jednorodna o promieniu R w temperaturze 0. Kula jest ogrzewana równomiernie na całej powierzchni (zadanie symetryczne) przez stały strumień ciepła q . Znaleźć radialny rozkład temperatury wewnątrz kuli w dowolnej chwili $t > 0$.

138. Dana jest nieograniczona błona o grubości $2R$ przy temperaturze równej zero. W błonie, poczynając od chwili $t=0$, dostarcza ciepła źródło ciepła o stałej gęstości Q . Znaleźć rozkład temperatury wraz z grubością w dowolnej chwili $t > 0$ przy warunku, że brzegi błony są utrzymywane w temperaturze 0.

139. Dany jest cienki pręt jednorodny o długości l i temperaturze początkowej równej $f(x)$. Koniec $x=0$ pręta podtrzymywany jest w stałej temperaturze u_0 , a koniec $x=l$ w stałej temperaturze u_1 . Poprzez boczną powierzchnię pręta następuje wypromieniowywanie ciepła do otoczenia którego temperaturę przyjmujemy równą zero. Określić temperaturę pręta w dowolnej chwili t .

140. Dany jest cienki pręt jednorodny o długości l i temperaturze początkowej 0. Koniec $x=0$ pręta utrzymywany jest w stałej temperaturze u_0 , a na końcu $x=l$ i na bocznej powierzchni pręta następuje wypromieniowywanie ciepła do otoczenia, którego temperaturę przyjmujemy równą zero. Określić temperaturę pręta w dowolnej chwili t .

141. Wyprowadzić równanie propagacji ciepła w jednorodnym pierścieniu o bardzo małym przekroju poprzecznym, zakładając, że na bocznej powierzchni pierścienia zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem. Rozwiązać otrzymane równanie, jeżeli znany jest początkowy rozkład temperatury w pierścieniu.

142. Znaleźć rozkład temperatury wewnątrz nieskończonego walca kołowego o promieniu R przy warunku, że początkowa temperatura równa się

$$u|_{t=0} = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

a na bocznej powierzchni walca podtrzymywana jest temperatura równa 0.

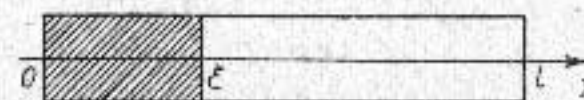
143. Zbadać radialny rozkład ciepła w nieskończonym walcu kołowym o promieniu R , którego powierzchnia boczna utrzymywana jest w stałej temperaturze u_0 . Początkowa temperatura wewnątrz walca równa się 0.

144. Walec o promieniu R , na powierzchni którego podtrzymywane jest stałe stężenie C_1 , jest ośrodkiem dyfuzyjnym. W chwili początkowej ośrodek jest wolny od rozpuszczanej substancji. Określić ilość substancji Q przedysfundowanej wewnątrz walca w chwili t , liczoną na jednostkę długości.

145. Dany jest nieograniczony walec o promieniu R , którego temperatura początkowa wynosi $f(r)$. Przez boczną powierzchnię walca zostaje wypromieniowywane ciepło w otoczenie, którego temperaturę przyjmujemy za równą zero. Znaleźć rozkład temperatury wewnątrz walca w dowolnej chwili t .

146. Dana jest nieograniczona rura walcowa $R_1 \leq r \leq R_2$, której temperatura początkowa wynosi $f(r)$. Zewnętrzna i wewnętrzna powierzchnia rury utrzymywana jest w temperaturze 0. Znaleźć rozkład temperatury w zależności od promienia w dowolnej chwili $t > 0$.

147. Dany jest cienki pręt o długości l , składający się z dwóch części jednorodnych (rys. 6). Koniec $x=0$ pręta utrzymywany jest w stałej tempe-



Rys. 6

raturze u_0 , a koniec $x=l$ w temperaturze 0. Początkowa temperatura obu części pręta jest jednakowa i równa 0. Określić temperaturę pręta w chwili $t > 0$.

148. Dana jest cienka prostokątna płytko o bokach l i m (pokrywających się z osiami współrzędnych), dla której znany jest początkowy rozkład temperatury. Boki $x=0$, $x=l$ podtrzymywane są przez cały czas obserwacji w temperaturze 0, a obie podstawy mają dany rozkład temperatury:

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=m} = \varphi_1(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

Znaleźć temperaturę dowolnego punktu płytki w chwili $t > 0$.

149. Dany jest jednorodny walec o promieniu R i długości l , którego temperatura wynosi $f(r, x)$. W chwili początkowej $t=0$ umieszczamy walec w ośrodku o temperaturze 0. Na bocznej powierzchni walca i na jego podstawach zachodzi wymiana ciepła według prawa Newtona. Znaleźć rozkład temperatury we wnętrzu walca w dowolnej chwili.

150. Dana jest kula jednorodna o promieniu R i temperaturze początkowej $f(r, \theta, \varphi)$. Na powierzchni kuli podtrzymywana jest temperatura równa zero. Znaleźć rozkład temperatury we wnętrzu kuli w dowolnej chwili $t > 0$.

151. Pokazać, że rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

spełniające warunki brzegowe

$$u(0, t) = P = \text{const}, \quad u(l, t) = 0 \quad (t > 0)$$

i warunek początkowy

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 < x < l),$$

można przedstawić w postaci skończonej

$$u(x, t) = \frac{P(l-x)}{2l} + \frac{P}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{\tau} \left(\frac{\sin(x-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}} e^{-i\tau} - \frac{\sin(x-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}} e^{i\tau} \right) d\tau.$$

152. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (t > 0)$$

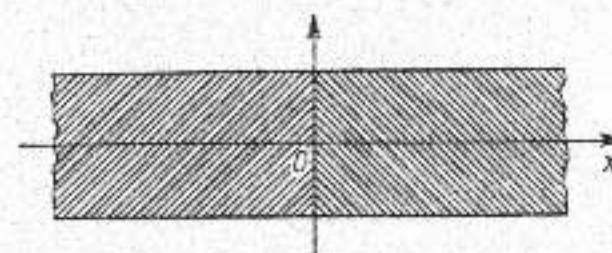
i warunku początkowym

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

153. Dany jest pręt jednorodny, którego jeden koniec znajduje się w $+\infty$ na osi Ox . Drugi koniec pręta utrzymywany jest w stałej temperaturze 0. Dany jest początkowy rozkład temperatury pręta. Wyznaczyć temperaturę pręta w dowolnej chwili $t > 0$.

154. Dany jest pręt półnieskończony o izolowanej od ciepła powierzchni bocznej i znanej temperaturze początkowej. Na końcu pręta ciepło jest wypromieniowywane do ośrodka o temperaturze 0. Znaleźć rozkład temperatury wzdłuż pręta w dowolnej chwili $t > 0$.

155. Dane są dwa półograniczone pręty (rys. 7). Początkowa temperatura pierwszego pręta równa się 0, drugiego $u_0 = \text{const}$. W chwili począt-



Rys. 7

kowej pręty zetknięto końcami. Określić rozkład temperatury jako funkcję położenia w dowolnej chwili t .

Równania typu eliptycznego

156. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

w prostokącie $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, jeżeli na brzegu prostokąta przyjmuje ono dane wartości

$$u|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_1(y) \quad (0 \leq y \leq b),$$

$$u|_{y=0} = \psi_0(x), \quad u|_{y=b} = \psi_1(x) \quad (0 \leq x \leq a),$$

przy czym

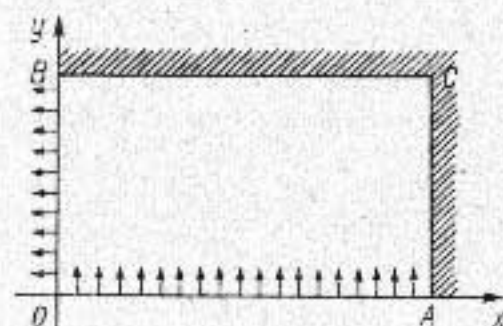
$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0(b) = \psi_1(0),$$

$$\varphi_1(0) = \psi_0(a), \quad \varphi_1(b) = \psi_1(a).$$

Rozwiązać zadanie w przypadku szczególnym

$$\varphi_0(y) = Ay(b-y), \quad \psi_0(x) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad \varphi_1(y) = \psi_1(x) = 0.$$

157. Znaleźć rozkład potencjału pola elektrycznego $u(x, y)$ wewnątrz prostokąta $OACB$ (rys. 8), na którego boku OB potencjał równa się U ,



Rys. 8

a trzy pozostałe boki są uziemione. Wewnątrz prostokąta nie ma ładunków elektrycznych.

158. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a w półpasie $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < +\infty$, spełniające warunki brzegowe

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = A \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad u(x, +\infty) = 0 \quad (0 \leq x \leq a).$$

159. Znaleźć funkcję harmoniczną wewnątrz pierścienia $1 \leq r \leq 2$, spełniającą warunki brzegowe

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = Ay.$$

160. Rozwiązać zagadnienie Dirichleta dla równań Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

w obszarze zawartym pomiędzy dwoma współśrodkowymi okręgami o promieniach R_1 i R_2 i o środku w początku współrzędnych. Rozważyć także przypadek graniczny, gdy pierścień przechodzi w koło.

161. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a w obszarze zawartym pomiędzy dwoma współśrodkowymi okręgami o promieniach R_1 i R_2 i o środku w początku współrzędnych, spełniające warunki brzegowe

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = f_1(\theta), \quad u|_{r=R_2} = f_2(\theta).$$

162. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a w prostokącie D : $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, spełniające warunki brzegowe

$$u(0, y) = A, \quad u(a, y) = Ay,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0.$$

163. Znaleźć funkcję harmoniczną wewnątrz kołowego wycinka $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ i spełniającą warunki brzegowe

$$u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0, \quad u(R, \theta) = A\theta.$$

164. Znaleźć funkcję harmoniczną wewnątrz kuli o promieniu jednostkowym i środku w początku współrzędnych, przyjmującą na powierzchni kuli dane wartości $\varphi(\theta) = \cos^2 \theta$.

165. Dana jest cienka prostokątna płytka $OACB$ (rys. 8). Przez bok OA ciepło równomiernie dopływa, a przez bok OB równomiernie odpływa. Pozostałe dwa boki AC i BC pokryte izolacją cieplną. Znaleźć temperaturę stacjonarną wewnątrznych punktów płytki.

166. Znaleźć rozwiązanie równania Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

w prostokącie D : $0 \leq x \leq a$, $-\frac{1}{2}b \leq y \leq \frac{1}{2}b$, jeżeli na brzegu obszaru przyjmuje ono wartość 0.

167. Znaleźć położenie równowagi jednorodnej membrany prostokątnej $OACB$ (rys. 8) zamocowanej na brzegu, jeżeli na membranę działa ciśnienie normalne P liczone na jednostkę pola.

168. Dwa boki AC i BC prostokątnej płytki jednorodnej $OACB$ (rys. 8) pokryte są izolacją cieplną, a dwa pozostałe boki utrzymywane są w temperaturze zerowej. Znaleźć stacjonarny rozkład temperatury przy warunku, że w płycie jest wydzielane ciepło z gęstością $Q = \text{const}$.

169. Znaleźć stacjonarny rozkład temperatury w przewodniku o przekroju prostokątnym, ogrzewanym stałym prądem, wydzielającym w jednostce objętości ciepło Q , przyjmując, że oddawanie ciepła do ośrodka o temperaturze 0 przez powierzchnię przewodnika przebiega według prawa Newtona.

170. Rozwiązać równanie Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4$$

dla koła o promieniu a i środka w początku współrzędnych, przy warunku brzegowym $u|_{r=a}=0$.

176. Znaleźć rozwiązanie równania Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy$$

w kole o promieniu R i środka w początku współrzędnych, przy warunku brzegowym $u|_{r=R}=0$.

172. Rozwiązać równanie Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2)$$

w pierścieniu $a \leq r \leq b$, jeżeli

$$u|_{r=a}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=b}=0.$$

Początek współrzędnych znajduje się w środku pierścienia.

173. Znaleźć rozkład potencjału pola elektrycznego $u(x, y, z)$ wewnątrz prostopadłościanu o przewodzących ścianach, jeżeli boczne ściany prostopadłościanu oraz górna podstawa są uziemione, a dolna podstawa ma potencjał V .

174. Walec o promieniu podstawy R i wysokości h ma temperaturę podstawy dolnej i powierzchni bocznej równą 0, a temperatura podstawy górnej jest znaną funkcją promienia r . Znaleźć stacjonarną temperaturę wewnątrz walca.

175. Powierzchnia boczna walca o promieniu R i wysokości h została pokryta osłoną nieprzenikliwą dla ciepła. Dolna podstawa utrzymywana jest w stałej temperaturze 0, a temperatura górnej podstawy jest określoną funkcją promienia r . Znaleźć stacjonarną temperaturę wewnętrznych punktów walca.

176. Rozwiązać zadanie 174 zakładając, że powierzchnia boczna walca jest równomiernie chłodzona w powietrzu o temperaturze 0.

177. Walec o promieniu podstawy R i wysokości h ma temperaturę obu podstaw równą 0, a temperatura powierzchni bocznej jest znaną funkcją wysokości z . Znaleźć stacjonarną temperaturę wewnętrznych punktów walca.

178. Znaleźć rozkład potencjału pola elektrostatycznego wewnątrz pustego walca o promieniu R i wysokości h , którego obie podstawy są uziemione, a powierzchnia boczna ma potencjał V .

179. Rozwiązać zadanie 177 przy założeniu, że podstawy walca są izolowane cieplnie.

180. Dolna podstawa walca o promieniu R i wysokości H utrzymywana jest w stałej temperaturze u_0 . Powierzchnia boczna i dolna podstawa walca są równomiernie chłodzone powietrzem o temperaturze 0. Znaleźć stacjonarny rozkład temperatury wewnątrz walca.

181. Górna podstawa walca opartego na cieplnie izolowanej podstawie jest jednostajnie nagrzewana strumieniem ciepła o gęstości q płynącym w kierunku równoległym do osi walca. Boczna powierzchnia walca jest równomiernie chłodzona w powietrzu o temperaturze 0. Znaleźć stacjonarny rozkład temperatury w walcu.

182. Znaleźć stacjonarną temperaturę wewnętrznych punktów półkuli, jeżeli powierzchnia kulista utrzymywana jest w stałej temperaturze u_0 , a podstawa półkuli w temperaturze θ .

183. Kula o promieniu R jest ogrzewana płaskorównoległym strumieniem ciepła o gęstości q , padającym na powierzchnię kuli, i oddaje ciepło do otoczenia zgodnie z prawem Newtona. Znaleźć stacjonarny rozkład temperatury w kuli.

184. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

wewnątrz kuli o promieniu R , spełniające warunek brzegowy

$$v|_{r=R} = f(\theta, \varphi).$$

185. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

w obszarze D : $0 < a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \alpha < \pi$, spełniające warunki brzegowe

$$v|_{r=a} = v|_{r=b} = 0, \quad v|_{\theta=\alpha} = f(r) e^{im\varphi},$$

gdzie m jest liczbą naturalną.

ODPOWIEDZI I WSKAZÓWKI

Do § 1

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; \quad \xi = x + y, \eta = 3x - y.$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = 2x - y, \eta = x.$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = 0; \quad \xi = x + y, \eta = y.$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta - \xi}{32} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0; \quad \xi = 2x + \sin x + y, \eta = 2x - \sin x - y.$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi - \eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = x^2 - y^2, \eta = x^2.$$

$$6. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\eta^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; \quad \xi = y \sin x, \eta = y.$$

$$7. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = x, \eta = \frac{2}{3} y^{3/2} \quad (y > 0);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0; \quad \xi = x - \frac{2}{3} (-y)^{3/2},$$

$$\eta = x + \frac{2}{3} (-y)^{3/2} \quad (y < 0).$$

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + u = 0; \quad \xi = xy, \eta = \frac{x^3}{y}.$$

$$9. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0; \quad \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}),$$

$$10. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; \quad \xi = y \operatorname{tg} \frac{1}{2} x, \quad \eta = y.$$

$$11. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\xi - \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0; \quad \xi = x - 2\sqrt{-y},$$

$$\eta = x + 2\sqrt{-y} \quad (y < 0);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2\alpha - 1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = x, \eta = 2\sqrt{y} \quad (y > 0).$$

Do §

$$12. a) u(x, y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x).$$

$$b) u(x, y) = \varphi(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \psi(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$13. u(x, y) = \sqrt{x/y} \varphi(xy) + \psi(y/x).$$

$$14. u(x, y) = \varphi(xy) \ln y + \psi(xy).$$

$$15. u(x, y) = \frac{\varphi(x - y) + \psi(x + y)}{x}.$$

Wskazówka. Wprowadzić nową funkcję v , przyjmując $v = xu$.

$$16. u(x, y) = \frac{X(x) - Y(y)}{x - y}, \text{ gdzie } X(x) \text{ i } Y(y) \text{ są dowolnymi funkcjami.}$$

Wskazówka. Wprowadzić nową funkcję v , przyjmując $v = (x - y)u$.

$$17. u(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) (\Psi_1(x) + \Psi_2(y)).$$

$$18. u(x, y, z) = (z - y) \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

gdzie φ i ψ są dowolnymi funkcjami.

Wskazówka. Wprowadzić nowe zmienne niezależne ξ, η i ζ wzorami

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{z}{x}, \quad \zeta = z - y.$$

19. $u(x, y, t) = \varphi(x + \sqrt{a_{11}} t, y + \sqrt{a_{22}} t) + \psi(x - \sqrt{a_{11}} t, y - \sqrt{a_{22}} t)$, gdzie φ i ψ są dowolnymi funkcjami.

20. $u(x, y) = (x-y)f_1(x+y) + (x+y)f_2(x-y) + f_3(x-y) + f_4(x+y)$, gdzie f_1, f_2, f_3 i f_4 są dowolnymi funkcjami.

21. a) $b^2 - ac = 1 - x^2 + y^2$. W obszarze $1 - x^2 + y^2 > 0$ równanie ma typ hiperboliczny, w obszarze $1 - x^2 + y^2 < 0$ – typ eliptyczny. Krzywa $x^2 - y^2 = 1$ jest linią paraboliczną.

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{1+x}{y + \sqrt{1-x^2+y^2}}\right) + \psi\left(\frac{1+x}{y - \sqrt{1-x^2+y^2}}\right).$$

Wskazówka. Przy całkowaniu równania charakterystycznego

$$(xy \pm \sqrt{1-x^2+y^2})dx + (1-x^2)dy = 0$$

wprowadzić nowe zmienne z, t wzorami $t^2 = 1 - x^2, y = zt$.

b) $b^2 - ac = x^2 + y^2 - 1$. Na zewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = 1$ równanie ma typ hiperboliczny, wewnątrz okręgu – typ eliptyczny. Sam okrąg jest linią paraboliczną.

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{1-x}{y - \sqrt{x^2+y^2-1}}\right) + \psi\left(\frac{1-x}{y + \sqrt{x^2+y^2-1}}\right).$$

22. Jeżeli $b_1 = b_2 = 0$, to równanie $L(u) = 0$ ma dwa rozwiązania funkcyjne, i ogólne rozwiązanie równania ma postać

$$u(x, y) = \psi_1(\alpha_1 x - y) + \psi_2(\alpha_2 x - y),$$

gdzie ψ_1 i ψ_2 są dowolnymi funkcjami, a α_1 i α_2 pierwiastkami równania

$$a_{11}\alpha^2 - 2a_{12}\alpha + a_{22} = 0.$$

Jeżeli $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ i na przykład $\alpha_1 = b_2/b_1$, to równanie $L(u) = 0$ ma jedno rozwiązanie funkcyjne i ogólną postać tego rozwiązania jest

$$u(x, y) = \exp\left\{\frac{a_{11}(\alpha_2 b_1 - b_2)(\alpha_1 x - y)}{4\delta}\right\} \varphi_1(\alpha_2 x - y) + \varphi_2(\alpha_1 x - y),$$

gdzie φ_1 i φ_2 są dowolnymi funkcjami.

W przypadku gdy równanie $L(u) = 0$ ma zmienne współczynniki, por. pracę Jerugina ⁽¹⁾.

23. Równanie $L(u) + Cu = 0$ sprowadzić do postaci kanonicznej, a następnie szukać rozwiązania w postaci $u = vw$. Por. także notkę ⁽¹⁾.

24. Zastosować metodę kolejnych przybliżeń. Por. także notkę ⁽¹⁾.

25. W równaniu (*) zastąpić zmienną x nową zmienną

$$t = 2(2n+1)x,$$

otrzymując

$$(1) \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Oznaczmy przez u_n funkcję spełniającą równanie (1). Funkcja u_0 spełnia równanie

$$(2) \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = t \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial t}.$$

Ogólne rozwiązanie równania (2) ma postać

$$(3) \quad u_0 = F_1(\sqrt{t} - y) + F_2(\sqrt{t} + y),$$

gdzie F_1 i F_2 są dowolnymi funkcjami.

Jeżeli funkcja u_n jest znana, to funkcję u_{n+1} można po prostu otrzymać przez różniczkowanie. Rzeczywiście, różniczkując równanie (1) względem t , otrzymujemy dla $\partial u_n / \partial t$ równanie

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right) + \frac{2(n+1)+1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right),$$

pokrywające się z równaniem (1) dla funkcji u_{n+1} . Tak więc

$$u_{n+1}(t, y) = \frac{\partial u_n}{\partial t}.$$

Stosując ten wzór n -krotnie do funkcji u_0 i powracając do zmiennej x , otrzymujemy szukaną ogólną postać rozwiązania równania (*).

⁽¹⁾ Jerugin N. P. (Еругин Н. П.), Функционально-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, ученые записки ЛГУ, сер. матем., р. 16, 1949.

26. Oznaczmy przez u_n rozwiązanie równania (*). Przy $n=0$ mamy

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać

$$u_0(x, t) = \frac{\Phi(x-at) + \Psi(x+at)}{x},$$

gdzie Φ i Ψ są dowolnymi funkcjami.

Jeżeli rozwiązanie u_n jest znane, to łatwo sprawdzić, że u_{n+1} określone jest wzorem

$$u_{n+1} = x^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_n}{x^n} \right).$$

Stosując ten wzór n -krotnie do funkcji $u_0(x, t)$, otrzymujemy ogólne rozwiązanie równania (*).

27. Zróżniczkować równanie

$$(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$(m-1)$ -krotnie względem x i $(n-1)$ -krotnie względem y .

28. Otrzymujemy

$$u(x, y) = \frac{1}{x-y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{X(x) - Y(y)}{x-y} \right),$$

gdzie $X(x)$ i $Y(y)$ są dowolnymi funkcjami.

Wskazówka. Wprowadzić nową funkcję v , przyjmując $u = (x-y)^{-1}v$.

29. Równanie $E(\alpha, \beta) = 0$ ma rozwiązanie szczególne postaci

$$(a-x)^{-\alpha} (y-a)^{-\beta}, \text{ gdzie } a = \text{const.}$$

Funkcja

$$u(x, y) = \int_x^y \varphi(z) (z-x)^{-\alpha} (y-z)^{-\beta} dz,$$

gdzie $\varphi(z)$ oznacza dowolną funkcję, jest także rozwiązaniem równania $E(\alpha, \beta) = 0$.

Oznaczmy przez $Z(\alpha, \beta)$ rozwiązanie równania $E(\alpha, \beta) = 0$. Mamy wówczas

$$(1) \quad Z(\alpha, \beta) = (y-x)^{1-\alpha-\beta} Z(1-\beta, 1-\alpha).$$

Funkcja

$$\int_x^y \varphi(z) (z-x)^{\beta-1} (y-z)^{\alpha-1} dz,$$

gdzie $\varphi(z)$ oznacza dowolną funkcję, jest rozwiązaniem równania $E(1-\beta, 1-\alpha) = 0$ i dla równania $E(\alpha, \beta) = 0$ na mocy (1) otrzymujemy nowe rozwiązanie

$$(y-x)^{1-\alpha-\beta} \int_x^y \varphi(z) (z-x)^{\beta-1} (y-z)^{\alpha-1} dz.$$

Ogólne rozwiązanie równania $E(\alpha, \beta) = 0$ ma postać

$$u(x, y) = \int_x^y \varphi(z) (z-x)^{-\alpha} (y-z)^{-\beta} dz + (y-x)^{1-\alpha-\beta} \int_x^y \varphi(z) (z-x)^{\beta-1} (y-z)^{\alpha-1} dz.$$

Podstawiając $z = x(1-t) + yt$ otrzymujemy szukane rozwiązanie równania $E(\alpha, \beta) = 0$.

30. Przyjmując we wzorze (1) z zadania 29 $\alpha = \alpha' + m$, $\beta = \beta' + n$ i uwzględniając równość

$$Z(\alpha' + m, \beta' + n) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} Z(\alpha', \beta'),$$

otrzymujemy

$$(1) \quad (y-x)^{1-m-n-\alpha'-\beta'} Z(1-\beta'-n, 1-\alpha'-m) = \frac{\partial^{m+n} Z(\alpha', \beta')}{\partial x^m \partial y^n}.$$

Stosując znowu wzór (1) z zadania 29 mamy

$$(y-x)^{1-m-n-\alpha'-\beta'} Z(1-\beta'-n, 1-\alpha'-m) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left(\frac{Z(1-\beta', 1-\alpha')}{(y-x)^{\alpha'+\beta'-1}} \right).$$

Zastępując α' , β' , m , n odpowiednio przez $1-\beta'$, $1-\alpha'$, n , m otrzymujemy

$$(2) \quad Z(\alpha' - m, \beta' - n) = (y - x)^{m+n+1-\alpha'-\beta'} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left(\frac{Z(\alpha', \beta')}{(y-x)^{1-\alpha'-\beta'}} \right).$$

Podstawiając $\alpha' = \beta' = 0$ otrzymujemy

$$Z(-m, -n) = (y-x)^{m+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left(\frac{X(x) - Y(y)}{x-y} \right).$$

31. a) Otrzymujemy

$$u(x, y) = (y-x)^{1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left(\frac{Z(\alpha+n, \beta+m)}{(y-x)^{1-\alpha-\beta-m-n}} \right),$$

gdzie

$$Z(\alpha+n, \beta+m) = (y-x)^{1-\alpha-\beta-m-n} \int_0^1 \varphi(x+(y-x)t) t^{-\alpha-n} (1-t)^{-\beta-m} dt + \\ + \int_0^1 \psi(x+(y-x)t) t^{\beta+m-1} (1-t)^{\alpha+n-1} dt.$$

Wskazówka. We wzorze (2) z zadania 30 zastąpić α', β', m, n odpowiednio przez $\alpha+n, \beta+m, n, m$.

b) Otrzymujemy

$$u(x, y) = (y-x)^{1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{m+n+2} Z(-\beta-m, -\alpha-n)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}},$$

gdzie

$$Z(-\beta-m, -\alpha-n) = (y-x)^{1+\alpha+\beta+m+n} \int_0^1 \varphi(x+(y-x)t) t^{\beta+m} (1-t)^{\alpha+n} dt + \\ + \int_0^1 \psi(x+(y-x)t) t^{-\alpha-n-1} (1-t)^{-\beta-m-1} dt.$$

Wskazówka. We wzorze (1) z zadania 30 zastąpić α', β', m, n odpowiednio przez $-(\beta+m), -(\alpha+n), m+1, n+1$.

32. Szukamy rozwiązania równania $F(u)=0$ w postaci $u=\Phi(r)$, gdzie

$$r = \sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}.$$

Wówczas dla $\Phi(r)$ otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1+2a}{r} \frac{d\Phi}{dr} + b^2 \Phi = 0,$$

którego jednym z rozwiązań jest

$$u_1 = \Phi(r) = r^{-a} J_{-a}(br).$$

Posługujemy się teraz następującą własnością równania $F(u)=0$: jeżeli $u(2a, x, y)$ jest rozwiązaniem tego równania, to rozwiązaniem równania jest także funkcja

$$y^{1-2a} u(2(1-a), x, y),$$

i jako drugie rozwiązanie tego równania obieramy

$$u_2 = y^{1-2a} r^{a-1} J_{a-1}(br).$$

Łatwo się przekonujemy przez bezpośrednie sprawdzenie, że równanie $F(u)=0$ jest również spełnione przez funkcje

$$u_1(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \frac{\Psi(\xi)}{r^a} J_{-a}(br) d\xi, \quad u_2(x, y) = y^{1-2a} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\Phi(\xi)}{r^{1-a}} J_{a-1}(br) d\xi,$$

gdzie Ψ i Φ są dowolnymi funkcjami.

Tworząc sumę ostatnich rozwiązań i wprowadzając podstawienie $\xi = x+y(2t-1)$, a także korzystając z oznaczenia

$$\bar{J}_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(1-\nu) z^\nu}{2^\nu} J_{-\nu}(z),$$

otrzymujemy ogólne rozwiązanie równania $F(u)=0$.

33. Należy szukać rozwiązania w postaci

$$u(x, t) = \Phi(x) F(\omega(x)-t).$$

Otrzymujemy

$$a) \quad u(x, t) = \sqrt{x} F_1(\ln x - t),$$

$$b) \quad u(x, t) = e^{-x} F_2(x^2 - t),$$

gdzie F_1 i F_2 są dowolnymi funkcjami.

34. Należy szukać rozwiązania zależnego tylko od ρ .

a) Otrzymujemy

$$u(x, y, t) = \frac{\cosh \sqrt{c\rho}}{\rho};$$

gdzie $\rho = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$.

b) Otrzymujemy

$$u(x, y, z, t) = \frac{J_0(\sqrt{-c\rho})}{\rho^2} + \frac{\sqrt{-c} J'_0(\sqrt{-c\rho})}{\rho} \ln \rho + R,$$

gdzie $\rho = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2}$, a R jest funkcją regularną.

35. $u(x, y) = 3x^2 + y^2$.

Wskazówka. Należy wykorzystać ogólne rozwiązanie

$$u(x, y) = \varphi(x+y) + \psi(3x-y)$$

danego równania.

$$36. u(x, y) = \varphi_0(x - \frac{2}{3}y^3) + \frac{1}{2} \int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \varphi_1(x) dx.$$

$$37. u(x, y) = \frac{\varphi_0\left(\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\right) + \varphi_0\left(\frac{\beta^2-1}{2\beta}\right)}{2} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha}{z}}^{\frac{\beta}{z}} \frac{1}{z} \varphi_1\left(\frac{z^2-1}{2z}\right) dz,$$

gdzie

$$\alpha = (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}), \quad \beta = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{y + \sqrt{1+y^2}}.$$

$$38. u(x, y) = \frac{\varphi_0(x - \sin x + y) + \varphi_0(x + \sin x - y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y} \varphi_1(z) dz.$$

39. $u(x, y) = f(x+y) +$

$$+ \frac{5}{6} \exp\left\{-\frac{x+y}{6}\right\} \left(\int_{x+y}^{x-\frac{1}{3}y} e^{\frac{1}{6}z} f'(z) dz - \int_{x+y}^{x-\frac{1}{3}y} e^{\frac{1}{6}z} F(z) dz \right).$$

$$40. u(x, y) = \frac{1}{4} \varphi_0(x \sqrt[3]{y}) + \frac{1}{4} y \varphi_0\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3}{16} \sqrt[4]{x^3 y} \int_{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}}^{\frac{x}{y}} \varphi_0(x) x^{-7/4} dx - \\ - \frac{3}{4} \sqrt[4]{x^3 y} \int_{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}}^{\frac{x}{y}} \varphi_1(x) x^{-7/4} dx.$$

41. Należy skorzystać z ogólnego rozwiązania

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \psi(x+at)}{h-x}$$

danego równania.

$$42. u(r, t) = \frac{(r-at)\varphi(r-at) + (r+at)\varphi(r+at)}{2r} + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \rho \psi(\rho) d\rho.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne kuliste.

Oczywiste jest, że rozwiązanie u nie zależy od współrzędnych kątowych, a więc równanie falowe sprowadza się do równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać

$$u(r, t) = \frac{\Theta_1(r-at) + \Theta_2(r+at)}{r},$$

gdzie Θ_1 i Θ_2 są dowolnymi funkcjami.

$$43. u(x, y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau \left(x + \frac{2}{m+2} y^{1(m+2)} (2t-1) \right) t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \\ + \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int_0^1 v \left(x + \frac{2}{m+2} y^{1(m+2)} (2t-1) \right) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt,$$

gdzie

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \text{ dla } s > 0.$$

$$44. u(x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} y \int_0^1 v \left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{1}{2}(m+2)} (2t-1) \right) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau \left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{1}{2}(m+2)} (2t-1) \right) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{m-2a}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2a}{2(m+2)}, \quad |a| < \frac{m}{2}.$$

W przypadku $a = \frac{1}{2}m$ mamy

$$u(x, y) = \tau \left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{1}{2}(m+2)} \right) +$$

$$+ \frac{2y}{m+2} \int_0^1 v \left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{1}{2}(m+2)} (2t-1) \right) (1-t)^{-m/(m+2)} dt.$$

Natomiast w przypadku $a = -\frac{1}{2}m$ mamy

$$u(x, y) = \tau \left(x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{1}{2}(m+2)} \right) +$$

$$+ \frac{2y}{m+2} \int_0^1 v \left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{1}{2}(m+2)} (2t-1) \right) (1-t)^{-m/(m+2)} dt.$$

Wskazówka. Sprowadzić równanie do postaci kanonicznej i skorzystać z ogólnego rozwiązania, otrzymanego w zadaniu 29.

$$45. u(x, y) = \frac{\tau(x-2\sqrt{-y}) + \tau(x+2\sqrt{-y})}{2} \quad (y < 0).$$

Wskazówka. Należy skorzystać z ogólnego rozwiązania $u(x, y) = \theta_1(x-2\sqrt{-y}) + \theta_2(x+2\sqrt{-y})$ wyjściowego równania.

46. Przy $\frac{1}{2}m < \alpha < 1$ mamy

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2-2\beta)y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)} \int_0^1 v_1 \left(x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{1}{2}(2-m)} (2t-1) \right) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau \left(x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{1}{2}(2-m)} (2t-1) \right) t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

Przy $m-1 < \alpha < \frac{1}{2}m$ mamy

$$u(x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(-2\beta)y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma^2(-\beta)} \int_0^1 v_1 \left(x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{1}{2}(2-m)} (2t-1) \right) t^{-\beta-1} (1-t)^{-\beta-1} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)} \int_0^1 \tau \left(x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{1}{2}(2-m)} (2t-1) \right) t^{\beta} (1-t)^{\beta} dt -$$

$$- \frac{2\Gamma(1+2\beta)}{(2-m)\Gamma^2(1+\beta)} y^{\frac{1}{2}(2-m)} \int_0^1 \tau' \left(x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{1}{2}(2-m)} (2t-1) \right) \times$$

$$\times t^{\beta} (1-t)^{\beta} (1-2t) dt,$$

gdzie $\beta = \frac{2\alpha-m}{2(2-m)}$. Przy $\alpha = \frac{1}{2}m$ mamy

$$u(x, y) = \frac{\tau(\xi) + \tau(\eta)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\xi} v_1(t) dt,$$

gdzie $\xi = x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{1}{2}(2-m)}$, $\eta = x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{1}{2}(2-m)}$.

Wskazówka. Sprowadzić równanie do postaci kanonicznej i skorzystać z ogólnego rozwiązania, otrzymanego w zadaniach 29 i 44.

$$47. u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau(x+y(2t+1))}{(t(1-t))^{1-a}} \bar{J}_{a-1}(2by\sqrt{t(1-t)}) dt + \\ + \gamma_2 y^{1-2a} \int_0^1 \frac{v(x+y(2t-1))}{(t(1-t))^a} \bar{J}_{-a}(2by\sqrt{t(1-t)}) dt,$$

gdzie

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2a)}{(1-2a)\Gamma^2(1-a)}.$$

Wskazówka. Por. zadanie 32.

$$48. v(x, y) = \int_0^x \psi_1(t) F(y(x-t)) dt + \\ + \int_0^y \psi_2(t) F(x(y-t)) dt + \varphi(0) F(xy),$$

gdzie $F(z) = J_0(2i\sqrt{z})$, oraz

$$\psi_1(x) - \psi_2(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x (\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)) F(\tau(\tau-x)) d\tau, \\ \psi_1(x) + \psi_2(x) = \frac{d}{dx} \left(\varphi(x) - x \int_0^x \varphi(\tau) F'(\tau(\tau-x)) d\tau \right).$$

Wskazówka. Należy skorzystać z ogólnego rozwiązania zadania 24. (Por. także pracę Jerugina cytowaną na str. 55).

$$49. u(x, y, t) = f(x - \sqrt{a_{11}}t, y - \sqrt{a_{22}}t) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{a_{11}}} \int_{x-\sqrt{a_{11}}t}^{x+\sqrt{a_{11}}t} (\sqrt{a_{11}}f'_x(x, y) + \sqrt{a_{22}}f'_y(x, y) + F(x, y)) dx.$$

Przy całkowaniu należy przyjąć

$$y = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} x - \frac{c_1}{\sqrt{a_{11}}}.$$

Wskazówka. Por. zadanie 19. $u(x, y, t) = x^2 + y^2 + (a_{11} + a_{22})t^2$.

$$50. 8u(x, y) = 4(\tau(x+y) + \tau(x-y)) - \\ - 2y(\tau'(x+y) - \tau'(x-y)) - 2y(v(x+y) + v(x-y)) + \\ + 6 \int_{x-y}^{x+y} v(t) dt + 2y \int_{x-y}^{x+y} v_1(t) dt - \int_{x-y}^{x+y} ((x-t)^2 - y^2) v_2(t) dt.$$

Wskazówka. Por. zadanie 20.

$$51. u(x, t) = \varphi\left(\frac{x-t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \varphi(0).$$

Wskazówka. Należy posłużyć się ogólnym rozwiązaniem

$$u(x, t) = \Theta_1(x-t) + \Theta_2(x+t).$$

$$52. u(x, y) = \varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right) + \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi(0).$$

$$53. u(x, y) = \varphi_1\left(\frac{x+2\sqrt{-y}}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{x-2\sqrt{-y}+1}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right).$$

Wskazówka. Należy skorzystać z ogólnego rozwiązania

$$u(x, y) = \Theta_1(x-2\sqrt{-y}) + \Theta_2(x+2\sqrt{-y}) \quad (y < 0).$$

$$54. u(x, y) = \varphi_1(x-2\sqrt{-y}) - \varphi_2\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{-y}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{-y}\right).$$

Wskazówka. Por. wskazówkę do zadania 53.

$$55. u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{f_1(x-t) + f_1(f_1(x-t))}{2}\right) + \psi(f_1(x-t)),$$

gdzie $z = x - f(x)$, skąd $x = f_1(z)$.

Przypadek szczególny:

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{(1+k)(x-t)}{2(1-k)}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{1-k}\right).$$

Wskazówka. Scałkować dane równanie przy warunkach:

$$u(x, t) = \varphi(x) \text{ na charakterystyce } x-t=0;$$

$$u(x, t) = \psi(x) \text{ na krzywej } L: t=f(x),$$

przy czym $\varphi(0) = \psi(0)$.

56. Rozwiązanie

$$u_1(x, t) = \frac{\varphi_0(x-t) + \varphi_0(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(z) dz$$

spełnia warunki początkowe.

Na charakterystyce $x-t=0$ rozwiązanie przyjmuje wartość

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(0) + \varphi_0(2x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2x} \varphi_1(z) dz.$$

Rozwiązanie

$$u_2(x, t) = \psi\left(\frac{x-t}{1-k}\right) + \frac{\varphi_0(x+t) - \varphi_0\left(\frac{1+k}{1-k}(x-t)\right)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1+k}{1-k}(x-t)}^{x+t} \varphi_1(z) dz$$

na prostej $t=kx$ przyjmuje wartość $\psi(x)$, a na charakterystyce $x-t=0$ równa się $\varphi(x)$.

Aby na charakterystyce $x-t=0$ pokrywały się nie tylko same rozwiązania u_1 i u_2 , ale również ich pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, potrzeba i wystarczy, żeby było

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n},$$

gdzie n jest normalną do charakterystyki $x-t=0$. Warunek ten jest spełniony, jeżeli funkcje znane w zagadnieniu spełniają dodatkową równość

$$(k+3)\varphi'_0(0) + 2k\varphi_1(0) = 2\psi'(0).$$

57. Przy t leżącym wewnątrz przedziałów $\left(0, \frac{r-R}{a}\right)$ i $\left(\frac{r+R}{a}, +\infty\right)$

stężenie jest równe zero. Przy $\frac{r-R}{a} < t < \frac{r+R}{a}$ stężenie

$$S = \frac{S_0(r-at)}{2r}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right),$$

przy warunkach początkowych

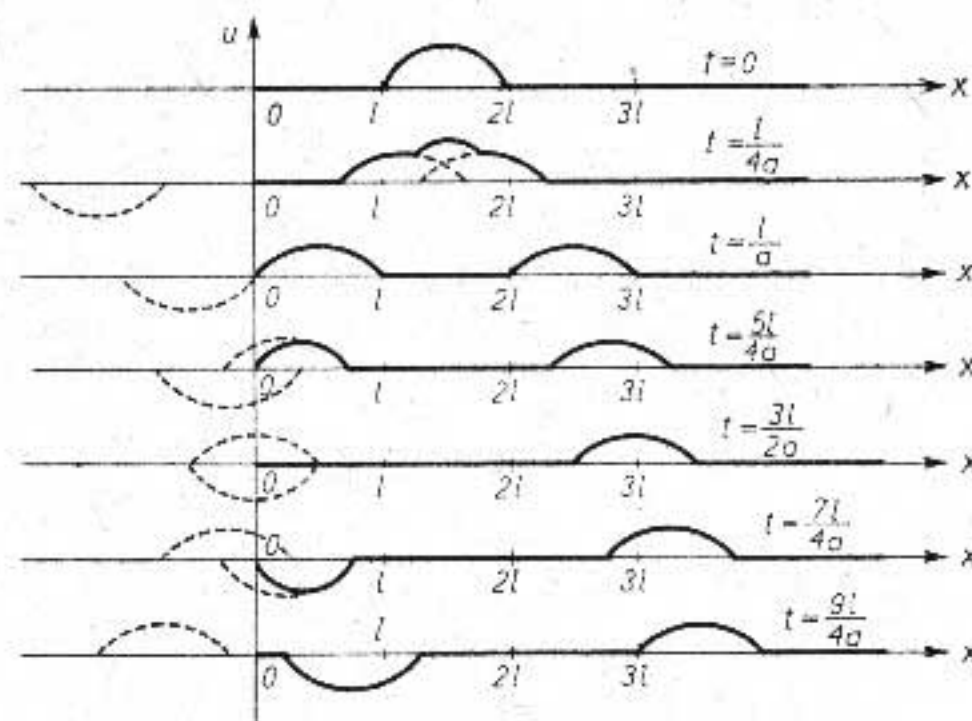
$$S|_{t=0} = \begin{cases} S_0 & \text{dla } r < R, \\ 0 & \text{dla } r > R, \end{cases} \quad \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Należy wykorzystać także wskazówkę do zadania 42.

58. Kształt struny w chwilach

$$t = \frac{l}{4a}, \frac{l}{a}, \frac{5l}{4a}, \frac{3l}{2a}, \frac{7l}{4a}, \frac{9l}{4a}$$

przedstawiony jest na rysunku 9.



Rys. 9

59. $u(x, t) = \psi(x + at) - \psi(x - at)$, gdzie

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\infty < z < -c - \frac{1}{2}h, \\ -\frac{hv_0}{2a\pi} \left(\sin \frac{\pi(z-c)}{h} + \cos \frac{2\pi c}{h} \right) & \text{dla } -c - \frac{1}{2}h < z < -c + \frac{1}{2}h, \\ -\frac{hv_0}{a\pi} \cos \frac{2\pi c}{h} & \text{dla } -c + \frac{1}{2}h < z < c - \frac{1}{2}h, \\ -\frac{hv_0}{a\pi} \cos \frac{2\pi c}{h} + \frac{v_0 h}{2a\pi} \left(1 + \sin \frac{\pi(z-c)}{h} \right) & \text{dla } c - \frac{1}{2}h < z < c + \frac{1}{2}h, \\ \frac{2hv_0}{a\pi} \sin^2 \frac{\pi c}{h} & \text{dla } c + \frac{1}{2}h < z < +\infty. \end{cases}$$

60. Zastosować metodę charakterystyk do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

przy warunku brzegowym $u|_{x=0} = A \sin \omega t$ i przy zerowych warunkach początkowych dla x dodatnich.

61. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{aMv_0}{\gamma p_0 S} \left(1 - \exp \left\{ \frac{\gamma p_0 S}{Ma^2} (x - at) \right\} \right) & \text{dla } x - at < 0, \\ 0 & \text{dla } x - at > 0, \end{cases}$$

gdzie p_0 jest początkowym ciśnieniem gazu, S – polem poprzecznego przekroju rurki, a $\gamma = c_p/c_v$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

($x > 0$), przy warunkach

$$M \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} = S \gamma p_0 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x},$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (x \geq 0), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (x > 0), \quad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t} = v_0.$$

62. Na podstawie symetrii można ograniczyć się do rozważania struny przy $x \geq 0$ i zastosować metodę charakterystyk do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

($x \geq 0$), przy warunku brzegowym

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = 2T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

i warunkach początkowych

$$u_1(x, 0) = 0 \quad (x \geq 0), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (x > 0), \quad \frac{\partial u_1(0, 0)}{\partial t} = v_0.$$

64. Zastosować metodę charakterystyk do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{gdzie } a^2 = \frac{E}{\rho},$$

(E jest modułem Younga, ρ – gęstością objętościową pręta) przy warunkach brzegowych

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

gdzie $t > 0$, i warunkach początkowych

$$(*) \quad u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

gdzie $0 < x < l$.

Funkcje $\varphi_0(x)$ i $\varphi_1(x)$ przedłużamy z przedziału $(0, l)$ na przedział $(l, 2l)$ według wzorów

$$\varphi_0(x+l) = \varphi_0(l-x), \quad \varphi_1(x+l) = \varphi_1(l-x).$$

Następnie przedłużamy je z przedziału $(0, 2l)$ na przedział $(-2l, 0)$ jako funkcje nieparzyste, a dalej jako funkcje okresowe z okresem $4l$.

65. Otrzymujemy

$$u_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{\sqrt{E_1 \rho_1} - \sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right) \quad (-\infty < x < 0, t > 0),$$

$$u_2(x, t) = \frac{2\sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right) \quad (0 < x < \infty, t > 0),$$

gdzie $f(x) = 0$ przy $x < 0$.

Przy $E_1 \rho_1 = E_2 \rho_2$ brak fali odbitej.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równań

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < 0, t > 0),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (0 < x < \infty, t > 0)$$

przy warunkach

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad E_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = E_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} \quad (t \geq 0),$$

$$u_1(x, 0) = f\left(-\frac{x}{a_1}\right), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = f'\left(-\frac{x}{a_1}\right) \quad (-\infty < x < 0),$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < \infty).$$

66. Dla pierwszego walca $\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t}$ jest funkcją okresową o okresie $T = 4l/a$:

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \begin{cases} v_1 & \text{dla } 0 < t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{dla } \frac{l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ v_2 & \text{dla } \frac{l+x}{a} < t < \frac{3l-x}{a}, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{dla } \frac{3l-x}{a} < t < \frac{3l+x}{a}, \end{cases}$$

a dla drugiego walca:

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \begin{cases} v_2 & \text{dla } 0 < t < \frac{2l-x}{a}, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{dla } \frac{2l-x}{a} < t < \frac{3l-x}{a}, \\ v_1 & \text{dla } \frac{3l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{dla } \frac{l+x}{a} < t < \frac{5l-x}{a}, \end{cases}$$

gdzie $u_1(x, t)$ jest podłużnym przesunięciem przekroju pierwszego walca, a $u_2(x, t)$ jest podłużnym przesunięciem przekroju drugiego walca.

Przy $t > 2l/a$ pochodna $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x}$ staje się dodatnia i zjawisko uderzenia

kończy się. W tej chwili walce zamieniają się prędkościami, jak to widać z podanych wzorów.

Wskazówka. Scałkować równania

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (0 < x < l), \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (l < x < 2l)$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(2l, t)}{\partial x} = 0.$$

$$u_1(l, t) = u_2(l, t), \quad \frac{\partial u_1(l, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(l, t)}{\partial x}$$

i warunkach początkowych

$$u_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = v_1 \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = v_2 \quad (l \leq x \leq 2l).$$

67. Rozwiązaniem zadania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

$$(*) \quad ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l},$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x < l),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \quad \text{dla } t=0 \text{ i } x=l,$$

gdzie $m = \frac{M}{\sigma l \rho}$, a σ jest polem poprzecznym przekroju pręta, jest

$$u(x, t) = \varphi(at - x) - \varphi(at + x),$$

gdzie

$$\varphi(z) = 0 \quad (-l < z < l),$$

$$\varphi(z) = \frac{mlv}{a} (1 - e^{-\frac{z-l}{ml}}) \quad (l < z < 3l),$$

$$\varphi(z) = -\frac{mlv}{a} e^{-\frac{z-l}{ml}} + \frac{mlv}{a} \left(1 + \frac{2}{ml}(z-3l)\right) e^{-\frac{z-3l}{ml}} \quad (3l < z < 5l)$$

Równanie na przedłużenie funkcji $\varphi(z)$ poza przedział $(-l, l)$ ma postać

$$\varphi''(z) + \frac{1}{ml} \varphi'(z) = \varphi''(z-2l) - \frac{1}{ml} \varphi'(z-2l) \quad (l < z < \infty).$$

Przy określaniu funkcji $\varphi(z)$ w przedziałach $(3l, 5l)$, $(5l, 7l)$, ... należy uwzględnić ciągłość $u(x, t)$ i $\partial u / \partial t$ przy $x=l$ w chwilach $t = \frac{2l}{a}, \frac{4l}{a}, \dots$

Rozwiązując zadanie przyjmowaliśmy, że pręt w jakiś sposób łączy się z uderzającym ciałem i warunek jest spełniony w dowolnej chwili $t > 0$.

Jeśli jednak ciało oddzieli się od pręta, to otrzymane rozwiązanie ma sens tylko dla tego przedziału czasu, w którym $u_x(l, t) < 0$. Gdy dla tego samego rozwiązania $u_x(x, t)$ w punkcie $x=l$ staje się dodatnie, zjawisko uderzenia kończy się.

Dla $0 < t < 2l/a$ mamy

$$u_x(l, t) = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} < 0$$

i proces uderzenia nie może się skończyć. Dla $2l/a < t < 4l/a$ mamy

$$u_x(l, t) = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} \left[1 + 2e^{2/m} \left(1 - \frac{at-2l}{ml} \right) \right]$$

i $u_x(l, t)$ staje się dodatnie, gdy

$$\frac{2at}{ml} = \frac{4}{m} + 2 + e^{-2/m}.$$

Ostatnie równanie może mieć w przedziale $2l/a < t < 4l/a$ pierwiastek przy założeniu, że $2 + e^{-2/m} < -4/m$. Równanie

$$2 + e^{-2/m} = \frac{4}{m}$$

ma pierwiastek $m = 1,73 \dots$. Jeżeli $m < 1,73 \dots$, to uderzenie kończy się w chwili t , która należy do przedziału $(2l/a, 4l/a)$ i określona jest wzorem

$$t = \frac{1}{a} (2 + m + \frac{1}{2} m e^{-2/m}).$$

Jeżeli $m > 1,73 \dots$, to można podobnie sprawdzić, czy uderzenie kończy się w chwili t z przedziału $(4l/a, 6l/a)$.

68. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \varphi(at + x), \quad \text{gdzie}$$

$$\varphi(z) = 0 \quad (-l < z < l),$$

$$\varphi(z) = -\frac{mlv}{a} (2 - e^{-\frac{z-l}{ml}}) \quad (l < z < 3l),$$

$$\varphi(z) = -\frac{mlv}{a} (2 - e^{-\frac{z-l}{ml}}) + \frac{mlv}{a} \left(1 + \frac{2}{ml}(z-3l)\right) e^{-\frac{z-3l}{ml}} \quad (3l < z < 5l),$$

Równanie na przedłużenie funkcji $\varphi(z)$ na zewnątrz przedziału $(-l, l)$ ma postać

$$\varphi''(z) + \frac{1}{ml} \varphi'(z) = -\varphi''(z-2l) + \frac{1}{ml} \varphi'(z-2l) \quad (l < z < +\infty).$$

Przy $0 < t < 2l/a$ jest

$$u_x(l, t) = -\frac{v}{a} \exp\left\{-\frac{at}{ml}\right\} < 0$$

i proces uderzenia nie może się zakończyć. Bezpośrednio po chwili $t = 2l/a$ jest

$$u_x\left(l, \frac{2l}{a} + 0\right) = \frac{v}{a} \left(2 - \exp\left\{-\frac{2}{m}\right\}\right) > 0.$$

Tak więc uderzenie kończy się w chwili $t = 2l/a$.

Wskazówka. Pierwszy z warunków brzegowych w zadaniu 67 należy zastąpić następującym warunkiem:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (0 < t < +\infty).$$

69. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{gx(2l-x)}{2a^2} + \varphi(at-x) - \varphi(at+x),$$

gdzie

$$\varphi(z) = 0 \quad (-l < z < l),$$

$$\varphi(z) = -\frac{gm^2l^2}{a^2} \left(\frac{z-l}{ml} - 1 + \exp\left\{-\frac{z-l}{ml}\right\}\right) \quad (l < z < 3l).$$

Równanie na przedłużenie funkcji $\varphi(z)$ na zewnątrz przedziału $(-l, l)$ ma postać

$$\varphi''(z) + \frac{1}{ml} \varphi'(z) = \varphi''(z-2l) - \frac{1}{ml} \varphi'(z-2l) - \frac{g}{a^2}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = g - \frac{a^2}{ml} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (t \geq 0),$$

$$u(x, 0) = \frac{gx(2l-x)}{2a^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x \leq l),$$

gdzie g jest przyspieszeniem siły ciężenia, a $m = M/\rho sl$.

70. Otrzymujemy

$$T(x, y) = e^{-ay-bx} \left[b \int_0^x e^{bt} J_0(2i\sqrt{aby(x-t)}) dt + J_0(2i\sqrt{abxy}) \right],$$

$$\theta(x, y) = -ie^{-ay-bx} \left[b^2 \int_0^x e^{bt} J_1(2i\sqrt{aby(x-t)}) \frac{x-t}{\sqrt{aby(x-t)}} dt + \frac{bxJ_0(2i\sqrt{abxy})}{\sqrt{abxy}} \right].$$

Wskazówka. Rugując $\theta(x, y)$ z układu równań otrzymujemy dla $T(x, y)$ równanie

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial T}{\partial x} + b \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

przy warunkach

$$T|_{x=0} = e^{-ay}, \quad T|_{y=0} = 1.$$

Przyjmując $T(x, y) = e^{-ay-bx}u$, $\xi = ax$, $\eta = by$, mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = u, \quad u|_{\xi=0} = 1, \quad u|_{\eta=0} = \exp\left\{\frac{b}{a}\xi\right\}.$$

Następnie należy skorzystać z ogólnego rozwiązania zadania 24.

71. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) - \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right),$$

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho} \left[\varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right) \right],$$

gdzie

$$\varphi(x) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad \left(-\frac{l}{a}, \frac{l}{a}\right),$$

$$\varphi\left(t + \frac{l}{a}\right) = \frac{\rho(\alpha(t)-1)}{1+\beta\rho\alpha(t)} + \frac{\beta\rho\alpha(t)-1}{\beta\rho\alpha(t)+1} \varphi\left(t - \frac{l}{a}\right).$$

Wskazówka. Sprowadzić układ równań do jednego równania rzędu drugiego.

Do § 3

$$72. u(x, t) = \frac{1536}{5\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

$$73. u(x, t) = \frac{32h}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^3}, \quad \text{gdzie } h = u\left(\frac{l}{2}, 0\right).$$

Wskazówka. Zastosować metodę Fouriera do równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x \leq l).$$

$$74. u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}.$$

Wskazówka. Pierwszy z warunków początkowych w zadaniu 73 należy zastąpić warunkiem

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{c} x & \text{dla } 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(x-l)}{c-l} & \text{dla } c \leq x \leq l. \end{cases}$$

75. Otrzymujemy

$$a) u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi^2}{2hl} \sin \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$b) u(x, t) = \frac{4hv_0}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi^2}{2hl}}{n \left(h^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right)} \sin \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

$$76. u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \frac{hx}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

$$77. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \cos a\lambda_n t, \quad \text{gdzie}$$

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n c} & (0 \leq x \leq c), \\ \frac{\sin \lambda_n (l-x)}{\sin \lambda_n (l-c)} & (c \leq x \leq l), \end{cases}$$

przy czym λ_n są pierwiastkami równania

$$\operatorname{ctg} \lambda c + \operatorname{ctg} \lambda (l-c) = \frac{M\lambda}{\rho},$$

oraz

$$a_n = \frac{\rho \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx + M \varphi(c) X_n(c)}{\|X_n\|^2} = \frac{\rho h l}{\lambda_n^2 c(l-c) \|X_n\|^2}.$$

Funkcje własne $X_n(x)$ są ortogonalne w przedziale $(0, l)$ z wagą, tj.

$$\rho \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx + M X_m(c) X_n(c) = 0 \quad (m \neq n),$$

kwadrat normy funkcji własnej równa się

$$\|X_n\|^2 = \rho \int_0^l X_n^2(x) dx + M X_n^2(c) = \frac{\rho c}{2 \sin^2 \lambda c} + \frac{\rho(l-c)}{2 \sin^2 \lambda(l-c)} + \frac{M}{2}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równań

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (0 < x < c), \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (c < x < l),$$

przy warunkach

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_2(l, t) = 0, \quad u_1(c, t) = u_2(c, t),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=c} = \frac{M}{T} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=c} = \frac{M}{T} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=c},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} h \frac{x}{c} & (0 \leq x \leq c), \\ h \frac{l-x}{l-c} & (c \leq x \leq l), \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x \leq l).$$

$$78. u(x, t) = \frac{8vl}{a\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Wskazówka. Warunki początkowe w zadaniu 76 należy zastąpić warunkami

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v.$$

$$79. u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx,$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)a\pi} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x), \quad (0 \leq x \leq l),$$

gdzie u jest przemieszczeniem przekroju o odciętej x , l – długością pręta, ρ – gęstością objętościową, a E – modułem Younga.

$$80. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n at}{l} \right) \cos \frac{\mu_n x}{l}, \text{ gdzie}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \cdot \frac{\mu_n^2 + \beta^2}{\mu_n^2 + \beta^2 + \beta} \int_0^l \varphi_0(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{2(\mu_n^2 + \beta^2)}{a\mu_n(\mu_n^2 + \beta^2 + \beta)} \int_0^l \varphi_1(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

a $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \beta \quad (\beta = hl).$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad h = \frac{k}{E\sigma},$$

gdzie k jest współczynnikiem charakteryzującym sztywność zamocowania.

81. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{8Ql}{E\sigma\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2},$$

gdzie σ jest polem poprzecznego przekroju pręta.

Wskazówka. W zadaniu 79 przyjąć $f(x) = Qx/E\sigma$, $F(x) = 0$.

82. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l (\varphi_0(x) + t \varphi_1(x)) dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do scałkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (0 < x < l).$$

83. Scałkować równanie zadania 82 przy warunkach

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \\ u(x, 0) = -\varepsilon x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

84. $\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n at}{l} \right) \sin \frac{\mu_n x}{l}$, gdzie

$$a_n = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l \varphi'_0(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx, \\ b_n = \frac{4l}{a\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^l \varphi'_1(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

przy czym $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ są pierwiastkami dodatnimi równania przestępnego

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma \quad \left(\gamma = l \frac{k}{k_1} \right).$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{Gl}{k}},$$

przy warunkach

$$\theta(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right|_{t=0} = -c^2 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x^2} \right|_{t=0}, \quad c = \sqrt{\frac{Gl}{k_1}}, \\ \theta(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 < x < l,$$

gdzie θ jest kątem obrotu przekroju o odciętej x , G – modułem przesunięcia, I – momentem biegunowym bezwładności przekroju poprzecznego, k – momentem bezwładności pręta, liczonym na jednostkę długości, a k_1 – momentem bezwładności dysku względem osi wału.

85. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{Ql}{E\sigma} \left(\frac{x}{l} - 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \cos \frac{\beta_n a}{l}\right) \sin \frac{\beta_n x}{l}}{\beta_n^2 \sin \beta_n (\alpha + \alpha^2 + \beta_n^2)} \right),$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha \quad \left(\alpha = \frac{\rho \sigma l}{m} \right).$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad m \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} = -E\sigma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x},$$

$$u(x, 0) = \frac{Qx}{E\sigma}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

86. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n at}{l} \right) X_n(x),$$

gdzie

$$a_n = \frac{\int_0^l \varphi_0(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}, \quad b_n = \frac{l}{\mu_n a} \cdot \frac{\int_0^l \varphi_1(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx},$$

$$X_n(x) = \cos \frac{\mu_n x}{l} + \frac{2h_1 l}{T_0 \mu_n} \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots$ są pierwiastkami równania

$$\operatorname{ctg} \mu = \alpha \left(\frac{\mu}{l} - \frac{4h_1 h_2 l}{T_0 \mu} \right), \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{T_0}{2(h_1 + h_2)}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2h_1}{T_0} u \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2h_2}{T_0} u \Big|_{x=l} = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x),$$

gdzie h_1 i h_2 są stałymi wielkościami dodatnimi.

87. Otrzymujemy

$$u(x, t) = e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos q_n t + b_n \sin q_n t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

gdzie

$$q_n = \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{l^2} - h^2},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{h}{q_n} a_n + \frac{2}{l q_n} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Wskazówka. Zastosować metodę separacji zmiennych do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdzie h jest małą liczbą dodatnią, przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x).$$

88. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Rozwiązania zadania należy szukać w postaci sumy $u = v + w$, gdzie w jest rozwiązaniem równania (*) spełniającym warunki brzegowe

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = A \sin \omega t,$$

a v jest rozwiązaniem równania (*) przy warunkach

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = -w(x, 0), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}.$$

89. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{Q}{E} x - \frac{8Ql}{\pi^2 E} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{Q}{E}, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Por. także wskazówkę do zadania 88.

90. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{aA}{E\sigma\omega} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\cos \frac{\omega l}{a}} + \frac{2a\omega A}{E\sigma l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{k_n} \cdot \frac{\sin k_n x}{\omega^2 - k_n^2 a^2} \sin ak_n t,$$

gdzie $k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$, przy czym $\omega \neq ak_n$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{A}{E\sigma} \sin \omega t, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Por. także wskazówkę do zadania 88.

91. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{gx(2l-x)}{2a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

gdzie g jest przyspieszeniem siły ciężkości.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g,$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Rozwiązania zadania należy szukać w postaci sumy $u = v + w$, gdzie v jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (*), spełniającym warunki brzegowe

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} = 0,$$

przy czym v należy szukać w postaci $Ax^2 + Bx + C$, a w jest rozwiązaniem równania jednorodnego przy warunkach

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0,$$

$$w(x, 0) = -v(x, 0), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t}.$$

92. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad \omega_n = \frac{an\pi}{l}.$$

Rezonans powstaje wtedy, gdy częstość ω zewnętrznej siły zaburzającej pokrywa się z jedną z częstości

$$\omega_{n_1} = \frac{an_1\pi}{l}$$

własnych drgań harmoniczných struny zamocowanej. W przypadku rezonansu rozwiązanie ma postać

$$u(x, t) = \frac{f_{n_1}}{2\omega_{n_1}^2} (\sin \omega_{n_1} t - t\omega_{n_1} \cos \omega_{n_1} t) \sin \frac{n_1\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

gdzie znak ' oznacza, że przy sumowaniu należy opuścić wyraz odpowiadający $n = n_1$.

Wskazówka. Zadania sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \sin \omega t,$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

93. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{b}{a^2} \left(\frac{x}{l} \sinh l - \sinh x \right) + \frac{2b}{a^2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{2b\pi \sinh l}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2\pi^2 + l^2} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Wskazówka. Rozwiązania należy szukać w postaci sumy

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t),$$

gdzie $v(x)$ jest rozwiązaniem równania

$$a^2 v''(x) + b \sinh x = 0$$

przy warunkach brzegowych $v(0) = v(l) = 0$, a w jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, & w(l, t) &= 0, \\ w(x, 0) &= -v(x), & \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

94. Otrzymujemy

$$u(x, t) = -\frac{bx}{12} (x^3 - 2x^2 l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

95. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{8l^4 t^2}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5} + \frac{16l^6}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7} - \\ &\quad - \frac{16l^6}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7}. \end{aligned}$$

96. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \sqrt{t} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k J_{-p}(2p\lambda_k t^{1/2p}) + B_k J_p(2p\lambda_k t^{1/2p})] \sin \frac{k\pi x}{a},$$

gdzie

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2+\alpha}, & \lambda_k &= \frac{k\pi}{a}, \\ A_k &= \frac{2}{a} \Gamma(1-p) \left(\frac{k\pi p}{a}\right)^p \int_0^a \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \\ B_k &= \frac{2}{a} \Gamma(1+p) \left(\frac{k\pi p}{a}\right)^{-p} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx. \end{aligned}$$

97. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \frac{\sinh b(l-x)}{\sinh bl} - \\ &\quad - 2Ae^{-\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} \left(\cosh n_k l + \frac{\mu}{n_k} \sinh n_k l \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\mu = \frac{h}{a^2}, \quad n_k = \frac{1}{a^2 l} \sqrt{h^2 l^2 - a^2 (b^2 l^2 + k^2 \pi^2)},$$

98. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u, \quad \text{gdzie } a = \sqrt{g},$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} u(0, t) &\text{ jest wielkością skończoną, } & u(l, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= F(x) \quad (0 \leq x \leq l). \end{aligned}$$

99. Otrzymujemy

$$u(r, t) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{a\mu_n t}{R},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

Wskazówka. Zastosować metodę separacji zmiennych do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ jest wielkością skończoną, } u(R, t) = 0,$$

$$u(r, 0) = A \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0,$$

gdzie $A = \text{const.}$

Szukając współczynników rozwinięcia należy wykorzystać następujące wzory:

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x).$$

$$\int_0^x x^3 J_0(x) dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x).$$

100. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-h t} \left(\cos q_n t + \frac{h}{q_n} \sin q_n t \right) \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho \varphi(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) \rho,$$

gdzie

$$q_n = \sqrt{\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} - h^2},$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

gdzie $h > 0$ jest małą liczbą, przy warunkach

$$u(0, t) \text{ jest liczbą skończoną, } u(R, t) = 0,$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0.$$

101. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}} \int_0^l f(x) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

Wskazówka. Scałkować równanie małych drgań nici przy warunkach

$$u(0, t) \text{ jest wielkością skończoną, } u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

102. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) X_n(x),$$

gdzie

$$a_n = \frac{\int_0^a \varphi_0(x) X_n(x) dx}{\int_0^a X_n^2(x) dx}, \quad b_n = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\int_0^a \varphi_1(x) X_n(x) dx}{\int_0^a X_n^2(x) dx},$$

$$X_n(x) = x^{(1-\alpha)/2} J_p \left[\mu_n \left(\frac{x}{a} \right)^{(2-\alpha)/2} \right],$$

$$p = \left| \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \right|, \quad n = \frac{1-\alpha}{2a^{(2-\alpha)/2}} \mu_n,$$

a μ_n jest n -tym pierwiastkiem dodatnim równania $J_p(\mu) = 0$; $X_n(x)$, λ_n^2 są przy $n = 1, 2, \dots$ funkcjami i wartościami własnymi zagadnienia brzegowego

$$\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{dX}{dx} \right) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0 \text{ przy } 0 < \alpha < 1,$$

$$X(0) \text{ ograniczone, } X(a) = 0 \text{ przy } 1 \leq \alpha < 2.$$

103. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) X_n(x),$$

gdzie

$$a_n = \frac{\int_0^a \varphi_0(x) X_n(x) dx}{\int_0^a X_n^2(x) dx}, \quad b_n = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\int_0^a \varphi_1(x) X_n(x) dx}{\int_0^a X_n^2(x) dx},$$

$$X_n(x) = x^{(1-\alpha)/2} J_{-\mu} \left[\mu_n \left(\frac{x}{a} \right)^{(2-\alpha)/2} \right],$$

$$p = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \quad \lambda_n = \frac{2-\alpha}{2a^{(2-\alpha)/2}} \mu_n,$$

a μ_n jest n -tym pierwiastkiem równania $J_{-\mu}(\mu) = 0$.

104. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R (f(\rho) + t F(\rho)) \rho d\rho + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n at}{R} + b_n \sin \frac{\mu_n at}{R} \right) J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right),$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho, \\ b_n = \frac{2}{a R \mu_n J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho F(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho,$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_1(\mu) = 0$.

Wskazówka. Równanie drgań gazu należy sformułować we współrzędnych walcowych r, φ, z , kierując oś Oz wzdłuż osi rurki, a zatem należy szukać rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

spełniającego warunki

$$u(0, t) \text{ skończone}, \quad \frac{\partial u(R, t)}{\partial r} = 0,$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = F(r) \quad (0 < r < R).$$

105. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \sqrt{2n(2n-1)} at + b_n \sin \sqrt{2n(2n-1)} at) P_{2n-1} \left(\frac{x}{l} \right),$$

gdzie

$$a_n = \frac{4n-1}{l} \int_0^l f(x) P_{2n-1} \left(\frac{x}{l} \right) dx,$$

$$b_n = \frac{4n-1}{\sqrt{2n(2n-1)} al} \int_0^l F(x) P_{2n-1} \left(\frac{x}{l} \right) dx,$$

natomiast

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} ((x^2-1)^k)$$

jest k -tym wielomianem Legendre'a.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do scałkowania równania

$$(l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

gdzie $a = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$, przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) \text{ skończone},$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x).$$

106. Zadanie sprowadza się do scałkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{P}{T},$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ skończone}, \quad u(R, t) = 0,$$

$$u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0.$$

Szukając współczynników rozwinięcia skorzystać z wskazówki do zad. 99.

107. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \frac{a^2 P_0}{T \omega^2} \left(\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right) \sin \omega t - \frac{2aP_0 \omega R^3}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_n a t}{R} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^2 (\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n^2) J_0'(\mu_n)},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do scałkowania równania

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{P_0 \sin \omega t}{T},$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ skończone}, \quad u(R, t) = 0,$$

$$u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0.$$

Rozwiązania zagadnienia należy szukać w postaci sumy $u = v + w$, gdzie v jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (*), spełniającym warunki brzegowe

$$v(0, t) \text{ skończone}, \quad v(R, t) = 0,$$

przy czym v należy szukać w postaci

$$B(r) \sin \omega t,$$

a w jest rozwiązaniem od powiedniego równania jednorodnego przy warunkach

$$w(0, t) \text{ skończone}, \quad w(R, t) = 0,$$

$$w(r, 0) = -v(r, 0), \quad \frac{\partial w(r, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial v(r, 0)}{\partial t}.$$

Przy obliczaniu współczynników rozwinięcia wykorzystać wskazówkę do zadania 99.

108. Otrzymujemy

$$u(x, y, t) = \frac{64Ab^4}{\pi^6} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{b} \sin \frac{(2m+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3(2m+1)^3} \times \\ \times \cos \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2} \frac{a\pi t}{b}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

przy warunkach

$$u|_{x=0} = u|_{x=b} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0,$$

$$u|_{t=0} = Axy(b-x)(b-y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

109. Otrzymujemy

$$u(x, y, t) = \frac{4A}{a\pi m l} \sum_{k,v=1}^{\infty} \frac{\psi_{kv}(\frac{1}{2}l, \frac{1}{2}m)}{\mu_{kv}} \psi_{kv}(x, y) \sin \mu_{kv} \pi a t,$$

gdzie

$$\psi_{kv}(x, y) = \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{v\pi y}{m}, \quad \mu_{kv} = \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{v}{m}\right)^2}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

przy warunkach

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=m} = 0, \quad u(x, y, 0) = 0,$$

pochodna $\partial u / \partial t$ jest przy $t=0$ równa wszędzie zeru, poza dostatecznie małym otoczeniem punktu $x = \frac{1}{2}l, y = \frac{1}{2}m$.

110. Otrzymujemy

$$u(r, \theta, \varphi, t) = e^{i\omega t} \sum_{j,v=1}^{\infty} (a_{vj} \cos k_j t + b_{vj} \sin k_j t) v_{vj}(r, \theta),$$

gdzie

$$v_{vj}(r, \theta) = \frac{Y_{l_v+\frac{1}{2}}(k_j b) J_{l_v+\frac{1}{2}}(k_j r) - J_{l_v+\frac{1}{2}}(k_j a) Y_{l_v+\frac{1}{2}}(k_j r)}{\sqrt{r}} P_{l_{vm}}(\cos \theta),$$

przy czym

$$P_{l_{vm}}(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m P_{l_v}(x)}{dx^m},$$

gdzie $P_{l_v}(x)$ są funkcjami Legendre'a, $l_1, l_2, \dots$ są rzeczywistymi pierwiastkami równania $P_{l_m}(\cos \alpha) = 0$, a $k_1, k_2, \dots$ są rzeczywistymi pierwiastkami równania

$$Y_{l+\frac{1}{2}}(kb) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - J_{l+\frac{1}{2}}(kb) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) = 0.$$

Ponadto

$$a_{vj} = \frac{1}{A_{vj}^2} \int_a^b \int_0^a \varphi(r, \theta) v_{vj}(r, \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta,$$

$$b_{vj} = \frac{1}{k_j A_{vj}^2} \int_a^b \int_0^a \varphi_1(r, \theta) v_{vj}(r, \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta,$$

gdzie

$$A_{vj}^2 = \int_a^b \int_0^a v_{vj}^2(r, \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne sferyczne r, θ, φ . Należy szukać rozwiązania postaci

$$u = T(t) v(r, \theta, \varphi)$$

Podstawiając to wyrażenie do równania falowego i rozdzielając zmienne otrzymujemy

$$T''(t) + a^2 k^2 T(t) = 0,$$

$$(*) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0.$$

Rozwiązania ostatniego równania szukamy w postaci

$$v(r, \theta, \varphi) = e^{im\varphi} R(r) P(\theta).$$

111. Otrzymujemy

$$u(r, \theta, \varphi, t) = A + Bt +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) \cos \frac{\mu_{jn} at}{R} + Y_n^{(2)}(\theta, \varphi) \sin \frac{\mu_{jn} at}{R} \right) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{jn} r}{R}\right)}{\sqrt{r}},$$

gdzie

$$A = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 f(r, \theta', \varphi') dr d\sigma,$$

$$B = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 F(r, \theta', \varphi') dr d\sigma,$$

$$Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{J_{n+\frac{1}{2}}^2(\mu_{jn})} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n(n+1)}{\mu_{jn}^2}} \times$$

$$\times \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{3/2} f(r, \theta', \varphi') P_n(\cos \gamma) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{jn} r}{R}\right) dr d\sigma,$$

$$Y_n^{(2)}(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{a \mu_{jn} J_{n+\frac{1}{2}}^2(\mu_{jn})} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n(n+1)}{\mu_{jn}^2}} \times$$

$$\times \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{3/2} F(r, \theta', \varphi') P_n(\cos \gamma) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{jn} r}{R}\right) dr d\sigma.$$

natomiast

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

$$d\sigma = \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

a $\mu_{1n}, \mu_{2n}, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) - 2\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0.$$

Wskazówka. Por. wskazówkę do zadania 110. Rozwiązanie równania (*) piszemy w postaci

$$v(r, \theta, \varphi) = f(r) Y(\theta, \varphi).$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (*) i rozdzielając zmienne, otrzymujemy

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) f(r) = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0.$$

112. Otrzymujemy

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \varphi') \frac{t^2 - r^2}{(t - r \cos \gamma)^2} d\sigma,$$

gdzie

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne jednorodne $r_1 = r/t, \theta, \varphi$. Wówczas zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania

$$(*) \quad (1 - r_1^2) \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial v}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0,$$

przy warunku

$$(**) \quad v(r_1, \theta, \varphi)|_{r_1=1} = \Phi(\theta, \varphi),$$

ponieważ rozwiązanie $u(r, \theta, \varphi, t)$ jest jednorodną funkcją zerowego wymiaru względem r i t :

$$u(r_1 t, \theta, \varphi, t) = u(r_1, \theta, \varphi, 1) = v(r_1, \theta, \varphi).$$

Stosując metodę separacji zmiennych do rozwiązania równań (*) i (**) i sumując otrzymany szereg, otrzymujemy

$$v(r_1, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\theta', \varphi') \frac{1 - r_1^2}{(1 - r_1 \cos \gamma)^2} d\sigma.$$

Powracając do zmiennych r, θ, φ, t otrzymujemy rozwiązanie omawianego zadania.

113. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n^2 \pi^2 b}{l^2} t + B_n \sin \frac{n^2 \pi^2 b}{l^2} t \right) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2l}{n^2 \pi^2 b} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

przy warunkach

$$u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad \text{przy } x=0, x=l \text{ i dowolnym } t>0;$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x).$$

114. Zadanie sprowadza się do całkowania równań telegrafistów

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = GV + C \frac{\partial V}{\partial t}$$

przy warunkach początkowych

$$V(x, 0) = E, \quad I(x, 0) = 0$$

i warunkach brzegowych

$$V(0, t) = 0, \quad I(l, t) = 0.$$

115. Otrzymujemy

$$I = \frac{2E}{lL} \exp \left\{ -\frac{Rt}{2L} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin v_n t}{v_n} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

$$V = E - \frac{4E}{\pi} \exp \left\{ -\frac{Rt}{2L} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos v_n t}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} - \\ - \frac{2ER}{\pi L} \exp \left\{ -\frac{Rt}{2L} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin v_n t}{v_n(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

gdzie

$$v_n = \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2 CL} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania układu równań

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = C \frac{\partial V}{\partial t},$$

przy warunkach brzegowych

$$I(l, t) = 0, \quad V(0, t) = E$$

i warunkach początkowych

$$I(x, 0) = 0, \quad V(x, 0) = 0.$$

Należy szukać rozwiązania postaci

$$I(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(t) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

$$V(x, t) = E + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

116. Otrzymujemy

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{\pi^3} \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-q_n x}}{n} \sin \frac{n\pi y}{2h},$$

$$\eta = \frac{\alpha g T^2}{\pi^3} \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-q_n x}}{nC_n} \cos \frac{n\pi y}{2h},$$

$$\sigma = -\frac{8\alpha\omega h}{\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-q_n x}}{n^2 C_n} \sin \frac{n\pi y}{2h},$$

gdzie

$$C_n = \sqrt{1 - \frac{16\omega h^2}{n^2 g k T^2}}, \quad q_n = \frac{n\pi C_n}{2h}.$$

Wskazówka. Rugując nieznaną funkcję σ , otrzymujemy układ dwóch równań:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = \frac{\omega}{kg} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \frac{\omega}{kg} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}.$$

Rozwiązania tego układu równań należy szukać w postaci

$$\xi = \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \sin \frac{n\pi y}{2h}, \quad \eta = \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \cos \frac{n\pi y}{2h}.$$

$$117. u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \exp \left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

$$118. u(x, t) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \exp \left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

$$120. C(x, t) = C_0 \left(\frac{h}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi h}{l}}{n} \exp \left\{ -\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 D t \right\} \cos \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

$$C(x, 0) = \begin{cases} C_0 & \text{dla } 0 < x < h, \\ 0 & \text{dla } h < x < l. \end{cases}$$

$$121. u(r, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2} t \right\} \sin \frac{n\pi r}{R} \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{n\pi \rho}{R} d\rho.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad \text{gdzie} \quad v = ru, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}},$$

przy warunkach

$$v(0, t) = 0, \quad v(R, t) = 0, \quad v(r, 0) = rf(r).$$

$$122. \quad u(r, t) = \frac{Q}{6a^2} (R^2 - r^2) + \frac{2QR^3}{\pi^3 kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2} t \right\} \sin \frac{n\pi r}{R}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{Q}{c\rho},$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ skończone}, \quad u(R, t) = 0, \quad u(r, 0) = 0,$$

123. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q(t) &= 4\pi \int_0^R Cr^2 dr - \frac{4}{3}\pi R^3 C_0 = \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 (C_1 - C_0) \left(1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left\{ -\left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 Dt \right\} \right). \end{aligned}$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \right),$$

przy warunkach

$$C(R, t) = C_1, \quad C(x, 0) = C_0.$$

Wprowadzić nową funkcję v , przyjmując $v = rC$.

124. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2} \right\} \sin \frac{\mu_n x}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \mu = -\mu/p, \quad \text{gdzie} \quad p = Hl > 0.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu|_{x=l} = 0,$$

$$H = \frac{h}{k} > 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

125. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2 a^2}{l^2} t \right\} \frac{\mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + p \sin \frac{\mu_n x}{l}}{p(p+2) + \mu_n^2},$$

gdzie

$$A_n = \int_0^l f(z) \left(\mu_n \cos \frac{\mu_n z}{l} + p \sin \frac{\mu_n z}{l} \right) dz,$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{h}{k} l.$$

Wskazówka. Warunki brzegowe mają postać następującą:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - Hu|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu|_{x=l} = 0.$$

126. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2} \right\} \sin \frac{\mu_n r}{R} \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R} d\rho,$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \mu = -\mu/p, \quad \text{gdzie} \quad p = HR - 1 > -1.$$

Wskazówka. Drugi z warunków brzegowych w zadaniu 121 należy zastąpić następującym warunkiem:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{R}\right) v|_{r=R} = 0, \quad \text{gdzie} \quad H = \frac{h}{k}.$$

127. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \frac{4QHR^4}{kpr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2 (\sin 2\mu_n - 2\mu_n)} \left(1 - \exp\left\{-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right\}\right) \sin \frac{\mu_n r}{R},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \mu = -\mu/p, \quad \text{gdzie} \quad p = HR - 1 > -1.$$

Wskazówka. Drugi z warunków brzegowych w zadaniu 122 zamienić następującym warunkiem:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + Hu|_{r=R} = 0, \quad \text{gdzie} \quad H = \frac{h}{k}.$$

128. Otrzymujemy

$$u(r, t) = 4u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n R - \mu_n R \cos \mu_n R}{\mu_n (4\mu_n R - \sin 4\mu_n R)} \cdot \frac{\sin \mu_n r}{r} \exp\{-\mu_n^2 a^2 t\},$$

gdzie

$$\operatorname{tg} 2\mu_n R = \frac{2\mu_n R}{1 - 2hR}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ skończone}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + hu|_{r=2R} = 0,$$

$$u(r, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{dla } 0 \leq r \leq R, \\ 0 & \text{dla } R < r \leq 2R. \end{cases}$$

129. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{R\lambda_k \cos \lambda_k(r-R) + \sin \lambda_k(r-R)}{r} \exp\{-\lambda_k^2 a^2 t\},$$

gdzie

$$A_k = \frac{3R^3 \lambda_k^2 (1 + 2Rh) u_0}{(1 + \lambda_k^2 R^2) ((1 + 2Rh) \lambda_k^2 R^2 + (2hR + 2\lambda_k^2 R^2 - 1) \sin^2 \lambda_k R)},$$

a $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$(1 - 2Rh + 2\lambda^2 R^2) \sin \lambda R = (1 + 2Rh) R \lambda \cos \lambda R.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

przy warunkach

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + hu|_{r=2R} = 0, \quad u(r, 0) = u_0.$$

130. Otrzymujemy

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{-a^2 \lambda_n^2 t\} \cos \lambda_n x,$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx - \frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)}, \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(l, t) = u_0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Należy szukać rozwiązania postaci

$$u(x, t) = u_0 + v(x, t),$$

gdzie $v(x, t)$ jest funkcją nieznaną.

131. Otrzymujemy

$$u(x, t) = At \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{l^2 A}{6a^2} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l}\right) \right] + \\ + \frac{2l^2 A}{\pi^3 a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t \right\}}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Wskazówka. Należy szukać rozwiązania w postaci sumy

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

gdzie u_1 jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

spełniającym warunki

$$u_1(0, t) = At, \quad u_1(l, t) = 0,$$

a u_2 jest rozwiązaniem tegoż równania przy warunkach

$$u_2(0, t) = 0, \quad u_2(l, t) = 0, \quad u_2(x, 0) = -u_1(x, 0).$$

132. Otrzymujemy

$$u(x, t) = A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t - \\ - \frac{2\omega A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t \right\}}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t \exp \left\{ \frac{n\pi a}{l} \tau \right\} \cos \omega \tau d\tau.$$

Wskazówka. Należy szukać rozwiązania postaci

$$u(x, t) = A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \omega t + v(x, t),$$

gdzie v jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A\omega \left(\frac{x}{l} - 1\right) \cos \omega t,$$

spełniającym warunki

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = 0.$$

133. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{Ax}{l} e^{-t} + \\ + \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\exp \left\{ -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t \right\} - \exp \{-t\} \right)}{n(n^2 \pi^2 - l^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Wskazówka. Należy szukać rozwiązania postaci

$$u(x, t) = \frac{Ax}{l} e^{-t} + v(x, t).$$

134. Otrzymujemy

$$u(x, t) = A(1 - e^{-\alpha t}) \left(1 - \frac{Hx}{1+p}\right) + \\ + 2A\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} \cdot \frac{l^2}{a^2 \mu_n^2 - \alpha l^2} \times \\ \times \left(\exp \left\{ -\left(\frac{\alpha \mu_n}{l}\right)^2 t \right\} - \exp \{-\alpha t\} \right) \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \mu = -\mu/p, \quad \text{gdzie } p = Hl > 0.$$

Wskazówka. Należy szukać rozwiązania postaci

$$u(x, t) = A(1 - e^{-\alpha t}) \left(1 - \frac{Hx}{1+p}\right) + w,$$

gdzie w jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A\alpha e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{Hx}{1+p}\right),$$

spełniającym warunki

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + Hw \Big|_{x=l} = 0, \quad w \Big|_{t=0} = 0.$$

135. Otrzymujemy

$$u(r, t) = bt - \frac{b}{6a^2} \left[R^2 \left(1 + \frac{2}{HR} \right) - r^2 \right] + \\ + \frac{2bR^3}{a^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n^3 (\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)} \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2} \right\} \sin \frac{\mu_n r}{R},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\operatorname{tg} \mu = -\mu/p, \quad \text{gdzie} \quad p = HR - 1 > 0.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$(*) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad \text{gdzie} \quad v = ru,$$

przy warunkach

$$(**) \quad v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{R} \right) v \Big|_{r=R} = RHbt, \quad v(r, 0) = 0.$$

Rozwiązania należy szukać w postaci sumy $v = v_1 + v_2$, gdzie v_1 jest rozwiązaniem równania (*), spełniającym warunki brzegowe (**), a v_2 jest rozwiązaniem tegoż równania przy warunkach

$$v_2(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{R} \right) v_2 \Big|_{r=R} = 0, \quad v_2(r, 0) = -v_1(r, 0).$$

136. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{a^2 q}{kR} \left(t - \frac{R^2 - 3x^2}{6a^2} \right) - \\ - \frac{2qR}{k\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{R} \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2} \right\},$$

gdzie k jest współczynnikiem wewnętrznego przewodnictwa cieplnego.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$k \frac{\partial u}{\partial x} + q \Big|_{x=-R} = 0, \quad -k \frac{\partial u}{\partial x} + q \Big|_{x=R} = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = 0.$$

137. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \frac{qR}{k} \left(\frac{3a^2}{R^2} t - \frac{3R^2 - 5r^2}{10R^2} - \frac{2R}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2} \right\}}{\mu_n^3 \cos \mu_n} \sin \frac{\mu_n r}{R} \right),$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $\operatorname{tg} \mu = \mu$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązywania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ ograniczone}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{q}{k}, \quad u \Big|_{t=0} = 0.$$

138. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{QR^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) - \\ - \frac{16QR^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \exp \left\{ -\left(\frac{2n+1}{2R} \pi a \right)^2 t \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2R}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązywania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q}{c\rho}, \quad \text{gdzie} \quad a^2 = \frac{k}{c\rho},$$

przy warunkach

$$u(\pm R, t) = 0 \quad (t > 0), \quad u(x, 0) = 0 \quad (-R \leq x \leq R).$$

139. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{u_1 \sinh \frac{b}{a} x - u_0 \sinh \frac{b}{a} (x-l)}{\sinh \frac{b}{a} l} + \\ + \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(-1)^n u_1 - u_0}{\lambda_n^2} \exp \{-a^2 \lambda_n^2 t\} \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \exp \{-a^2 \lambda_n^2 t\} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

gdzie

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u, \quad \text{gdzie} \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad b^2 = \frac{hp}{c\rho\sigma},$$

przy warunkach

$$u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = u_1, \quad u(x, 0) = f(x),$$

gdzie k i h są współczynnikami wewnętrznego i zewnętrznego przewodnictwa cieplnego, c i ρ jest pojemnością cieplną i gęstością pręta, a σ i p polem powierzchni i obwodem poprzecznego przekroju pręta. Rozwiązania należy szukać w postaci sumy $u = v + w$, gdzie v jest rozwiązaniem równania

$$a^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - b^2 v = 0,$$

spełniającym warunki brzegowe

$$v(0) = u_0, \quad v(l) = u_1,$$

a w jest rozwiązaniem równania (*) przy warunkach

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w(x, 0) = f(x) - v(x).$$

140. Otrzymujemy

$$u(x, t) = u_0 \frac{b \sinh \frac{b}{a} (l-x) + Ha \sinh \frac{b}{a} (l-x)}{b \cosh \frac{bl}{a} + Ha \sinh \frac{bl}{a}} - \\ - 2u_0 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n (\mu_n^2 + H^2)}{(a^2 \mu_n^2 + b^2)(l(\mu_n^2 + H^2) + H)} \exp \{-(a^2 \mu_n^2 + b^2)t\} \sin \mu_n x,$$

gdzie μ_n określone jest równaniem $\operatorname{tg} l\mu = -\mu/H$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u,$$

przy warunkach

$$u(0, t) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu \Big|_{x=l} = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

Rozwiązania należy szukać w postaci sumy $u = v + w$, gdzie v jest rozwiązaniem równania

$$a^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - b^2 v = 0,$$

spełniającym warunki brzegowe

$$v(0) = u_0, \quad \frac{dv(l)}{dx} + Hv(l) = 0,$$

a w jest rozwiązaniem równania (*) przy warunkach

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + Hw \Big|_{x=l} = 0, \quad w(x, 0) = -v(x).$$

141. Otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - b(u - u_0), \quad \text{gdzie} \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad b = \frac{hp}{\sigma k},$$

gdzie θ jest długością łuku pierścienia, k i h są współczynnikami wewnętrznego i zewnętrznego przewodnictwa cieplnego, c i ρ są pojemnością

cieplną i gęstością materiału pierścienia, a σ i p jest polem i obwodem przekroju poprzecznego, u_0 jest temperaturą ośrodka zewnętrznego. Mamy

$$u(\theta, t) = e^{-at} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \exp \{ -n^2 a^2 t \} \right),$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

142. Otrzymujemy

$$u(r, t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2} \right\},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$. Przy znajdowaniu współczynników rozwinięcia posłużyć się wskazówką do zadania 99.

143. Otrzymujemy

$$u(r, t) = u_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n J_0'(\mu_n)} \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2} \right\} \right],$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ skończone}, \quad u(R, t) = u_0, \quad u(r, 0) = 0.$$

144. Otrzymujemy

$$Q(t) = 2\pi \int_0^R Cr dr = \pi R^2 C, \left(1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2}{R^2} Dt \right\} \right),$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

Wskazówka. Por. zadania 143 i 99.

145. Otrzymujemy

$$u(r, t) =$$

$$= \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + H^2 R^2} \exp \left\{ -\frac{\mu_n^2 a^2 t}{R^2} \right\} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_0'(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\mu J_0'(\mu) + HRJ_0(\mu) = 0.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

przy warunkach

$$u(0, t) \text{ skończone}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + Hu|_{r=R} = 0, \quad u(r, 0) = f(r).$$

146. Otrzymujemy

$$u(r, t) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \{ -a^2 \lambda_n^2 t \} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n R_1) u_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_2) - J_0^2(\lambda_n R_1)} \int_{R_1}^{R_2} r f(r) u_0(\lambda_n r) dr.$$

gdzie

$$u_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) H_0^{(1)}(\lambda_n R_2) - J_0(\lambda_n R_2) H_0^{(1)}(\lambda_n r),$$

a $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ są rzeczywistymi dodatnimi pierwiastkami równania

$$J_0(\lambda R_1) H_0^{(1)}(\lambda R_2) - J_0(\lambda R_2) H_0^{(1)}(\lambda R_1) = 0.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

przy warunkach

$$u|_{r=R_1}=0, \quad u|_{r=R_2}=0, \quad u(r, 0)=f(r).$$

147. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_1 a_1 u_0 A_j^2}{\mu_j} (1 - \exp \{-\mu_j^2 t\}) \sin a_1 \mu_j x & (0 < x < \xi), \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_1 a_1 u_0 A_j^2}{\mu_j} (1 - \exp \{-\mu_j^2 t\}) \times \\ \times \frac{\sin a_1 \mu_j \xi}{\sin a_2 \mu_j (l - \xi)} \sin a_2 \mu_j (l - x) & (\xi < x < l), \end{cases}$$

gdzie μ_j są pierwiastkami równania

$$a_1 k_1 \operatorname{ctg} \mu a_1 \xi + a_2 k_2 \operatorname{ctg} a_2 (l - \xi) \mu = 0,$$

a A_j są określone warunkiem unormowania:

$$c_1 \rho_1 \int_0^{\xi} X_{1j}^2 dx + c_2 \rho_2 \int_{\xi}^l X_{2j}^2 dx = 1,$$

gdzie

$$X_{1j} = A_j \sin a_1 \mu_j x, \quad X_{2j} = A_j \frac{\sin a_1 \mu_j \xi}{\sin a_2 \mu_j (l - \xi)} \sin a_2 \mu_j (l - x).$$

Warunek ortogonalności:

$$c_1 \rho_1 \int_0^{\xi} X_{1j} X_{1k} dx + c_2 \rho_2 \int_{\xi}^l X_{2j} X_{2k} dx = 0 \quad (j \neq k).$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równań

$$a_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \xi), \quad a_2^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\xi < x < l),$$

gdzie

$$a_i^2 = \frac{c_i \rho_i}{k_i} \quad (i=1, 2).$$

przy warunkach

$$u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(\xi - 0, t) = u(\xi + 0, t), \\ k_1 \frac{\partial u(\xi - 0, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u(\xi + 0, t)}{\partial x}, \quad u(x, 0) = 0.$$

148. Otrzymujemy

$$u = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh \frac{n\pi(m-y)}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \right. \\ \left. + \sinh \frac{n\pi y}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\sinh \frac{n\pi m}{l}} + \\ + \frac{4}{lm} \sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} \exp \left\{ -a^2 \pi^2 \left(\frac{\mu^2}{l^2} + \frac{\nu^2}{m^2} \right) t \right\} \sin \frac{\mu\pi x}{l} \sin \frac{\nu\pi y}{m} \times \\ \times \int_0^l \int_0^m \left[f(x, y) - \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh \frac{n\pi(m-y)}{l} \int_0^l \varphi_0(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \sinh \frac{n\pi y}{l} \int_0^l \varphi_1(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right) \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\sinh \frac{n\pi m}{l}} \right] \sin \frac{\mu\pi x}{l} \sin \frac{\nu\pi y}{m} dx dy.$$

Wskazówka. Rozwiązania należy szukać w postaci sumy $u=v+w$, gdzie w jest rozwiązaniem równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

przy warunkach

$$w(0, y) = 0, \quad w(l, y) = 0, \\ w(x, 0) = \varphi_0(x), \quad w(x, m) = \varphi_1(x),$$

a v jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

przy warunkach

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = v|_{y=0} = v|_{y=m} = 0, \\ v(x, y, 0) = f(x, y) - w(x, y).$$

149. Otrzymujemy

$$u(r, x, t) =$$

$$= \sum_{k, n=1}^{\infty} A_{kn} J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) \left(\cos \frac{v_n x}{l} + \frac{p}{v_n} \sin \frac{v_n x}{l}\right) \exp \left\{ -a^2 \left(\frac{v_n^2}{l^2} + \frac{\mu_k^2}{R^2} \right) t \right\},$$

gdzie

$$A_{kn} = \frac{4\mu_k^2 v_n^2}{R^2(\mu_k^2 + HR)(p(p+2) + v_n^2)} \times \\ \times \int_0^l \int_0^R r f(r, x) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \left(\cos \frac{v_n x}{l} + \frac{p}{v_n} \sin \frac{v_n x}{l}\right) dx dr,$$

$\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\mu J'_0(\mu) + hR J_0(\mu) = 0,$$

a $v_1, v_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$2 \operatorname{ctg} v = \frac{v}{p} \frac{p}{v}, \quad \text{gdzie} \quad p = Hl > 0.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right),$$

przy warunkach

$$\frac{\partial u}{\partial x} - Hu|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + Hu|_{x=l} = 0,$$

$$u(0, x, t) \text{ skończone}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + Hu|_{r=R} = 0, \quad u(r, x, 0) = f(r, x).$$

150. Otrzymujemy

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{jn} \frac{r}{R}\right)}{\sqrt{r}} Y_n(\theta, \varphi) \exp \left\{ -\frac{\mu_{jn}^2 a^2 t}{R^2} \right\},$$

gdzie

$$Y_n(\theta, \varphi) =$$

$$= \frac{2n+1}{2\pi R^2} \frac{1}{J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{jn})} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 f(r, \theta', \varphi') P_n(\cos \gamma) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_j \frac{r}{R}\right) dr d\sigma,$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

$$d\sigma = \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

a $\mu_{1n}, \mu_{2n}, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0$.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right],$$

przy warunkach

$$u|_{r=R} = 0, \quad u|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi).$$

151. Patrz praca N. P. Jerugina⁽¹⁾.

152. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{2a^2 \pi}{l} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \exp \left\{ -\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right\}}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} \exp \left\{ -\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right\}},$$

gdzie

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \theta_0(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \theta_0(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

Wskazówka. Niech $\theta(x, t)$ będzie rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego

$$(*) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

⁽¹⁾ Jerugin N.P. (Еругин Н. П.), Замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи, ПММ, XIV, 2 (1950).

Wówczas

$$(**) \quad u(x, t) = -2a^2 \frac{\theta_x}{\theta}$$

jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Z (**) mamy

$$\theta(x, t) = c(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} \int_0^x u(x, t) dx \right\},$$

skąd przy $t=0$

$$(**) \quad \theta(x, 0) = c_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} \int_0^x u(x, 0) dx \right\} = \theta_0(x).$$

Na mocy warunków brzegowych z (**) mamy

$$(**) \quad \theta_x(0, t) = \theta_x(l, t) = 0.$$

Tak więc otrzymaliśmy rozwiązanie równania (*) przy warunkach (**) i (**).

Rozwiązując to zadanie i korzystając z wzoru (**), znajdujemy szukane rozwiązanie.

$$153. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left[\exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \right] d\xi.$$

154. Otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[f(\xi) \left(\exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \right) - \right. \\ \left. - 2he^{-h\xi} \int_0^\xi e^{h\mu} f(\mu) d\mu \right] d\xi.$$

Wskazówka. Scałkować równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

przy warunkach

$$\frac{\partial u}{\partial x} - hu|_{x=0} = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

155. Otrzymujemy

$$u_1(x, t) = \frac{u_0 \sigma}{1 + \sigma} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_A^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu \quad (x < 0),$$

$$u_2(x, t) = \frac{u_0 \sigma}{1 + \sigma} \left(1 + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^B e^{-\mu^2} d\mu \right) \quad (x > 0),$$

gdzie

$$\sigma = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}, \quad A = -\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}}, \quad B = \frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równań

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (x < 0), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (x > 0),$$

gdzie

$$a_i^2 = \frac{c_i \rho_i}{k_i} \quad (i = 1, 2),$$

przy warunkach

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad k_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x},$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, 0) = u_0,$$

gdzie c_i jest pojemnością cieplną, k_i jest współczynnikiem wewnętrznego przewodnictwa cieplnego, a ρ_i jest gęstością materiału pręta.

156. Otrzymujemy

$$u = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh \frac{n\pi(a-x)}{b} \int_0^b \varphi_0(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy + \right. \\ \left. + \sinh \frac{n\pi x}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right) \frac{\sin \frac{n\pi y}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} + \\ + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a} \int_0^a \psi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx + \right. \\ \left. + \sinh \frac{n\pi y}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \right) \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}.$$

Wskazówka. Rozbić rozwiązanie zadania na dwa etapy, a mianowicie:

1) znalezienie funkcji harmonicznej $u_1(x, y)$, spełniającej warunki graniczne

$$u_1(0, y) = \varphi_0(y), \quad u_1(a, y) = \varphi_1(y), \\ u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(x, b) = 0;$$

2) znalezienie funkcji harmonicznej $u_2(x, y)$, spełniającej warunki graniczne

$$u_2(0, y) = 0, \quad u_2(a, y) = 0, \\ u_2(x, 0) = \psi_0(x), \quad u_2(x, b) = \psi_1(x).$$

Wówczas funkcja $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ jest rozwiązaniem danego zagadnienia Dirichleta:

$$u(x, y) = B \frac{\sinh \frac{\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + \\ + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \frac{(2n+1)(a-x)}{b}}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\sinh \frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

$$157. u(x, y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh \frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1) \sinh \frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

wewnątrz prostokąta, przy warunkach brzegowych

$$u|_{x=0} = U, \quad u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0.$$

$$158. u(x, y) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left\{ -\frac{\pi n}{a} y \right\} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

$$159. u(r, \theta) = \frac{8}{3} A \sinh \ln r \cdot \sin \theta.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne biegunowe.

160. Otrzymujemy

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln r + \frac{\alpha_0^{(1)} \ln R_2 - \alpha_0^{(2)} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\alpha_n^{(1)} R_2^{-n} - \alpha_n^{(2)} R_1^{-n}) r^n - (\alpha_n^{(1)} R_2^n - \alpha_n^{(2)} R_1^n) r^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} \cos n\theta + \right. \\ \left. + \frac{(\beta_n^{(1)} R_2^{-n} - \beta_n^{(2)} R_1^{-n}) r^n - (\beta_n^{(1)} R_2^n - \beta_n^{(2)} R_1^n) r^{-n}}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} \sin n\theta \right),$$

gdzie

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) d\theta, \\ \alpha_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\beta_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta) \sin n\theta d\theta,$$

$$\alpha_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta) d\theta,$$

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\beta_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne biegunowe. Wówczas zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

przy warunkach

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta), \quad u(R_1, \theta) = f_1(\theta), \quad u(R_2, \theta) = f_2(\theta),$$

gdzie $f_1(\theta)$ i $f_2(\theta)$ są danymi funkcjami, rozwijającymi się w szereg Fouriera.

Dla koła mamy

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \theta) + r^2} dt.$$

161. Otrzymujemy

$$u(r, \theta) = \alpha_0^{(2)} + \alpha_0^{(1)} R_1 \ln \frac{r}{R_2} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\alpha_k^{(1)} R_2^{-k} + k R_1^{-k-1} \alpha_k^{(2)}) r^k + (k R_1^{k-1} \alpha_k^{(2)} - R_2^k \alpha_k^{(1)}) r^{-k}}{k(R_1^{k-1} R_2^{-k} + R_2^k R_1^{-k-1})} \cos k\theta + \right. \\ \left. + \frac{(\beta_k^{(1)} R_2^{-k} + k R_1^{-k-1} \beta_k^{(2)}) r^k + (k R_1^{k-1} \beta_k^{(2)} - R_2^k \beta_k^{(1)}) r^{-k}}{k(R_1^{k-1} R_2^{-k} + R_2^k R_1^{-k-1})} \sin k\theta \right),$$

gdzie $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}, \beta_k^{(1)}$ i $\beta_k^{(2)}$ mają te same znaczenia co w zadaniu 160 (patrz też wskazówkę do tego zadania).

162. Otrzymujemy

$$u(x, y) = A + \frac{A(b-2)}{2a} x - \\ - \frac{4Ab}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \frac{\sinh \frac{(2k+1)\pi x}{b}}{\sinh \frac{(2k+1)\pi a}{b}} \cos \frac{(2k+1)\pi y}{b}.$$

$$163. u(\rho, \varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\sin \frac{n\pi \varphi}{\alpha}}{n}.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne biegunowe.

$$164. u(\rho, \theta) = \frac{1}{3}(1 - \rho^2) + \rho^2 \cos^2 \theta.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne kuliste ρ, θ, φ . Oczywiście rozwiązanie u nie zależy od φ , a więc równanie Laplace'a sprowadza się do równania

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0.$$

$$165. u(x, y) = \frac{Q}{2kab} ((y-b)^2 - (x-a)^2) + C \quad (C = \text{const}).$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania zagadnienia Neumanna:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{Q}{kb}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{Q}{ka}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0,$$

gdzie Q oznacza ilość ciepła wpływającego przez OA i wypływającego przez OB , a k jest współczynnikiem wewnętrznego przewodnictwa cieplnego.

$$166. u(x, y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi y}{a} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^3 \cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}.$$

Wskazówka. Rozwiązania zadania należy szukać w postaci sumy $u=v+w$, gdzie v jest rozwiązaniem równania Poissona, spełniającym warunki

$$v(0, y) = 0, \quad v(a, y) = 0,$$

przy czym v należy szukać w postaci $Ax^2 + Bx + C$, a w jest rozwiązaniem równania Laplace'a, przyjmującym na brzegu prostokąta wartości

$$w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0, \\ w(x, -\frac{1}{2}b) = -v(x), \quad w(x, \frac{1}{2}b) = -v(x).$$

167. Otrzymujemy

$$u(x, y) = \frac{P}{2T} \left(x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \cosh \frac{(2n+1)\pi(b-2y)}{2a}}{(2n+1)^3 \cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right).$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania Poissona

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{P}{T},$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych na obwodzie prostokąta.

168. Otrzymujemy

$$u(x, y) = \frac{16Qa^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(1 - \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi(b-y)}{2a}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a},$$

gdzie k jest współczynnikiem wewnętrznego przewodnictwa cieplnego.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k},$$

przy warunkach brzegowych

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=b} = 0.$$

Należy szukać rozwiązania postaci

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a},$$

gdzie

$$X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}$$

są funkcjami własnymi zagadnienia brzegowego

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(a) = 0.$$

169. Otrzymujemy

$$u(x, y) = \frac{4Qa^2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n}{\mu_n^2(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \left(1 - \frac{h \cosh \frac{\mu_n y}{a}}{\frac{\mu_n}{a} \sinh \frac{\mu_n b}{a} + b \cosh \frac{\mu_n b}{a}} \right) \cos \frac{\mu_n x}{a},$$

gdzie μ_n są dodatnimi pierwiastkami równania $\operatorname{tg} \mu = ah/\mu$, a h jest współczynnikiem wymiany ciepła.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k},$$

przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - hu \Big|_{x=-a} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + hu \Big|_{x=a} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - hu \Big|_{y=-b} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial y} + hu \Big|_{y=b} &= 0. \end{aligned}$$

$$170. u(x, y) = a^2 - (x^2 + y^2).$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne biegunowe.

$$171. u(r, \theta) = -\frac{1}{24} r^4 \sin 2\theta + \frac{R^4}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \theta) + r^2} dt.$$

Wskazówka. Rozwiązania należy szukać w postaci sumy $u(x, y) = v + w$, gdzie

$$v(x, y) = -\frac{1}{12} xy(x^2 + y^2)$$

jest szczególnym rozwiązaniem równania Poissona, a $w(x, y)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

spełniającym warunek brzegowy

$$w|_{r=R} = -v|_{r=R}.$$

$$172. u(r, \varphi) = \left((a^4 + b^4) r^4 - (a^6 + 2b^6) r^2 - (a^2 - 2b^2) \frac{a^4 b^4}{r^2} \right) \frac{\cos 2\varphi}{a^4 + b^4}.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne biegunowe.

173. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{16V}{\pi^2} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi x}{a} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b} \sinh \pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}} (c-z)}{(2m+1)(2n+1) \sinh \pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}} c}. \end{aligned}$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

wewnątrz prostopadłościanu, przy warunkach brzegowych

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, \quad u|_{z=0} = V, \quad u|_{z=c} = 0.$$

174. Otrzymujemy

$$u(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{\mu_n z}{R}}{\sinh \frac{\mu_n h}{R}} \cdot \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho,$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\mu) = 0$.

Wskazówka. Scałkować równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

przy warunkach

$$u(0, z) \text{ skończone}, \quad u(R, z) = 0, \quad u(r, 0) = 0, \quad u(r, h) = f(r).$$

175. Otrzymujemy

$$u(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{\mu_n z}{R} J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\sinh \frac{\mu_n h}{R} J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{R}\right) d\rho,$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_1(\mu) = 0$.

Wskazówka. Drugi z warunków brzegowych w zadaniu 174 należy zastąpić warunkiem następującym:

$$\frac{\partial u(R, z)}{\partial r} = 0.$$

176. Otrzymujemy

$$u(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{\mu_n z}{R}}{\sinh \frac{\mu_n h}{R}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2 R^2}{\mu_n^2}\right) J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\mu J_1(\mu) - \alpha R J_0(\mu) = 0.$$

Wskazówka. Drugi z warunków brzegowych w zadaniu 174 należy zastąpić przez warunek

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u \Big|_{r=R} = 0.$$

$$177. u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{h} \cdot \frac{J_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)}{J_0\left(\frac{n\pi R}{h}\right)} \int_0^h f(x) \sin \frac{n\pi x}{h} dx.$$

$$178. u(r, z) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi z}{h} J_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{h}\right)}{(2n+1) J_0\left(\frac{(2n+1)\pi R}{h}\right)}.$$

$$179. u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi z}{h} \cdot \frac{J_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)}{J_0\left(\frac{n\pi R}{h}\right)} \int_0^h f(x) \cos \frac{n\pi x}{h} dx.$$

Wskazówka. Scałkować równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

przy warunkach

$$u(0, z) \text{ skończone}, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial z} = \frac{\partial u(r, h)}{\partial z} = 0, \quad u(R, z) = f(z).$$

180. Otrzymujemy

$$u(r, z) =$$

$$= 2u_0 R \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \left(\mu_n \cosh \frac{\mu_n (H-z)}{R} + \beta R \sinh \frac{\mu_n (H-z)}{R} \right)}{J_0(\mu_n) (\mu_n^2 + R^2 \gamma^2) \left(\mu_n \cosh \frac{\mu_n H}{R} + \beta R \sinh \frac{\mu_n H}{R} \right)},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\mu J_0'(\mu) + \gamma R J_0(\mu) = 0,$$

 $\gamma = h_1/k$, $\beta = h_2/k$, a h_1 i h_2 są współczynnikami zewnętrznego przewodnictwa cieplnego na bocznej powierzchni walca i na jego górnej podstawie, k zaś jest współczynnikiem wewnętrznego przewodnictwa cieplnego.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

przy warunkach

$$u(0, z) \text{ skończone}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u \Big|_{r=R} = 0, \quad u(r, 0) = u_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u \Big|_{z=H} = 0.$$

181. Otrzymujemy

$$u(r, z) = \frac{2qR^2\gamma}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n J_0(\mu_n) (\mu_n^2 + R^2 \gamma^2)} \cdot \frac{\cosh \frac{\mu_n z}{R}}{\sinh \frac{\mu_n H}{R}},$$

gdzie $\mu_1, \mu_2, \dots$ są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\mu J_0'(\mu) + \gamma R J_0(\mu) = 0.$$

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

przy warunkach

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad -k \left. \frac{\partial u}{\partial z} + q \right|_{z=H} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u \right|_{r=R} = 0.$$

182. Otrzymujemy

$$u(r, \theta) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)(4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi),$$

gdzie $P_n(x)$ są wielomianami Legendre'a.

Wskazówka. Zadanie sprowadza się do całkowania równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0,$$

przy warunku

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} u_0 & \text{dla } 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi, \\ 0 & \text{dla } \theta = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

183. Otrzymujemy

$$u(r, \theta) = \frac{qR}{2k} \left[\frac{1}{2R\gamma} + \frac{r}{R} \cdot \frac{\cos \theta}{1+R\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \cdot \frac{4n+1}{(2n+R\gamma)(2n-1)(n+1)} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right].$$

Wskazówka. Warunek brzegowy w zadaniu 182 należy zastąpić przez warunek

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u \right|_{r=R} = \begin{cases} \frac{q}{k} \cos \theta & \text{dla } 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{2}\pi < \theta < \pi. \end{cases}$$

184. Otrzymujemy

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n(kr)}{\Psi_n(kR)} Y_n(\theta, \varphi),$$

gdzie

$$\Psi_n(x) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}},$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_{nm}(\cos \theta),$$

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\delta_m \pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_S f(\theta, \varphi) P_{nm}(\cos \theta) \cos m\varphi d\sigma,$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\delta_m \pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_S f(\theta, \varphi) P_{nm}(\cos \theta) \sin m\varphi d\sigma,$$

gdzie $\delta_m = 2$ przy $m=0$ oraz $\delta_m = 1$ przy $m > 0$, a $P_{n0}(x) = P_n(x)$.

Zakładamy, że k nie jest wartością własną zagadnienia brzegowego:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad v|_{r=R} = 0.$$

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne kuliste r, θ, φ . Należy szukać rozwiązania postaci

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi).$$

185. Otrzymujemy

$$v(r, \theta, \varphi) = e^{im\varphi} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_{lj}(kr) \frac{P_{lj,m}(\cos \theta)}{P_{lj,m}(\cos \alpha)},$$

gdzie

$$P_{lj,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m},$$

przy czym funkcje $P_l(x)$ są funkcjami Legendre'a, wyrażenie

$$\varphi_{lj}(kr) = \frac{Y_{lj+\frac{1}{2}}(kb) J_{lj+\frac{1}{2}}(kr) - J_{lj+\frac{1}{2}}(kb) Y_{lj+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}},$$

$l_1, l_2, \dots$ są rzeczywistymi pierwiastkami równania

$$(*) \quad Y_{l+\frac{1}{2}}(kb) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - J_{l+\frac{1}{2}}(kb) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) = 0,$$

natomiast

$$a_j = \frac{\int_a^b f(r) \varphi_{l_j}(kr) dr}{\int_a^b \varphi_{l_j}^2(kr) dr}.$$

Zakładamy, że przy danym k równanie $(*)$ ma takie pierwiastki l_j , że $P_{l_j, m}(\cos \alpha) \neq 0$ przy wszystkich j . Jeżeli przy pewnym pierwiastku l_{j_0} jest

$$P_{l_{j_0}, m}(\cos \alpha) = 0,$$

to warunkiem koniecznym rozwiązalności zadania jest

$$a_{j_0} = 0, \quad \text{tj.} \quad \int_a^b f(r) \varphi_{l_{j_0}}(kr) dr = 0.$$

Jeżeli warunek ten jest spełniony, to rozwiązanie określone jest powyższym szeregiem, w którym należy pominąć składnik o numerze $j=j_0$. W tym przypadku rozwiązanie jest określone niejednoznacznie, ponieważ można doń dodać składnik

$$A_{j_0} \varphi_{l_{j_0}}(kr) P_{l_{j_0}, m}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

gdzie A_{j_0} jest dowolną liczbą stałą.

Wskazówka. Wprowadzić współrzędne kuliste r, θ, φ . Należy szukać rozwiązania postaci

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r) P(\theta) e^{im\varphi}.$$

LITERATURA

- Babicz, W. M. i inni, *Równania liniowe fizyki matematycznej*, Warszawa 1970.
- Budak, B. M., Samarski, A. A., Tichonow, A. N., *Zadania i problemy fizyki matematycznej*, Warszawa 1965.
- Krzyżański, M., *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, cz. 1, Warszawa 1957, cz. 2, Warszawa 1962.
- Leja, F., *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, Warszawa 1973.
- Smirnow, W. I., *Matematyka wyższa t. 2*, Warszawa 1966, t. 4 cz. 2 Warszawa 1962.
- Sneddon, I., *Równania różniczkowe cząstkowe*, Warszawa 1962.
- Tichonow, A. N., Samarski, A. A., *Równania fizyki matematycznej*, Warszawa 1963.

SPIS RZECZY

Przedmowa	5
Zadania	7
§1. Sprowadzanie do postaci kanonicznej równań różniczkowych cząstkowych w przypadku dwóch zmiennych niezależnych	8
§2. Metoda charakterystyk	11
§3. Metoda separacji zmiennych	26
Równania typu hiperbolicznego	29
Równania typu parabolicznego	38
Równania typu eliptycznego	45
Odpowiedzi i wskazówki	51
Literatura	133

PAŃSTWOWE
WYDAWNICTWO NAUKOWE

Wydanie III. Nakład 10000 + 150 egz.
Ark. wyd. 6,00. Ark. druk. 8,5. Papier
offset. kl. V, 70 g. 61×86. Oddano do
reprodukcji w lutym 1976 r. Podpisano
do druku w marcu 1976 r. Druk ukoń-
czono w kwietniu 1976 r. Zam. 132/76.

Cena zł 15,—

ZAKŁAD GRAFICZNY
WYDAWNICTW NAUKOWYCH
ŁÓDŹ. UL. ŻWIRKI 2