<u>Zastosowanie szeregów potęgowych do rozwiązywania równań różniczkowych</u>

Ogólny kształt równania liniowego drugiego rzędu jednorodnego o współczynnikach zmiennych ma postać:

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0 \tag{1}$$

Tego typu klasa równań obejmuje wiele zjawisk fizyki i techniki. Wśród nich znajduje się równanie postaci:

$$-y''+u(x)y=\lambda y=hy \tag{2}$$

określane jako stacjonarne równanie Schrödingera (używane w mechanice kwantowej). Tutaj u(x) ma sens energii potencjalnej (potencjał jednej cząstki punktowej). Np. jeżeli $u(x)=x^2$, wówczas otrzymujemy reprezentację przypadku oscylatora harmonicznego ($kx^2/2$).
Analizę tego równania przeprowadzimy poprzez poszukiwanie takiej funkcji $y_\lambda(x)$, gdzie λ oznacza parametr, od którego zależy rozwiązanie. Natomiast działanie operatora jest równe co do stałej.
Stosujemy zaawansowane metody, które pozwalają uzyskać nowe wyrażenia.
Jeżeli funkcja jest analityczna, to rozwijamy ją w szereg potęgowy postaci:

$$y_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n \tag{3}$$

Poszukiwanie rozwiązania w takiej postaci jest podejściem ogólnym. Dlatego potrzebne są warunki początkowe i brzegowe, by takie równanie rozwiązać. Należy dokładnie przy tym podać, jakie są granice, odcinek rozwiązywania.
Niech $x\in(-\infty,\infty)$. Zakładamy, że $y_\lambda(x)\to 0$ $(x\to\pm\infty)$ i pod takim właśnie warunkiem szukamy rozwiązania. Taki warunek ma swoje fizyczne uzasadnienie. $|y_\lambda(x)|^2$ ma sens prawdopodobieństwa odnalezienia cząstki w punkcie x. Stąd nakłada się pewne ograniczenie funkcji dane poprzez unormowanie danej funkcji:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y_\lambda(x)|^2\,dx=1 \tag{4}$$

Podstawmy wobec tego (3) do (1):

$$-y''+x^2y=\lambda y \tag{5}$$

Uwzględniamy (2), co daje:

$$-y'_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n n x^{n-1} \tag{6}$$

a różniczkowanie powyższego daje:

$$-y''_\lambda(x)=\sum_{n=2}^{\infty}C_n n(n-1)x^{n-2} \tag{7}$$

Z powyższych otrzymujemy:

$$-\sum_{n=2}^{\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n-\lambda\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n=0 \tag{8}$$

Podstawą zastosowanej metody rozwiązywania jest stwierdzenie, że funkcje x^n są liniowo niezależne ($\sum_{n=0}^{n}a_n x^n=0 \Rightarrow a_n=0$). Otrzymujemy zatem:

$$\left(-C_2 2(2-1)\right)-\lambda C_0)x^0 + (-C_3 3(2)x^1 - \lambda C_1)x^1 + (-C_4 4\cdot 3 + C_0 - \lambda C_2)x^2 + ... = 0 \qquad (9)$$

W wyrażeniu (6) każdy nawias zeruje się. W przypadku funkcji liniowo niezależnych można napisać, że:

$$\begin{aligned} &2C_2 + \lambda C_0 = 0 \\ &6C_3 + \lambda C_1 = 0 \\ &12C_4 - C_0 + \lambda C_2 = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Np. przy dowolnym n następujący szereg $(n+2)(n+1)C_{n+2} - C_{n-2} + \lambda C_n = 0$ jest dowolnie określony.

Z powyższych rozważań widać, że rozwiązaniem y jest wielkość λ. Wprowadzamy nową funkcję:

$$y(x, C_0, C_1) = e^{-x^2/2}\varphi_\lambda(x, C_1, C_2) \qquad (11)$$

Można udowodnić, że $\varphi_\lambda(x, C_1, C_2)$ jest wielomianem dla $\lambda = \lambda_n \square\ n + \frac{1}{2}$. Szereg dla φ można wyprowadzić, powtarzając procedurę, przy czym szereg urywa się dla pewnych wartości λ. Wynika z tego, że $y_\lambda \to 0$, gdy $x \to \pm\infty$. Taki warunek przy ∞ jest spełniony tylko dla szczególnych wartości λ. Są to wartości własne tego równania lub operatora H.

$$hy_\lambda = \lambda y_\lambda \qquad (12)$$

Takie podejście jest istotne, gdzie do analizy funkcji specjalnych stosuje się metodę rozwinięcia w szereg. Wprowadzane są tu funkcje Hermite'a y_λ.

Ogólnie Metoda szeregów potęgowych (tzw. metoda Frobeniusa)

Mając ogólne równanie różniczkowe zwyczajne jednorodne rzędu n:

$$y^{(n)}(-x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + f_0(x)y = 0 \qquad (13)$$

chcemy znaleźć punkty, w których funkcja y dąży do ∞. Za pomocą przesunięcia można taki punkt sprowadzić do x=0.

Niech x=0 jest punktem, w którym $y(x) \to 0 \square\ x^\nu$, gdzie $\nu < 0$. Oznacza to, że w tym punkcie nie istnieje rozwinięcie w szereg Taylora, a w równaniu $y = x^\nu z(x)$ funkcja z(x) jest już funkcją regularną.

Twierdzenie Równanie (13) posiada rozwiązanie w postaci szeregu

$$y_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\nu} \qquad (14)$$

jeżeli funkcje $f_k(x)$ są regularne w zerze (x=0) i istnieje pewna wartość ε>0 taka, że szereg (14) jest zbieżny w $|x| < \varepsilon$.

Metoda faktoryzacji do równania oscylatora harmonicznego

$$\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x + x^2 \qquad (15)$$

Analizie poddajemy różnicę $x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x$.

$$L = (x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x)\varphi(x) = x\psi' - (x\psi)' = x\psi' - x\psi' - \psi = x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x = -1 \qquad (16)$$

Ten operator w nawiasie jest równoważny do operatora (-1).

$$L = -\frac{d}{dx^2} - 1 + x^2 \qquad (17)$$

Wracamy do równania oscylatora

$$(-\frac{d}{dx^2} + x^2)y = \lambda y \qquad (18)$$

Z tożsamości (16) wynika:

$$\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right)y = (\lambda + 1)y \qquad (19)$$

Można sprawdzić, że

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(-\frac{d}{dx} + x\right) = -\frac{d}{dx^2} + x^2 + 1 \qquad (20)$$

Pozwala to rozwiązać równanie w taki sposób, że wprowadza się operatory:

$$a_+ = \frac{d}{dx} + x \qquad (21)$$

$$a_- = -\frac{d}{dx} + x \qquad (22)$$

przy czym $a_+a_-(a_+y) = (\lambda + 1)a_+y$, gdzie a_+y jest rozwiązaniem równania z operatorem a_+a_- dla wartości własnej $\lambda + 1$. Pamiętać należy, że $a_+^n y$ daje wartość λ większą o n ($\lambda + n$), a a_-y obniża wartość λ o 1 ($\lambda - 1$).

Stąd:

$$a_-y_0 = 0 \qquad (23)$$

i

$$y_n(x) = a_+^n y_0 \qquad (24)$$

Równania (23) i (24) przedstawia zagadnienie o wartościach własnych dla rozwiązania równania.

Podsumowanie

Istnieją dwa sposoby tworzenia funkcji specjalnych:

1. za pomocą szeregów potęgowych

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \qquad (25)$$

gdzie współczynniki a_i określają funkcję (regularną), a w otoczeniu punktu x=0 szukamy rozwiązania równania różniczkowego.

2. za pomocą metody faktoryzacji

$$L = -\frac{d}{dx^2} + x^2 - 1 = \left(-\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right) = A_-A_+ \qquad (26)$$

Tego typu operatory tworzą przestrzeń rozwiązań dla oscylatora kwantowego.

$$A_+(A_-A_+)\psi = A_+\psi = (A_+A_-)A_+\psi \qquad (27)$$

$$A_+(A_-A_+)\psi = (E-1)(A_+\psi) = A_+A_-(A_+\psi) \qquad (28)$$

Mając równanie $A_-A_+\psi = (E-1)\psi$ to mnożąc przez A_+ dostajemy:

$$(A_+A_-)(A_+\psi) = (E-1)A_+\psi \qquad (29)$$

$$\left(A_+A_-\right)\left(A_+\psi\right)=A_-A_+\left(A_+\psi\right)+2\left(A_+\psi\right)=\left(E-1\right)A_+\psi \tag{30}$$
$$\left(A_-A_+\right)\left(A_+\psi\right)=\left(E-3\right)\left(A_+\psi\right) \tag{31}$$
$$L\psi=\left(E-1\right)\psi \tag{32}$$

Krok po kroku podwyższeniu ulega wartość E i w ten sposób otrzymujemy różne wartości parametrów. $\psi=\left(A_-\right)^m\psi_0$ należy do przestrzeni fizycznej (poziomy energii oscylatora harmonicznego) w tym sensie, że $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx<\infty$.

Uwaga W ten sposób można wygenerować wielomiany Legendre'a i funkcje Bessela. Każda z tych funkcji specjalnych rozwiązuje pewne równania różniczkowe drugiego rzędu.

Rozwiązanie przybliżone. Metody numeryczne.

Wcześniej poznaliśmy sposób rozwiązania przybliżonego poprzez szeregi potęgowe. Pewne uogólnienie daje metoda Frobeniusa. Istnieje jednak jeszcze tzw. metoda kodów numerycznych. Oznacza to, że jego podstawą jest możliwość zastępstwa pochodnej $\frac{df}{dx}$ przez różnicę $f\left(n+1\right)-f\left(n\right)$:

$$\frac{df}{dx}\approx\frac{1}{h}\left(f\left(n+1\right)-f\left(n\right)\right),\quad nh\in\left[0,1\right] \tag{1}$$

Istnieje możliwość korzystania z przybliżonego opisu pochodnej, ze wzoru Taylora. Mając funkcję $f\left(x\right)$, istnieje rozwinięcie w szereg Taylora obok punktu $x=n+h$.

$$f\left(x=n+h\right)=f\left(n\right)+f'\left(n\right)h+f''\frac{h^2}{2}+... \tag{2}$$
$$x\in\left(n-\varepsilon,n+\varepsilon\right),\ \ \varepsilon>0 \tag{3}$$

Rozważmy następujące równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$y'=F\left(y,x\right) \tag{4}$$

Równanie to można zastąpić przez

$$\frac{y\left(n+h\right)-y\left(n\right)}{h}=F\left(y\left(n\right),x\right) \tag{5}$$

lub w postaci indeksów jako

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h}=F \tag{6}$$
$$y_{n+1}-y_n=hF \tag{7}$$

Rozważając sytuację fizycznie, to gdy $h\to 0$, punkty leżą gęsto na odcinku i to może stanowić już rozwiązanie. Pozostaje problem zbieżności.

Aby udowodnić, że równanie (6) jest rozwiązaniem (5) trzeba udowodnić, że $y_n\to y\left(x\right)$ przy $h\to 0$. Musi dlatego istnieć przejście graniczne w tym sensie, że $\left|y\left(nh\right)-y_n\right|_{h\to 0}\to 0$.

Wystąpić może pewien problem z określeniem punktów osobliwości. I stąd powstaje pytanie, czy ta metoda daje rozwiązanie tego równania. Podejście do problemu wymaga spełnienia trzech warunków: a) zbieżności, b) prędkości zbiegania, c) stabilności- każde rozwiązanie jest funkcją równania, a małe zmiany powodują małe zmiany rozwiązań.

Na postać zagadnienia fizycznego składa się równanie (5) (albo inne) oraz warunki brzegowe (początkowe).
Rozważmy poniższe zagadnienie brzegowe:

$$\begin{cases} y = F(y, x) \\ y(0) = a \end{cases} \tag{8}$$

Dla równania pierwszego rzędu to jest układ warunków zawierających w sobie pełną informację. W takim przypadku można udowodnić twierdzenie o istnieniu i stabilności przy pewnych ograniczeniach na funkcji f. Rozwiązanie można zaznaczyć jako $y(x,a)$. Twierdzenie daje się udowodnić przez reprezentację równania (5) przez równanie algebraiczne (6). Korzystając z niego napiszemy:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hF(y_n, nh) \\ y_0 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

To najprostszy algorytm do obliczenia. Poza tym łatwo spostrzec, że układ (8) daje się zastąpić przez (9).

Np. $y_1 = y_0 + hF(y_0, 0) \Rightarrow y_1 = a + hF(a, 0)$ (10)

Czasami można wprost scałkować równanie numeryczne. Tak samo da się policzyć z powyższego y_2

$$y_2 = y_1 + hF(y_1, h) = a + hF(a,0) + hF(a + hF(a,0), h) \tag{11}$$

Poza tym występuje możliwość oceny błędu, dokonanego podczas wykonywania obliczeń. Na każdym kroku liczenia pojawia się błąd z nim związany

$$\sum_{n=1}^{N} y''(n)\frac{h^2}{2} \le N_{\max} \tag{12}$$

Algorytm jest taki, ze błąd wzrasta z każdym krokiem liczenia.

$$\sum_{n=1}^{N} y''(n)\frac{h^2}{2} \le N_{\max}\, y''(n)\frac{h^2}{2} \tag{13}$$

Rozwiązanie ogólne zależy od jednego parametru a. Jeżeli druga pochodna istnieje i jest ograniczona, to gdy $h \to 0$, to błąd również dąży do zera. Ważne bowiem jest, by nie tylko stworzyć wyniki, ale również i podać ocenę dokładności, z której można policzyć rozwiązanie na danym odcinku przy zadanych warunkach brzegowych.

Uwaga

1. W podobny sposób można rozważyć równanie drugiego rzędu, przy czym nie oznacza to jednoczesnej możliwości udowodnienia.
2. Istnieje inne podejście (klasyczne) do twierdzenia o istnieniu i o rozwiązaniu przybliżonym przez równanie całkowe.

Stabilność. Ruch chaotyczny.

Stabilność oznacza ciągłą zależność od warunków początkowych. W teorii równań różniczkowych zwyczajnych stabilność jest stabilnością fizyczną

Ciągłość i różniczkowalność rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych względem parametrów zagadnienia fizycznego (równanie + warunki brzegowo- początkowe)

Rozważmy $y'=F(y,x)$. Jest to równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu. $(y(0)=a)$

Rozwiązanie jest funkcją współrzędnej x i parametru a. Jeżeli funkcja $y(x,a)$ jest funkcją ciągłą o zmiennej a, wtedy mówimy, że rozwiązanie jest ciągłym względem warunków brzegowych. Stwierdzenie to ważne jest od strony fizycznej zagadnienia, bowiem pomiary zawsze wykonywane są z pewną dokładnością. Oznacza to, że wartość a jest ustalona z pewnym błędem pomiarowym.
Z kolei brak ciągłości oznacza brak możliwości przewidzenia przyszłości w zagadnieniu, co należy do przypadków szczególnych. Hadamard wprowadził tzw. zagadnienie źle uwarunkowane (ill-posed problem). Występują trzy sytuacje „problemowe":
1.rozwiązanie nie istnieje w pewnych obszarach
2. nie ma jednego rozwiązania
3. rozwiązanie nie ciągle zależy od warunków początkowych albo brzegowych

Podobnie można mówić o zależności parametrów równania:

$$y'=F(y,x,b) \Rightarrow y(x,a,b) \quad (1)$$

W tych przypadkach zagadnienie fizyczne jest źle uwarunkowane, lecz istnieje możliwość poprawy tego zagadnienia. Mówimy wówczas wówczas o tzw. zagadnieniach odwrotnych.

Równania różniczkowe cząstkowe

$$\dot{x}_i = f(x_1,...,x_n) \quad (1)$$

gdzie $x_1,...,x_n \in R^n$

$$x_i(0)=\xi_i \quad (2)$$

$$x_i=\varphi_i(t,\xi) \quad (3)$$

Stabilność (statyczność)
Przykład: zegar wahadłowy

Określenie stabilności wg Lapunowa (1898)
Rozważmy układ równań różniczkowych (1). Załóżmy, że f nie zależy jawnie od czasu (jest to układ autonomiczny). Załóżmy, że istnieje zbiór drugich pochodnych określony jako:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \text{gdzie} \qquad x_i \subset \Delta \subset R^n$$

(4)

$$x_i=\varphi_i(t,\xi),\ \xi=\{\xi_1,...,\xi_n\} \quad (5)$$

Punkt $a \in R^n$ nazywamy punktem stabilności wg Lapunowa jeśli:

1) $\exists\, \rho>0 \qquad |\xi-a|<\rho \qquad \exists\, y(t,\xi) \qquad \forall\, t$

(6)

2) $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists \delta < \rho$ $|\xi - a| < \delta$ $\Rightarrow |\varphi(t,\xi) - a| < \varepsilon$ $\forall\ t$
(7)

3) mówimy, że a jest punktem stabilności asymptotycznej, jeżeli $\exists\, \sigma < \rho$ $|\xi - a| < \sigma$ oraz $\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t,\xi) - a| = 0$ (8)

Warunek stabilności układów liniowych (warunek wystarczający)

$$\dot{x} = Ax \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \\ a_{21} & a_{22} \cdots \\ \vdots & \cdots \\ \vdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

Pytanie: Jaki punkt jest stabilny dla układu liniowego?

$$x' = Tx \tag{11}$$

$$A' = T^{-1}AT = \mathrm{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \tag{12}$$

λ_i to wartości własne macierzy A, $\det(\mathrm{A}\text{-}\lambda\mathrm{I}) = 0$

$$x_i' \sim e^{\lambda i t} \xrightarrow{\lambda_i < 0} 0 \tag{13}$$

$x = T^{-1}x' \longrightarrow 0$ i jest to punkt asymptotycznie stabilny (14)

Jeśli wartości własne macierzy A są mniejsze od zera wówczas możemy powiedzieć, że

$$\exists\, \alpha, r > 0 \qquad |\psi(t,\xi)| \le r|\xi| e^{-\alpha t} \qquad t > 0 \tag{15}$$

wtedy $x = 0$ jest punktem stabilnym (wg Lapunowa) i asymptotycznie stabilnym.

Twierdzenie Liapunowa

Rozważmy dowolny układ (również nieliniowy) (1) przy warunkach (2).

$$x_i = a_i + \Delta x_i \tag{16}$$

a_i stanowi punkt stabilny (równowagi), a Δx_i to odchylenie od punktu równowagi

Podstawiając następnie (16) do równania (1) otrzymujemy:

$$\Delta\dot{x}_i = f^i(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(a)}{\partial x_j} \Delta x_j + R^i, \quad \text{gdzie} \quad \frac{\partial f^i(a)}{\partial x_j} \equiv a_{ij} \tag{17}$$

Uzyskaliśmy rozwinięcie wyrażenia w szereg Taylora.

Jeżeli a jest punktem równowagi, wtedy $f^i(a) = 0$. Otrzymujemy:

$$\Delta\dot{x}^i = \sum a_{ij} \Delta x_j + R^i \tag{18}$$

$$R^i \sim \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{19}$$

Twierdzenie Liapunowa

Jeśli wszystkie wartości własne λ_i macierzy $A=\{a_{ij}\}$ mają $\operatorname{Im}\lambda_i<0$, wtedy punkt a jest asymptotycznie stabilny.
Oznacza to, że
$\exists\, \sigma>0 \quad |\xi-a|<\sigma \qquad |\varphi-a|\le r|\xi-a|e^{-\alpha t}$, gdzie $r>0$, $\alpha>0$ nie zależy od ξ.

<u>Wyprowadzenie równań różniczkowych cząstkowych w fizyce.</u>

Równania struny. Propagacja fal.

Innym przykładem wyprowadzenia równań w stosunku do zjawisk fizycznych jest będące połączeniem zasad fizyki i równań różniczkowych jest drugie prawo Newtona:

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{R} \tag{1}$$

gdzie $\vec{R}$ to równoważąca siła działająca na cząstkę punktową.
Wyrażenie to zastosujemy do wyprowadzenia równania ruchu nieskończonego struny. Obieramy czas t jako dowolny, ale jedyny. Niech U(x) to odchylenie od położenia równowagi. Zakładamy też, że $U(x,t)\ll U_0$. Głównym celem jest połączenie pochodnych przez równanie oraz z geometrią (tj. kąta nachylenia, itp.). Rozważeniom w pewnych warunkach poddajemy małe drgania, wychylenia z położenia równowagi, które powinny zostać określone.
Charakterystyką odchylenia $U(x)$ jest pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial U}{\partial x}\approx\frac{\Delta U}{\Delta x} \tag{2}$$

Wynika z tego. Że $\dfrac{\partial U}{\partial x}=tg\alpha$, gdzie α to kąt nachylenia stycznej, przy czym zakładamy, ze

$$tg\,\alpha\ll 1 \tag{$*$}$$

czyli jest funkcją bezwymiarową.
Drugą funkcją jest $\rho(x)$ tylko jednej współrzędnej:

$$\rho(x)\approx\frac{\Delta m}{\Delta x} \tag{3}$$

Podobnie ważnym elementem tego wyprowadzenia jest siła naprężenia struny $T(x)$. Przy najprostszym założeniu siła $\vec{T}$ jest skierowana wzdłuż stycznej (struna łatwo się wygina). Jeśli struna jest nieskończona, wówczas rozciągnięcie zależy od warunków dla przypadku nieskończoności.
Interesuje nas ruch struny wzdłuż osi y, co oznacza, że:

$$\Delta m\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\approx -T(x)\sin\alpha(x)+T(x+\Delta x)\sin\alpha(x+\Delta x) \tag{$**$}$$

Po prawej stronie wyrażenia mamy sumę sił działających na cząstkę punktową, przy czym znak „$\approx$" oznacza, że rozważamy odcinek, a nie cząstkę punktową, a przyspieszenie jest dla jednej współrzędnych.

Uwaga $\quad \sin\alpha\approx\sim tg\alpha=\dfrac{\partial U}{\partial x}$

Dla (1) uzyskujemy:

$$A(x)=\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\approx\overbrace{-T(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}+T(x+\Delta x)}^{A'} \tag{4}$$

Przyjmujemy, że rozważany odcinek dąży do cząstki punktowej.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F\left(x+\Delta x\right)}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial x} \tag{5}$$

Równanie (6) odtwarza niejako równanie (1). Jest to tzw. drugie równanie Newtona, które również nosi nazwę równania struny. Jest to równanie dwóch zmiennych: x i t. Istnieje przypadek, gdy:

$$\rho\left(x\right)=const\,,\quad \frac{\partial T\left(x\right)}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial \rho}{\partial x}=0 \tag{6}$$

Wtedy mówimy, że struna jest jednorodna. Po dokonaniu pewnych uproszczeń otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=C^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{7}$$

gdzie: $C^2=\dfrac{T}{\rho}$

Równanie struny jest równaniem falowym, jednowymiarowym. Przykład ten pozwala zrozumieć duży ciąg zjawisk. $U\left(x,t\right)$ posiada więc sens fizyczny fali. Za tym stoi cały szereg przybliżeń. Jeżeli kąt nachylenia stycznej jest niewielki, a odchylenie od położenia równowagi także jest małe, wówczas równanie jest liniowe. W przypadku odrzucenia warunku $(*)$ otrzymujemy równanie nieliniowe. Równanie struny jest najprostszym równaniem falowym. Warunek $(**)$ da się uzupełnić, dodając z lewej strony wyrażenia siłę zewnętrzną.

Uwaga 1

$$\left(**\right)+f\left(x,t\right)\Delta x\Rightarrow\left(4\right)+f\left(x,t\right) \tag{8}$$

Z prawej strony (4) należy jeszcze dodać siłę $f\left(x,t\right)$ zmienną w czasie (np. w polu grawitacyjnym lub o pochodzeniu zupełnie innym- np. magnetyczne i wtedy na każdy odcinek działa siła Lorentza zależna od prędkości). Struna stanowi bardzo dobry przykład jednowymiarowy.

Uwaga 2

Równanie w trzech wymiarach ma postać ogólną:

$$\rho\left(x\right)\frac{\partial^2 U\left(r,t\right)}{\partial t^2}=\nabla T\left(\vec{r}\right)\nabla U\left(\vec{r},t\right)+f\left(\vec{r},t\right) \tag{9}$$

Równanie dyfuzji. Przewodnictwo cieplne.

Poniższe równanie

$$C_v\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\left(\kappa\nabla T\right) \tag{1}$$

gdzie $\overline{q}=-\kappa\nabla T$ wynika z prawa Fouriera.

nosi nazwę równania przewodnictwa cieplnego w układzie trójwymiarowym. Podobne równanie można wyprowadzić dla zjawiska dyfuzji.

Dyfuzję można określić jako zmianę koncentracji cząstek w czasie t w obszarze o powierzchni S i objętości V.

$$C\left(\vec{r},t\right)\approx\frac{\Delta \mathrm{m_{cz}}}{\Delta \mathrm{V}} \tag{2}$$

Niech całkowita masa cząstek znajdujących się w obszarze o objętości V wynosi:

$$M = \int_V C(\vec{r},t)\,dV \qquad (*)$$

Prędkość zmiany masy $\frac{\partial M}{\partial t}$ jest sumą strumienia Q cząstek po powierzchni S

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_{S'} \vec{Q}\,d\vec{S} \qquad (3)$$

gdzie $d\vec{S} = \vec{n}dS$, $\vec{n}$ to wektor jednostkowy normalny do powierzchni S.
Równanie (3) wyraża prawo zachowania masy. Strumień cząstek przepływający przez powierzchnię S wyraża równanie:

$$\vec{Q} = -D\nabla C(\vec{r},t) \qquad (4)$$

Jeśli (4) i $(*)$ wstawimy do (2) to uzyskamy równanie formy zamkniętej

$$\int_V \frac{\partial C(\vec{r},t)}{\partial t}dV = \int_{S'} D\frac{\partial C(\vec{r},t)}{\partial n}dS \qquad (5)$$

Stosując prawo Gaussa - Ostrogradskiego do całki powierzchniowej S' otrzymujemy:

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial n} = (\vec{n},\nabla C) = (\vec{n},\nabla)C = \int_{-V} div\left[D(\vec{r})\,grad\,C\right]dV \;\Rightarrow\; \frac{\partial C}{\partial t} = (\nabla D \nabla)C \qquad (6)$$

Równanie (6) to równanie dyfuzji masy.

Uwaga W przypadku obecności źródła masy o $q(r,t)$ dodajemy odpowiedni człon do prawej strony wyrażenia, co daje się zapisać jako:

$$q(r,t) \Rightarrow (3) + \int q\,dV \qquad (7)$$

Przykładem są reakcje chemiczne. Wtedy wynika z tego, że

$$(6) + q(r,t)$$

Najprostszy wyrażenie powstaje w sytuacji jednowymiarowej i przy założeniu, że $\frac{\partial D}{\partial x} = 0$. Wówczas równanie (6) przyjmuje poniższą postać:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (8)$$

Równanie Laplace'a i Poissona. Zagadnienie elektrostatyki.

$$div\vec{B} = 0 \qquad (1)$$

$$div\vec{E} = f(\vec{r}) \qquad (2)$$

Jeżeli $\vec{E} = -grad\,V$ to $-div\,grad\,V = -\nabla^2 V = -\Delta V = f(\vec{r})$ (3)

Powyższe równanie nosi nazwę równania Poissona. Jeżeli $f = 0$, wówczas dostajemy znane równanie Laplace'a. Natomiast kiedy $\vec{r} \in \{x,y\}$, to otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -f(x,y) \qquad (4)$$

Dostajemy równanie o dwóch zmiennych. Jest to równanie Poissona na płaszczyźnie.

Równanie różniczkowe dwóch zmiennych. Klasyfikacja.

Dotychczas rozważaliśmy klasę równań różniczkowych różniczkowych jednej zmiennej. Były to równania różniczkowe zwyczajne. W przypadku występowania dwóch zmiennych sprawa przedstawia się inaczej.
Rozważmy funkcję dwóch zmiennych $U(x,y)$ i równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu, które ogólnie da się przedstawić w postaci:

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=F\left(U_x,U_y,x,y\right) \tag{1}$$

gdzie: $U_x=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\quad U_y=\dfrac{\partial U}{\partial y}$

Równanie (1) to ogólna postać równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu (najwyższa wartość pochodnej) z dwoma zmiennymi o pochodnych cząstkowych.
Równania różniczkowe tego typu da się w pewien sposób uprościć. Dokonamy tego poprzez wprowadzenie nowych zmiennych niezależnych. Otóż każdą ze zmiennych x, y można przedstawić w postaci kombinacji nowych zmiennych:

$\xi=\varphi(x,y)$ oraz $\eta=\psi(x,y)$

Stąd druga postać przybiera inną postać, czyli $U(x,y)\to\tilde{U}(\xi,\eta)$.

Dlatego możemy również napisać:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=U_x=U_\xi\varphi_x+U_\eta\psi_x \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=U_y=U_\xi\varphi_y+U_\eta\psi_y \tag{3}$$

Oznaczamy, że

$$U_{xx}=U_{\xi\xi}\varphi_x^2+2U_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x+U_{\eta\eta}\psi_x^2 \tag{4}$$

$$U_{xy}=U_{\xi\xi}\varphi_y\psi_x+U_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x+U_{\eta\xi}\psi_x\varphi_y+U_{\eta\eta}\psi_x\psi_y+U_\xi\psi_{xy}+U_\eta\psi_{xy} \tag{5}$$

$$U_{yy}=U_{\xi\xi}\varphi_y^2+2U_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y+U_{\eta\eta}\psi_y^2 \tag{6}$$

Następnie równania (4),(5),(6) wstawiamy do (1), wobec czego uzyskujemy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned}&\left(a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2\right)U_{\xi\xi}+2\left[a_{11}\varphi_x\psi_x+2a_{12}\left(\varphi_x\psi_y+\psi_x\varphi_y\right)+a_{22}\varphi_y\psi_y\right]U_{\xi\eta}+\\&+\left(a_{11}\psi_x^2+2a_{12}\psi_x\psi_y+a_{22}\psi_y^2\right)U_{\eta\eta}=\Phi\left(U_\xi,U_\eta,\xi,\eta\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Równanie (7) poddamy teraz analizie. Dokonujemy przekształcenia ze zmiennymi

$\xi=\varphi(x,y)$ oraz $\eta=\psi(x,y)$

Niech

$$\alpha_{11}U_{\xi\xi}+2\alpha_{12}U_{\xi\eta}+\alpha_{22}U_{\eta\eta}=\Phi\left(U_\xi,U_\eta,\xi,\eta\right) \tag{8}$$

$$\alpha_{11}=a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2 \tag{9}$$

$$\alpha_{12}=a_{11}\varphi_x\psi_x+2a_{12}\left(\varphi_x\psi_y+\psi_x\varphi_y\right)+a_{22}\varphi_y\psi_y \tag{10}$$

$$\alpha_{22} = a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2 \tag{11}$$

Rozpoczęliśmy od równania postaci: $a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy}$. Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Wprowadzamy nowe zmienne i dokonujemy przekształcenia, aby zmniejszyć liczbę drugich pochodnych. Dlatego też z (8) α_{11} musi równać się zero. Natomiast rozważmy (9), (10), (11) jako równania dla funkcji φ. Stąd:

$$\alpha_{11} = 0 \tag{12}$$

oraz

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y} + a_{22} = 0 \qquad (\text{ale } \varphi_y \neq 0) \tag{13}$$

Wykonane zostały działania algebraiczne, w wyniku których dostajemy algebraiczne równanie kwadratowe, przy czym φ_x, φ_y to pochodne cząstkowe. Uzyskano równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Można je otrzymać względem tego, że:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = k_\pm \quad \text{kiedy} \quad a_{11} \neq 0 \tag{14}$$

co również można zapisać jako:

$$\varphi_x - k_\pm\varphi_y = 0 \tag{15}$$

Rozważając z kolei równanie (11) uzyskuje się podobne równanie:

$\psi_x - k_\pm\psi_y = 0$ (gdzie dobrano tak współczynniki, by $\alpha_{22} = 0$)

Stwierdzamy, że jeżeli istnieje rozwiązanie φ, ψ, wtedy istnieje rozwiązanie $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$. Przy czym jedno równanie z $k_\pm$ daje φ, a drugie z $k_\pm$ daje ψ.

Metoda charakterystyk

Zmierzamy do rozwiązania równania (15). Można zastosować w tym miejscu metodę, której ideę stanowi wybór współrzędnych wygodnych do scałkowania równania różniczkowego.
Rozważmy wobec tego różniczkę $d\varphi$ w funkcji φ

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = dx\left(\varphi_x + \varphi_y\frac{dy}{dx}\right) \tag{16}$$

Niech $\frac{dy}{dx} = k$ ($\square$ $tg\beta$) β - kąt nachylenia krzywej

Jeżeli $\varphi_x + k\varphi_y = 0$ (17), to z tego wynika, że $d\varphi = 0$. (18)

Otrzymujemy wówczas krzywą postaci: $\frac{dy}{dx} = k(x, y)$ (19)

dla której spełniona jest zależność (18). Widać z powyższego, że udało się sprowadzić równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych (17) sprowadzić do równania zwyczajnego postaci (19). Rozwiązując natomiast to ostatnie równanie dostajemy w wyniku, że

$$\varphi(x, y) = \xi(\text{const}) \tag{20}$$

Powyższe wyrażenie nazywa się całką równania charakterystycznego (19).

Przykład

$$\varphi_x - \varphi_y = 0 \tag{21}$$

Rozwiązanie tego równania wygenerujemy krok po kroku.

$$\frac{dy}{dx} = -1 \tag{22}$$

Po scałkowaniu tego równania dostajemy w wyniku

$$y = -x + C \tag{23}$$

Odpowiednikiem (20) jest tutaj

$$y + x = \xi \tag{24}$$

Należy wspomnieć, że (24) jest szczególnym przykładem równania

$$\varphi(x, y) = y + x$$

Powstaje pytanie, w jaki można stworzyć rozwiązanie ogólne. W tym celu rozpatrzmy płaszczyznę (x, y). Równanie (23) określa rodzinę krzywych dla różnych wartości C. Pozwala to wprowadzić połowę układu odniesienia; jest to zbiór prostych równoległych.
Rozwiązanie ogólne równania (21) jest możliwe do otrzymania. Rozwiązanie to da się zdobyć licząc od punktu x=0 (tzw. zagadnienie Cauchy'ego). Wynika z tego, że:

$$\varphi(0, y) = A(y) \tag{25}$$

Zauważyć należy, że dopiero (25)+(21) tworzy zagadnienie Cauchy'ego, a samo (25) jest zagadnieniem początkowym równania (21). Rozwiązanie jest funkcją zmiennej ξ.

$$\varphi(x, y) = A(\xi) = A(x + y)$$

Twierdzenie

Dowolna funkcja $A(x + y)$ jest rozwiązaniem (21).

$$\varphi_x = \frac{\partial A}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi} = A_\xi$$

$$\varphi_y = A_\xi \xi_y = A_\xi$$

skąd $\varphi_x - \varphi_y = A_\xi - A_\xi = 0$

Uwaga

Jeżeli (25) zawiera funkcje $A(y)$, wtedy $\varphi(x, y) = A(x + y)$ jest rozwiązaniem (21)+ (25) albo zagadnienia Cauchy'ego.

Ogólnie

$A(\xi)$ jest rozwiązaniem równania (15), jeśli tylko $\xi = \varphi(x, y)$ jest całką równania charakterystyk.

Do równania struny

Powyżej udało się rozwiązać równanie powstałe na drodze transformacji równania różniczkowego pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Mając rozwiązanie równania (15) można wprowadzić dwie zmienne, różniące się o czynnik $k_{\pm}$. Z kolei eliminując α_{11} i α_{22}, mamy α_{12} (tu poszczególne czynniki nie wyzerują się).
Wróćmy do postaci ogólnej równania różniczkowego danej przez:

$$\alpha_{12}U_{\xi\eta} = \Phi\left(U_{\xi}, U_{\eta}, U, \xi, \eta\right) \tag{26}$$

Funkcja ta przybiera taką formę ze względu na to, iż udaje się rozwiązać (15) i w dodatku pod warunkiem $k_{+} \neq k_{-}$ W tym przypadku istnieje dwie funkcje:

a) $\xi = \varphi(x, y)$, która jest pierwszą całką $\varphi_x - k_{+} = 0$

b) $\eta = \psi(x, y)$, będąca pierwszą całką $\psi_x - k_{-}\psi_y = 0$

Uzyskujemy w tej sytuacji dwie następujące możliwości:

1. $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ w obszarze $D \subset R^2$

Ogólnie a_{12} i a_{22} są funkcjami, a to oznacza, że k_{+} i k_{-} są rzeczywiste. Wtedy część urojona $\operatorname{Im} k_{\pm} = 0$, co prowadzi do tego, że ξ i η są rzeczywiste. Równanie (20) przyjmuje postać (26) w nowych zmiennych. Wtedy (1) nosi nazwę równania hiperbolicznego hiperbolicznego obszarze. W tych współrzędnych równania są rzeczywiste.

Uwaga

Końcowa forma (26) przedstawia się następująco:

$$U_{\xi\eta} = \Phi\left(U_{\xi}, U_{\eta}, U, \xi, \eta\right) \tag{26'}$$

Równanie (26') to postać kanoniczna równania (26).

2. $\Delta < 0$

W takim przypadku zmienne są zmiennymi zespolonymi

$$k_{\pm} = k_{1,\pm} - k_{2,\pm} \tag{27}$$

Z tego wynika, że

$$\xi = \sigma + i\tau \tag{28}$$

$$\eta = \sigma - i\tau \tag{29}$$

Równania te są sprzężone.

Jeżeli $k_{+} = k_{-}$, wtedy ξ i η są zmiennymi sprzężonymi. Łatwo wówczas przejść do zmiennych

$$\xi + \eta = 2\sigma$$

$$\xi - \eta = 2i\tau$$

przy czym σ i τ są zmiennymi rzeczywistymi. Oznacza to dalej, że

$$U_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta} \square \frac{\partial^2 U}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} = U_{\sigma\sigma} + U_{\tau\tau} = \Delta U(\sigma, \tau) \tag{30}$$

W takim przypadku równanie (1) nazywamy równaniem eliptycznym.

Zaś
$$U_{\sigma\sigma} + U_{\tau\tau} = \Phi_2\left(U_\sigma, U_\tau, U, \sigma, \tau\right) \tag{31}$$
nosi nazwę postaci kanonicznej równania (30).

3. $\Delta = 0$ wtedy $k_+ = k_-$

Otrzymujemy jedno równanie. Istnieje więc wówczas tylko $\xi = \varphi\left(x, y\right)$ (32)

Można dla tego przypadku udowodnić, ze wówczas $\alpha_{12} = 0$. Oznacza to, że jedna zmienna może zostać wybrana jako (29), a druga- dowolnie, np. $\xi = x$. Tzn. aby spełniony był jakobian, który powinien być określony jednoznacznie.
$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_x \\ \varphi_y & \varphi_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{33}$$
Formuła kanoniczna przedstawia się następująco:
$$U_\xi + U_{\eta\eta} = \phi_3\left(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\right) \tag{34}$$

Odnosząc powyższe zagadnienia do fizyki można zauważyć, że w przypadku 3. mamy do czynienia z równaniem dyfuzji. I wtedy $\xi \square t$ oraz $\eta \square x$. Przypadek 2. obrazuje równanie Poissona i $\Delta U = f$. Zaś 1. przedstawia równanie falowe, a w układzie jednowymiarowym jest to już równanie struny. Widzimy więc, ze każde z przedstawionych równań posiada swoją formę kanoniczną. Natomiast mając kształt takiego równania, można już wnioskować o jego typie.

Twierdzenie

Znak $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \Delta$ jest niezmiennikiem transformacji typu $x, y \to \xi, \eta$. Jako współczynnik traktujemy jakobian postaci $\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = J^2\Delta$.

Przedstawione równania, tj. równanie dyfuzji, Poissona, falowe stanowią niejako podstawę fizyki teoretycznej. W oparciu o nie otrzymujemy modele różnych procesów. Można też stwierdzić, że równanie różniczkowe daje podstawy, by zrozumieć fizykę jako całość oraz przewidzieć modele procesów.

Równanie hiperboliczne. Rozwiązanie równania struny. Propagacja fal.

Rozważmy propagację fali płaskiej w próżni.
$$U_{tt} - C^2 U_{xx} = 0 \tag{1}$$
gdzie $C^2 = \dfrac{T}{\rho}$, przy czym: $T_x = const$, $\rho_x = const \Rightarrow$ struna jednorodna

Postępujemy jak podobnie jak dotychczas. Wybieramy metodę charakterystyk. Przechodzimy do zmiennych $\left(x, t\right)$. Przyjmujemy, że $x \in \left(-\infty, \infty\right)$. Sprowadzamy do funkcji kanonicznej
$$\frac{\varphi_x}{\varphi} = k_+ = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{2}$$

Tutaj: $a_{12} = 0$, $a_{11} = 1$, $a_{22} = -C^2$. Natomiast $k_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{C^2}}{1} = \pm C$.

Równanie charakterystyk przedstawia się następująco:

$$\frac{dx}{dt} = \pm C \tag{3}$$

czyli dostajemy dwa różne równania hiperboliczne.

Stąd

$$x - ct = \xi$$
$$x + ct = \eta \tag{4}$$

Uzyskujemy równanie kanoniczne:

$$U_{\xi\eta} = 0 \tag{5}$$

Dostajemy układ współrzędnych ξ i η. Na podstawie powyższego równania możemy zapisać jego ogólne rozwiązanie jako:

$$U = \Phi(\xi) + F(\eta) \tag{6}$$

Natomiast

$$U = \Phi(x - ct) + F(x + ct) \tag{7}$$

stanowi rozwiązanie ogólne (1).