Równania różniczkowe i całkowe w fizyce

Gdańsk, styczeń 2004

1 Równanie różniczkowe zwyczajne

1.1 Pojęcie równania różniczkowego

Pochodna funkcji $y(x)$

$$y^{'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{1.1}$$

Rozważmy równanie różniczkowe

$$y^{'} = f(x). \tag{1.2}$$

Całkując to równanie, możemy znaleźć jego rozwiązanie

$$y(x) = \int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi + const. \tag{1.3}$$

W powyższym równaniu *const* oznacza stałą całkowania. Stała całkowania może być włączona do granic całkowania.

Przykład

$$y^{'} = c \qquad (c = const). \tag{1.4}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$y = cx + const^{'} \tag{1.5}$$

Dostaliśmy rozwiązanaie ogólne, zawiera ono nieskończenie wiele rozwiązań równania. W konkretnym przypadku interesuje nas rozwiązanie szczególne, potrzebna jest dodatkowa informacja - wartość funkcji w jakimś punkcie.

W ogólności trudno jest uzyskać rozwiązanie równania różniczkowego. Sytuacja komplikuje się już przy równaniach drugiego stopnia

$$y^{''} = f(y, x) \tag{1.6}$$

Równanie (1.6) nie ma rozwiązania analitycznego, nie udowodniono jego istnienia.

Równania różniczkowe to jedno z podstawowych narzędzi używanych w fizyce teoretycznej. W równaniach fizyki teoretycznej symbolom matemacznym odpowiadają wilekości fizyczne. Przykład:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x} \tag{1.7}$$

Powyższe wyrażenie nie jest równaniem, a definicją prędkości. Abyśmy mogli mówić o równaniu, musimy znać wielkości, które się w nim pojawią. Wyrażenie

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.8}$$

można nazwać równaniem, o ile wiemy, co kryje się za każdym użytym symbolem. Powszechnie wiadomo, że wzór (1.8) jest jednym z równań Newtona; m oznacza masę ciała, k jest współczynnikiem sprężystości, x określa położenie, a $\ddot{x}$ przyspieszenie. Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Jak je rozwiązać? Można próbować odgadnąć rozwiązanie.
Z matematycznego punktu widzenia najistotniejsze są następujące aspekty:

- Czy istnieje rozwiązanie?
- Czy jest jedno rozwiązanie, czy więcej?
- Rozwiązanie ogólne?
- Stabilność rozwiązania
- Całkowalność rozwiązania

Jeżeli istnieje stabilne, jednoznaczne rozwiązanie, możemy mówić, że mamy do czynienia z fizyką. W fizyce wszystko jest określone jednoznacznie.
Podstawmy do równania (1.8)

$$x(t) = a \sin \omega t. \tag{1.9}$$

Otrzymamy

$$m\omega^2 = k. \tag{1.10}$$

Aby określić wartość stałej a, potrzebujemy warunku początkowego. Ilość potrzebnych warunków początkowych zależy od rzędu pochodnej. Funkcja

$$x(t) = b \cos \omega t \tag{1.11}$$

też jest rozwiązaniem naszego równania. Można więc zapisać

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t. \tag{1.12}$$

Niezbędne warunki początkowe - położenie i prędkość początkowa

$$\begin{cases} x(0) &= x_0 \\ x^{'}(0) &= v_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Potrzebne były dwie wielkości, bo równanie jest drugiego rzędu.
Bardzo istotnym problemem jest stabilność rozwiązania. W fizyce jest toważne, ponieważ wszelkie pomiary dokonywane są z pewną dokładnością. Mówimy, że rozwiązanie jest stabilne, jeśli mała zmiana argumentu $t \to t + \delta$ prowadzi do małej zmiany wartości funkcji $x \to x + \epsilon$.
Zdefiniujmy ϵ i δ:

$$|\widetilde{x} - x| < \epsilon \tag{1.14}$$

$$\left|\widetilde{t} - t\right| < \delta. \tag{1.15}$$

Jeżeli dla każdego (dowolnie małego) ϵ z równania (1.14) istnieje takie δ, że spełnione jest równanie (1.15), to mówimy o stabilności w stosunku do zmian argumentu. Inne ważne pojęcia to stabilność względem warunków początkowych i względem współczynników równania. Są one związane z ciągłością.
Uogólnienie równania (1.8)

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= f_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= f_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= f_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases} \tag{1.16}$$

lub inaczej

$$m\ddot{\vec{r}} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \tag{1.17}$$

Niektóre takie układy mają swoje rozwiązania analityczne.

1.2 Równania o zmiennych rozdzielonych

Rozważmy równanie

$$y^{'} = f(x), \tag{1.18}$$

czyli

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), \tag{1.19}$$

co można zapisać w postaci

$$\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.20}$$

a następnie scałkować.
Jeśli za pomocą pewnych przekształceń równanie można doprowadzić do postaci (1.18) lub (1.20), to dostajemy równanie o zmiennych rozdzielonych. To, czy jest możliwe takie przekształcenie, można sprawdzić za pomocą teorii grup Lie'go.

1.3 Równanie liniowe rzędu pierwszego

Równanie jest liniowe, jeśli niewiadome i ich pochodne występują w pierwszej potędze. Równanie

$$\dot{x} = \exp(x) = \sum_n \frac{x^n}{n!} \tag{1.21}$$

nie jest liniowe. W fizyce najważniejszym przykładem procesu nieliniowego jest zależność od amplitudy

$$x = a\varphi(t), \qquad\qquad a - \text{amplituda}. \tag{1.22}$$

W procesach liniowych efekty nie zależą od amplitudy.
Ogólna postać równania różniczkowego pierwszego rzędu:

$$y^{'} = f(x, y). \tag{1.23}$$

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu zawsze ma rozwiązanie - można udowodnić, że dla równań pierwszego rzędu rozwiązanie zawsze istnieje.
Matematycznie - zamiana $y \to \alpha y$ prowadzi do nowego równania, które jest równoważne do (1.23). Takie przekształcenie nazywamy przeskalowaniem. Przeskalowanie jest ważne w fizyce, skala określa wymiar fizyczny. Jeśli równanie różniczkowe jest symetryczne względem przeskalowania niewiadomych, to jest liniowe. Mamy

$$y \to \alpha y = \widetilde{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\widetilde{y}}{\alpha} \tag{1.24}$$

zatem

$$y^{'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\widetilde{y}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}x}. \tag{1.25}$$

Nasze równanie różniczkowe zapiszemy w postaci

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{\widetilde{y}}{\alpha}, x\right) \tag{1.26}$$

czyli

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}x} = \alpha f\left(\frac{\widetilde{y}}{\alpha}, x\right) = f(\widetilde{y}, x). \tag{1.27}$$

w ostatniej równości założyliśmy, że funkcja f spełnia odpowiedni warunek niezmienniczości. Nie każda funkcja f spełnia ten warunek, tylko funkcje liniowe względem y dają równania liniowe. W ogólności

$$f(\widetilde{y}, x) = A(x)\widetilde{y} + B(x). \tag{1.28}$$

Zgodnie z (1.27) musi zachodzić

$$A\alpha y + B = (Ay + B)\alpha \tag{1.29}$$

stąd wynika, że

$$B = 0 \tag{1.30}$$

a nasze równanie liniowe ma postać

$$y^{'} = A(x)y. \tag{1.31}$$

Jak widać, równanie (1.31) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y \tag{1.32}$$

stąd

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = A(x)\mathrm{d}x. \tag{1.33}$$

Całkując powyższe równanie, mamy

$$\ln y = \int_0^x A(x)\mathrm{d}x + \ln C \tag{1.34}$$

ostatecznie, można zapisać

$$y(x) = C \exp\left(\int_0^x A(x)\mathrm{d}x\right) \tag{1.35}$$

Wzór (1.35) określa rozwiązanie ogólne równania liniowego (1.23). Wielkość $\ln C$ jest stałą całkowania.

13.10.2003

1.4 Równania liniowe drugiego rzędu, mechanika cząstki punktowej. Oscylator

Ogólne równanie drugiego rzędu

$$y^{''} = f(y^{'}, y, x). \tag{1.36}$$

Nie istnieje twierdzenie, mówiące o tym, że rozwiązanie tego równania zawsze istnieje.
Równanie liniowe drugiego rzędu (występuje symetria względem przekształcenia $\widetilde{y} = \alpha y$):

$$A(x)y^{''} + B(x)y^{'} + C(x)y = 0. \tag{1.37}$$

W przypadku równań rzędu drugiego poszukiwanie rozwiązań jest bardziej skomplikowane niż dla równań rzędu pierwszego. Nawet dla równań liniowych tudno jest znaleźć rozwiązania ogólne.

Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu są bardzo często wykorzystywane w fizyce. Zapiszmy równanie (1.37) w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \alpha(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta(x)y = 0. \tag{1.38}$$

Niech zmienna x reprezentuje czas. Pochodne po czasie zwykle oznacza się kropkami

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.39}$$

$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.40}$$

Równanie w postaci

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0, \tag{1.41}$$

gdzie α i β są stałe, opisuje oscylator liniowy tłumiony. Każdemu symbolowi odpowiada pewna wielkość fizyczna: m jest masą cząstki punktowej, wykonującej drgania, y opisuje położenie tej cząstki, składnik $\alpha\dot{y}$ reprezentuje siły tłumienia, a $\beta y = ky$ siłę Hooke'a.

W nierelatywistycznej mechanice kwantowej jednym z podstawowych równań jest

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{1.42}$$

Jest to jedna z postaci równania Schrödingera. W powyższym wzorze $\hbar$ jest stałą Plancka, m jest masą cząstki, x opisuje jej położenie, $\Psi(x)$ jest tzw. funkcją falową, $U(x)$ reprezentuje energię potencjalną, a E jest wartością własną tego równania i odpowiada energii całkowitej cząstki. Interesuje nas rozwiązanie tego równania wraz z pewnym warunkiem brzegowym. Rówanie (1.42) wraz z narzuconym warunkiem będzie przykładem tzw. zagadnienia własnego. W wyniku rozwiązania tego zagadnienia własnego otrzymujemy zbiór wartości własnych $\{E_i\}$ (jest to tzw. widmo energii czyli zbiór możliwych wartości energii) oraz funkcje własne $\Psi_E(x)$. Jeśli narzucamy warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_E|^2 \, \mathrm{d}x < \infty, \tag{1.43}$$

uzyskamy widmo dyskretne, energia będzie mogła przyjąć jedną ze zbioru konkretnych wartości. Warunek (1.43) oznacza, że opisywana cząstka jest fizycznie zlokalizowana wokół pewnego miejsca, mówimy, że cząstka jest związana. W procesach niestacjonarnych (np. w zjawiskach rozpraszania) dodajemy do równania Schrödingera inne warunki i wówczas możemy otrzymać tzw. widmo ciągłe, tzn. energia będzie mogła przyjąć wartość dowolną. W pewnych zagadnieniach można również otrzymać widmo mieszane. Charakter widma zależy także od $U(x)$. Jeśli $U(x) = 0$, otrzymamy tylko widmo ciągłe. A w przypadku tzw. nieskończonej studni potencjału

$$U(x) = \begin{cases} -\infty & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{dla} \quad x > a \end{cases} \tag{1.44}$$

dostaniemy tylko widmo dyskretne.

Do równania (1.41) dodajemy warunki początkowe

$$y(0) = y_0, \qquad \dot{y}(0) = v_0 \tag{1.45}$$

Łącząc (1.41) i (1.45), dostajemy zagadnienie własne dla jednowymiarowego oscylatora tłumionego.

Zagadnienia własne często spotyka sie również w teorii rezonatorów akustycznych i elektromagnetycznych.

1.4.1 Ruch jednowymiarowy cząstki punktowej

Mamy cząstkę punktową o masie m, niech $x(t)$ oznacza położenie tej cząstki w chwili t. Ruch tej cząstki można opisać równaniem

$$m\ddot{x} = R(x). \tag{1.46}$$

Rozwiązanie $x(t)$ będzie zależało od położenia początkowego x_0 i prędkości początkowej v_0. Na podstawie przesłanek fizycznych ustalamy przedziały $t \in [0, +\infty)$ oraz $x \in (-\infty, +\infty)$. Mnożąc równanie (1.46) przez $\dot{x}$, dostaniemy

$$m\dot{x}\ddot{x} = R(x)\dot{x}. \tag{1.47}$$

Na podstawie własności pochodnej funkcji złożonej, wiemy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\dot{x}, \tag{1.48}$$

zatem można zapisać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2\right) = 2\dot{x}\ddot{x}. \tag{1.49}$$

Korzystając z (1.49), uzyskamy

$$\frac{1}{2}\, m \,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2\right) = R(x)\dot{x}. \tag{1.50}$$

Skorzystajmy jeszcze raz z równania (1.48), zapiszmy je w postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(x) = \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\dot{x}. \tag{1.51}$$

Załóżmy, że istnieje taka funkcja $U(x)$, że

$$\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -R(x). \tag{1.52}$$

Aby to było możliwe, funkcja $R(x)$ musi być całkowalna. Równanie (1.50) przyjmie teraz postać

$$\frac{1}{2}\, m\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2\right) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \tag{1.53}$$

a po scałkowaniu

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E, \tag{1.54}$$

gdzie E jest stałą, którą nazwiemy energią. Wyrażenie (1.54) jest całką pierwszą równania (1.46), można je nazwać prawem zachowania energii. Równanie (1.52) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, więc łatwo znajdujemy

$$U(x) = -\int_{-\infty}^{x} R(x^{'})\mathrm{d}x^{'}. \tag{1.55}$$

Równanie (1.54) jest równaniem różniczkowym - zawiera pochodną po czasie. W ogólności, gdy mamy do czynienia z wyrażeniem

$$F(\dot{x}, x, t) = 0, \tag{1.56}$$

próbujemy doprowadzić je do postaci

$$\dot{x} = f(x, t). \tag{1.57}$$

W naszym przypadku

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U), \tag{1.58}$$

a w konsekwencji

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}. \tag{1.59}$$

Znów mamy do czynienia z równaniem o zmiennych rozdzielonych

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\left(E - U(x)\right)/m}}, \tag{1.60}$$

a stąd

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(E - U(x))}} + const. \tag{1.61}$$

W przypadku, gdy wartośc energii będzie równa E_3, $E_1 < E_3 < E_2$ i $x \in [x_1(E_3); x_2(E_3)]$ (patrz rysunek). Ruch będzie okresowy, okres będzie wynosił T:

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(E - U(x))}}. \tag{1.62}$$

Na podstawie wzoru (1.54)

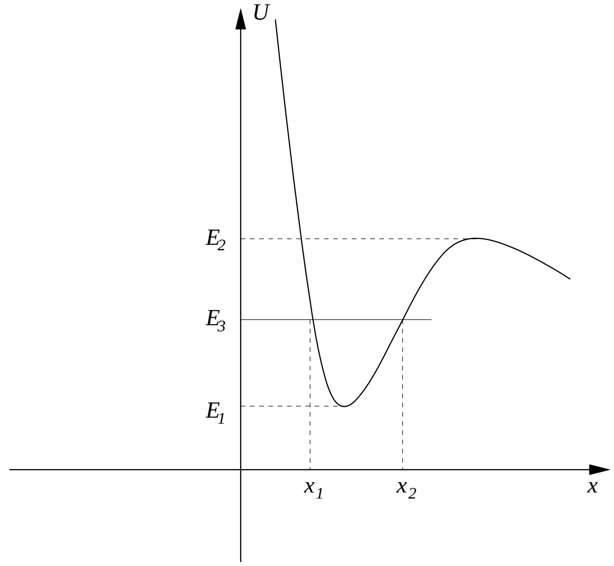
$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U, \tag{1.63}$$

więc dla $E = U$, mamy $\dot{x} = 0$, cząstka będzie się w tych punktach zatrzymywać i zawracać. A zatem cząstka nigdy nie wyleci poza obszar $[x_1; x_2]$, nigdy nie zajdzie warunek $E < U$, są to "punkty wzbronione" - prędkość nie może być ujemna.

1.4.2 Wahadło sferyczne

Cząstka zawieszona jest na nieważkiej nici i może poruszać sie nie tylko w płaszczyźnie. Opis w trzech wymiarach, początek układu współrzędnych umieszczamy w punkcie zaczepienia nici. Układ współrzędnych sferycznych (l, θ, φ), θ - kąt biegunowy, φ - kąt azymutalny. Nić jest nierozciągliwa, l oznacza długość nici, $\dot{l} = 0$. Składowe prędkości są do siebie ortogonalne

$$v_\theta = l\dot{\theta}, \tag{1.64}$$



Rysunek 1: Przykład potencjału w równaniu (1.61)

$$v_\varphi = l \sin\theta \dot{\varphi}. \tag{1.65}$$

Energia

$$E = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_\theta^2 + v_\varphi^2\right) = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2\right). \tag{1.66}$$

Można pokazać, że

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.67}$$

tzn. że E jest stałe. Mówimy, że E jest stała ruchu. Jest jeszcze druga stała ruchu. Równanie zachowania momentu pędu:

$$m\rho v_\varphi = ml^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} = M\varphi = const, \tag{1.68}$$

gdzie

$$\rho = l \sin\theta. \tag{1.69}$$

Równania (1.66) i (1.68) tworzą układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu. Z (1.68) wyznaczamy $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{M\varphi^2}{m^2 l^4 \sin^4\theta} \tag{1.70}$$

i podstawiamy do (1.66) :

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M\varphi^2 ml^2}{2m^2 l^4 \sin^2\theta} = E, \tag{1.71}$$

stąd

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ml^2}\left(E - \frac{M\varphi^2}{2ml^2 \sin^2\theta}\right) \tag{1.72}$$

pierwiastkujemy i całkujemy

$$t = \int \left[\frac{2}{ml^2}\left(E - \frac{M\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta}\right)\right]^{-1/2} \mathrm{d}\theta \tag{1.73}$$

Nie ma rozwiązań za pomocą funkcji elementarnych. Rozwiązanie wyraża sie przez funkcje eliptyczne (przykład tzw. funkcji specjalnych). Mając zależność $\theta(t)$ podstawiamy ją do (1.70).

20.10.2003

Przypomnienie. Załóżmy, że istnieje taka funkcja $U(x)$, że siłę $F(x)$ można zapisać

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{1.74}$$

Z równania Newtona

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{1.75}$$

wynika, że

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U = const, \tag{1.76}$$

$$\dot{E}(x, \dot{x}) = 0. \tag{1.77}$$

Mówimy, że E jest pierwszą całką ruchu. Znajdujemy prędkość

$$\dot{x} = \phi(x, E) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{1.78}$$

a stąd wyznaczamy

$$t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\phi}, \tag{1.79}$$

jest to druga całka ruchu.
Problem całkowalności układów równań różniczkowych

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_n), \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.80}$$

Liouville sformułował twierdzenie o całkowalności układu (1.80). Nie zawsze istnieje rozwiązanie (1.80). Gdy istnieje n całek ruchu $C_i, \quad i = 1, ..., n$ i gdy nawias Piossona

$$\{C_i, C_j\} = 0, \tag{1.81}$$

to istnieje rozwiązanie (1.80) w postaci całek (kwadratura), patrz książka Ince'a.

1.4.3 Całki eliptyczne

W książce "Higher Transcendental Functions" vol. 3 - o funkcjach eliptycznych i automorficznych. Problemem związanym z całkami eliptycznymi jest odnalezienie $x(t)$, gdyż mamy wyrażenie na t.

Określenie
Całka eliptyczna

$$I = \int R(x, y)\, \mathrm{d}x, \tag{1.82}$$

gdzie R jest funkcją wymierną ułamkową

$$R = \frac{Q(x, y)}{S(x, y)} \tag{1.83}$$

a y jest pierwiastkiem wielomianu rzędu n

$$y(x) = \sqrt{P_n(x)}. \tag{1.84}$$

Dążymy do znalezienia krzywej $y(x)$.

1.4.4 Oscylator

Równanie oscylatora niettłumionego

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0. \tag{1.85}$$

Weźmy funkcję

$$f(t) = e^{\gamma t}, \tag{1.86}$$

jej pochodna

$$\dot{f}(t) = \gamma\, e^{\gamma t}. \tag{1.87}$$

Weźmy

$$x(t) = C\, e^{\gamma t}, \tag{1.88}$$

i wstawmy to do równania oscylatora (1.85)

$$e^{\gamma t}\left(m\gamma^2 + \alpha\gamma + \beta\right) = 0. \tag{1.89}$$

Stąd otrzymujemy wielomian charakterystyczny

$$m\gamma^2 + \alpha\gamma + \beta = 0, \tag{1.90}$$

którego pierwiastkami są

$$\gamma_{\pm} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{\beta}{m}}. \tag{1.91}$$

Równanie oscylatora jest liniowe, daje to możliwość przeskalowania zmiennych. Z liniowości równania wynika również zasada superpozycji: jeśli istnieją dwa rozwiązania x_1 i x_2 równania (1.85), to wtedy

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 \tag{1.92}$$

również jest rozwiązaniem (1.85)

$$x(t) = C_1e^{\gamma_+ t} + C_2e^{\gamma_- t}. \tag{1.93}$$

Pytanie, czy (1.93) określa rozwiązanie ogólne (1.85) ? Pojęcie liniowej niezależności funkcji. Funkcje x_i są liniowo niezależne na pewnym odcinku, jeśli ich kombinacja liniowa zeruje się tylko w przypadku, gdy współczynniki C_i są równe zeru:

$$C_1x_1(x) + C_2x_2(x) + ... + C_nx_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_i = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{1.94}$$

Można pokazać, że funkcje $e^{\gamma_\pm t}$ są liniowo niezależne. Mamy warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = v_0, \tag{1.95}$$

uwzględniamy je w (1.93)

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0, \tag{1.96}$$

$$\dot{x}(0) = C_1\gamma_+ + C_2\gamma_- = v_0. \tag{1.97}$$

Warunek istnienia rozwiązań - niezerowy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_+ & \gamma_- \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.98}$$

zatem

$$\gamma_- - \gamma_+ = -2\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{\beta}{m}} \neq 0. \tag{1.99}$$

Tw.
Jeśli $\gamma_- \neq \gamma_+$, to wzór (1.93) określa jednoznacznie rozwiązanie równania (1.85).

To znaczy, że można przy jego pomocy rozwiązać dowolne zagadnienie początkowe (czyli wyznaczyć stałe C_1 i C_2). Gdy $\gamma_- = \gamma_+$, to istnieje drugie rozwiązanie o postaci

$$x(t) = t\, e^{\gamma t}. \tag{1.100}$$

Uwaga fizyczna.
Wielkość x opisuje położenie ciała, część urojona x jest równa zeru

$$\mathrm{Im} x = 0, \quad \Rightarrow \quad x^* = x, \tag{1.101}$$

gdzie * oznacza sprzężenie zespolone. Znamy tożsamości

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x, \tag{1.102}$$

$$e^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x, \tag{1.103}$$

'i' - jest jednostką urojoną. Pamiętamy, że

$$\gamma_\pm = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{\beta}{m}}, \tag{1.104}$$

zatem γ może być zespolone. W takim wypadku zapiszemy

$$x = C_1 \cos\gamma_+ t + C_2 \cos\gamma_- t + \mathrm{i}\left(C_1 \sin\gamma_+ t + C_2 \sin\gamma_- t\right). \tag{1.105}$$

Przepiszmy równanie (1.85) w postaci

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - \beta x. \tag{1.106}$$

Równanie to może opisywać ruch ciała o masie m, wykonującego drgania na sprężynie. Człon $-\alpha\dot{x}$ opisuje siły oporu, a $F_H = -\beta x$ jest siłą Hooke'a ($\beta > 0$). Przy słabym tłumieniu siła Hooke'a jest dużo większa od siły tłumiącej, stąd wynika

$$\frac{\alpha^2}{4m^2} << \frac{\beta}{m}. \tag{1.107}$$

Przy powyższym założeniu, zapiszemy

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{\beta}{m}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\beta}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} = \mathrm{i}\omega, \tag{1.108}$$

wielkość ω będzie opisywać częstość drgań. Rozpiszmy

$$e^{\gamma_+ t} = \exp\left[\frac{-\alpha t}{2m}\right]\left(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t\right) \tag{1.109}$$

$$e^{\gamma_- t} = \exp\left[\frac{-\alpha t}{2m}\right]\left(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t\right). \tag{1.110}$$

Podstawimy to do naszego $x(t)$

$$x = C_1 e^{\gamma_+ t} + C_2 e^{\gamma_- t} = \exp\left[\frac{-\alpha t}{2m}\right]\left(C_1\cos\omega t + C_2\cos\omega t + \mathrm{i}C_1\sin\omega t - \mathrm{i}C_2\sin\omega t\right). \tag{1.111}$$

Cząstka będzie oscylować, amplituda oscylacji będzie malała eksponencjalnie. Okres drgań będzie wynosił

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.112}$$

Ogólny sposób postępowania przy rozwiązywaniu równania:

- uzyskanie rozwiązań szczególnych
- uzyskanie rozwiązania ogólnego
- warunki początkowe (brzegowe)
- końcowe rozwiązanie (wybór stałych)

27.10.2003

1.5 Rozwiązywanie równań niejednorodnych o współczynnikach stałych

1.5.1 Określenie równania niejednorodnego i ogólne twierdzenia

W poniższym równaniu $x = x(t)$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f(t). \tag{1.113}$$

Jeśli w tym równaniu $f(t) = 0$, równanie to będzie jednorodne. Natomiast jeśli funkcja $f(t)$ nie jest tożsamościowo równa zeru, i jest niezależna od rozwiązania $x(t)$, wówczas równanie (1.113) będzie równaniem niejednorodnym. Takie równanie może służyć np. do opisu wahadła tłumionego, poddanego działaniu pewnej zewnętrznej siły wymuszającej drgania.

Równanie (1.113) można zapisać następująco

$$\left(m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + k\right)x = f(t). \tag{1.114}$$

Definiując operator $\hat{L}$

$$\hat{L} = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + k, \tag{1.115}$$

równanie (1.114) przepiszemy w postaci

$$\hat{L}x = f(t). \tag{1.116}$$

Funkcja $x(t)$ oraz $\hat{L}(x)$ powinny należeć do pewnej przestrzeni funkcyjnej U. Interesuje nas przypadek, kiedy operator jest liniowy, tzn.

$$\hat{L}(ax_1 + bx_2) = a\hat{L}x_1 + b\hat{L}x_2. \tag{1.117}$$

Działanie operatora liniowego na kombinację liniową dwóch rożwiązań jest równoważne kombinacji liniowej rozwiązań poddanych działaniu tego operatora.

Wzór (1.116) jest najogólniejszą postacią naszego równania niejednorodnego. Formalnie można zapisać

$$x = \hat{L}^{-1}f \tag{1.118}$$

Niech $x_0(t)$ będzie rozwiązaniem równania jednorodnego

$$\hat{L}x_0 = 0. \tag{1.119}$$

Przez podstawienie można sprawdzić, że poniższa postać $x_0(t)$ spełnia równanie (1.119)

$$x_0(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t\right), \tag{1.120}$$

przy czym ω_0 jest częstością drgań własnych, a γ jest współczynnikiem tłumienia. Funkcja ta opisuje oscylacje zanikające z upływem czasu. Poszukiwanie rozwiązania równania niejednorodnego jest bardziej złożone.

Tw.
Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania równania jednorodnego $x_0(t)$ i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego $x_n(t)$

$$x = x_0 + x_n \tag{1.121}$$

Rozwiązanie ogólne będzie zawierało w sobie wszystkie możliwe położenia początkowe i prędkości początkowe. Niech funkcja $f(t)$ w równaniu (1.113) opisuje siłę wymuszającą o częstości ω

$$f(t) = f_0 \cos \omega t. \tag{1.122}$$

Rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego będzie w naszym przypadku

$$x_n(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \tag{1.123}$$

Funkcje sin i cos są liniowo niezależne, a więc x_n będzie się mogło na jakimś odcinku wyzerować tylko wtedy, gdy obie stałe A i B będą równe zeru. Podstawiając równanie (1.123) do (1.113), otrzymamy

$$-m\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \alpha\omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t) + k(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = f_0 \cos \omega t. \tag{1.124}$$

Korzystamy z liniowej niezależności sin i cos (zapisujemy osobno czynniki stojące przy $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$)

$$-m\omega^2 A + \alpha\omega B + kA = f_0 \tag{1.125}$$

$$-m\omega^2 B - \alpha\omega A + kB = 0. \tag{1.126}$$

Z powyższego układu równań obliczamy wartości stałych A i B i otrzymamy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego a w konsekwencji rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (1.113)

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t) + A \cos \omega t + B \sin \omega t. \tag{1.127}$$

W rozwiązaniu tym możemy uwzględnić dowolne warunki początkowe

$$x(0) = x_{00} \qquad \text{(położenie początkowe)}, \tag{1.128}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \qquad \text{(prędkość początkowa)}. \tag{1.129}$$

1.5.2 Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

Ogólna postać liniowego równanania pierwszego rzędu

$$\dot{x}(t) + \varphi(t)x(t) = \psi(t). \tag{1.130}$$

Jeśli $\psi \not\equiv 0$, to równanie jest niejednorodne. Znajdźmy rozwiązanie $x_0(t)$ równania jednorodnego

$$\dot{x}_0(t) + \varphi(t)x_0(t) = 0. \tag{1.131}$$

Zapiszmy to w postaci

$$\frac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\varphi(t)x_0(t), \tag{1.132}$$

stąd

$$\frac{\mathrm{d}x_0(t)}{x_0(t)} = -\varphi(t)\mathrm{d}t. \tag{1.133}$$

Po scałkowaniu mamy

$$\ln |x_0(t)| = -\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.134}$$

więc

$$x_0(t) = C \exp\left(-\int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \tag{1.135}$$

gdzie stała C zawiera całkę od t_0 do t. Wprowadźmy oznaczenie

$$T(t) = \exp\left(-\int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \tag{1.136}$$

$$x_0(t) = CT(t). \tag{1.137}$$

Dla $t = 0$

$$T(0) = 1 \qquad \Rightarrow X(0) = C = x_{00}. \tag{1.138}$$

Rozwiązujemy równanie niejednorodne, poprzez założenie, że C jest funkcją t (uzmiennianie stałej)

$$x_n(t) = C(t)T(t). \tag{1.139}$$

Podstawiając (1.139) do (1.130), mamy

$$\dot{C}T + C\dot{T} + \varphi CT = \psi \tag{1.140}$$

ale na ponieważ T jest rozwiązaniem równania jednorodnego, zachodzi

$$C\left(\dot{T} + \varphi T\right) = 0. \tag{1.141}$$

W równaniu (1.140) pozostanie

$$\dot{C}T = \psi, \tag{1.142}$$

więc

$$\dot{C} = \psi/T, \tag{1.143}$$

stąd, po uwzględnieniu (1.136)

$$C(t) = \int_0^t \psi(\tau)\exp\left(\int_0^\tau \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau. \tag{1.144}$$

Ostatecznie, rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego przyjmie postać

$$x_n(t) = \left[\exp\left(-\int_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right] \cdot \int_0^t \psi(\tau)\exp\left(\int_0^\tau \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau. \tag{1.145}$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego będzie sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego

$$x(t) = x_0(t) + x_n(t). \tag{1.146}$$

1.5.3 Równanie dowolnego rzędu. Metoda faktoryzacji

W przypadku wielomianów czasami wygodne jest zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej

$$P_2(x) = x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2). \tag{1.147}$$

Szukamy czegoś analogicznego dla równań różniczkowych, aby móc je rozwiązywać algorytmicznie. Mając równanie różniczkowe

$$\hat{L}x = f \tag{1.148}$$

możemy jego rozwiązanie zapisać następująco

$$x = \hat{L}^{-1}f. \tag{1.149}$$

Jeśli operator $\hat{L}$ (zawierający różniczkowanie) można przedstawić jako iloczyn dwóch operatorów

$$\hat{L} = \hat{L}_1 \hat{L}_2, \tag{1.150}$$

to

$$x = \hat{L}_2^{-1} \hat{L}_1^{-1} f. \tag{1.151}$$

Mamy równanie rzędu n (rząd jest liczbą całkowitą), niech funkcja $y(x)$ będzie różniczkowalna do rzędu n włącznie

$$a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x) y^{'}(x) + a_0(x) y(x) = f(x). \tag{1.152}$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n, liniowe, niejednorodne. Przyjmijmy, że $a_k(x) = const$, dla $k = 0...n$, mamy wówczas rówanie o stałych współczynnikach. Przyjęte oznaczenia:

$$y^{'}(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}, \tag{1.153}$$

$$y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y(x)}{\mathrm{d}x^n}. \tag{1.154}$$

Weźmy $n = 2$, $a_2 \neq 0$

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + a_0 y(x) = f(x). \tag{1.155}$$

Otrzymaliśmy znów równanie opisujące oscylator. Założyliśmy, że $a_i(x) = const$, zatem

$$\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{1.156}$$

Równanie (1.155) dzielimy przez a_2, ale dla wygody pozostajemy przy tych samych oznaczeniach

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y = f \tag{1.157}$$

czyli

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0 \right) y = f. \tag{1.158}$$

Operator występujący po lewej stronie równania (1.158) przypomina trójmian z równania (1.147). Zapiszmy

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - b_1 \right) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - b_2 \right) y = f. \tag{1.159}$$

Wprowadźmy funkcję z

$$z = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - b_2 \right) y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - b_2 y. \tag{1.160}$$

Dostajemy równanie pierwszego rzędu.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - b_1 z = f. \tag{1.161}$$

Zapiszmy równanie równoważne do (1.130)

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \varphi \right) y = \psi. \tag{1.162}$$

W powyższym równaniu spróbujemy zapisać lewą stronę w nieco inny sposób. Na podstawie rachunku pochodnych można pokazać, że

$$g^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(gy) = g^{-1}(g^{'} y + g y^{'}) = g^{-1} g^{'} y + y^{'} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + g^{-1} g^{'} \right) y, \tag{1.163}$$

przy czym

$$g^{-1}g = \frac{1}{g}g = 1. \tag{1.164}$$

Porównując lewą stronę (1.162) i prawą (1.163), zapiszmy

$$g^{-1}g^{'} = \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = -\varphi. \tag{1.165}$$

Po scałkowaniu uzyskamy

$$g = \exp\left(-\int_0^x \varphi \,\mathrm{d}\xi\right). \tag{1.166}$$

Przykładowo, gdy $\varphi = c_1 = const$, to

$$g = \exp\left(-c_1 x\right). \tag{1.167}$$

Na podstawie (1.162), (1.163) i (1.165) mamy

$$g^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(gy) = \psi. \tag{1.168}$$

Mnożymy powyższe równanie przez g:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(gy) = g\psi \tag{1.169}$$

całkujemy:

$$g(x)y(x) = \int_0^x \left(g(\xi)\psi(\xi)\right) \mathrm{d}\xi \tag{1.170}$$

i otrzymujemy

$$y(x) = \frac{1}{g(x)}\int_0^x \left(g(\xi)\psi(\xi)\right) \mathrm{d}\xi. \tag{1.171}$$

Powyższe rozumowanie możemy zastosować do równania (1.161). Dojdziemy do postaci:

$$\exp\left(b_1 x\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\exp\left(-b_1 x\right) z(x)\right] = f(x) \tag{1.172}$$

i do rozwiązania

$$z(x) = \exp\left(b_1 x\right)\int_0^x \exp\left(-b_1 x\right) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.173}$$

Przepiszmy równanie (1.160)

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - b_2\right) y(x) = z(x) \tag{1.174}$$

i działamy według tego samego schematu, jak powyżej. Dostajemy

$$\exp\left(b_2 x\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\exp\left(-b_2 x\right) y(x)\right] = z(x) \tag{1.175}$$

i rozwiązanie

$$y(x) = \exp\left(b_2 x\right)\int_0^x \exp\left(-b_2 x\right) z(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.176}$$

Podstawiając (1.173), otrzymujemy rozwiązanie równania niejednorodnego drugiego rzędu o stałych współczynnikach, dla dowolnej funkcji $f(x)$. Fizycznie - rozwiązanie zagadnienia liniowego wahadła z dowolnym napędem.

Metoda pozwala rozwiązywać równania dowolnego rzędu.

03.11.2003

Operator różniczkowania - odwzorowuje funkcję na jej pochodną

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x)\big] = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f^{'}(x). \tag{1.177}$$

Operator mnożenia przez funkcję

$$\alpha(x)\big[f(x)\big] = \alpha f \tag{1.178}$$

odwzorowuje funkcję f na iloczyn αf. Suma operatorów

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha(x)\right) f(x) &= f^{'}(x) + \alpha(x)f(x) = \exp\left(\varphi(x)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\left(-\varphi(x)\right) f(x) \\ &= e^{\varphi}\left(-\varphi^{'} e^{-\varphi} f + e^{-\varphi} f^{'}\right) = \left(-\varphi^{'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) f(x).\end{aligned} \tag{1.179}$$

Aby to było słuszne, musi zachodzić

$$\alpha(x) = -\varphi^{'}(x) \tag{1.180}$$

czyli

$$\varphi(x) = -\int \alpha(x)\mathrm{d}x, \tag{1.181}$$

a jeśli $\alpha = const$, to

$$\varphi(x) = -\alpha x. \tag{1.182}$$

Rozważmy równanie

$$y^{''} + ay^{'} + by = f. \tag{1.183}$$

Zapiszmy też

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \beta\right) y = f \tag{1.184}$$

czyli

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\beta + \alpha\beta\right) y = f \tag{1.185}$$

a jeśli β jest stałe,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (\alpha+\beta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha\beta\right) y = f. \tag{1.186}$$

Na podstawie (1.183) i (1.186) mamy

$$\alpha + \beta = a, \qquad \alpha\cdot\beta = b. \tag{1.187}$$

W przypadku równania kwadratowego związki pomiędzy pierwiastkami równania a współczynnikami określały wzory Viete'a.

Porównując (1.184) z rozumowaniem (1.179)–(1.182), zapiszemy

$$e^{-\alpha x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\; e^{\alpha x}e^{-\beta x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\; e^{\beta x}y = f. \tag{1.188}$$

Stąd

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\; e^{(\alpha-\beta)x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\; e^{\beta x}y = e^{\alpha x}f. \tag{1.189}$$

Po scałkowaniu:

$$e^{(\alpha-\beta)x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\; e^{\beta x}y = \int e^{\alpha x}f\;\mathrm{d}x + C_1 \tag{1.190}$$

a dalej

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, e^{\beta x} y = e^{(\beta-\alpha)x} \int_0^x e^{\alpha x^{'}} f(x^{'})\, \mathrm{d}x^{'} + e^{(\beta-\alpha)x} C_1, \tag{1.191}$$

stąd

$$y = e^{-\beta x} \int_0^x e^{(\beta-\alpha)x^{''}} \int_0^{x^{''}} e^{\alpha x^{'}} f(x^{'})\, \mathrm{d}x^{'}\, \mathrm{d}x^{''} + \frac{C_1}{\beta-\alpha} e^{(\beta-\alpha)x} e^{-\beta x} + C_2 e^{-\beta x} \tag{1.192}$$

przy czym $\alpha \neq \beta$. Ostatecznie

$$y(x) = e^{-\beta x} \int_0^x e^{(\beta-\alpha)x^{''}} \int_0^{x^{''}} e^{\alpha x^{'}} f(x^{'})\, \mathrm{d}x^{'}\, \mathrm{d}x^{''} + C_1^{'}\, e^{-\alpha x} + C_2 e^{-\beta x}. \tag{1.193}$$

Jest to rozwiązanie ogólne. Rozważmy przykład $\alpha = \beta$, wtedy równanie (1.184) będzie równoważne

$$e^{-\alpha x} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} e^{\alpha x} y = f. \tag{1.194}$$

Rozwiązniem będzie

$$y(x) = e^{-\alpha x} \int_0^x \int_0^{x^{'}} e^{\alpha x^{''}} f(x^{''})\, \mathrm{d}x^{''}\, \mathrm{d}x^{'} + (C_1 x + C_2)\, e^{-\alpha x}. \tag{1.195}$$

Tw.
Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (1.184) w przypadku $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \neq 0$ jest określone wzorem (1.193), a w przypadku $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$ wzorem (1.195). Dla równania jednorodnego rozwiązaniem jest

$$y(x) = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{-\beta x}. \tag{1.196}$$

W przypadku, gdy równanie (1.184) jest jednorodne, równanie

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \tag{1.197}$$

nazywa się równaniem charakterystycznym równania różniczkowego (1.184). Można z niego wyznaczyć wartość α

Wszystkie powyższe rozważania są słuszne dla równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Metodę faktoryzacji można też stosować dla równań o zmiennych współczynnikach, ale jest to trudne. Duże trudności są również w przypadku równań o pochodnych cząstkowych.

My przeprowadziliśmy algorytm metody faktoryzacji dla równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Ogólnie

$$\left[a_n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n-1} + ... + a_0\right] y = f. \tag{1.198}$$

Równanie charakterystyczne będzie rzędu n

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_0 = 0. \tag{1.199}$$

Zgodnie z twierdzeniem Abela równanie to może być rozwiązane analitycznie dla $n \neq 4$ - rozwiązanie przez pierwiastki. Dla $n = 3$ lub $n = 4$ można korzystać ze wzorów Cardano. Twierdzenie Abela udowodnił E. Galois. Dla α_i różnych rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (1.198) ma postać:

$$y(x) = \sum_{i-1}^{n} C_i e^{-\alpha_i x}. \tag{1.200}$$

Dla $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = \alpha$:

$$y(x) = P_m(x) e^{-\alpha x} + C_{m+1} e^{-\alpha_{m+1} x} + ... + C_n e^{-\alpha_n x}, \tag{1.201}$$

gdzie $P_m(x)$ jest wielomianem.

1.6 Równanie różniczkowe zupełne (exact)

Do tej pory przy równaniach pierwszego rzędu mieliśmy

$$F(y^{'}, y, x) = 0, \tag{1.202}$$

co zapisywaliśmy w postaci

$$y^{'} = f(y, x) \tag{1.203}$$

lub

$$\mathrm{d}y = f(y, x)\mathrm{d}x. \tag{1.204}$$

Postać ogólniejsza:

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.205}$$

Oczywiście (1.204) jest szczególnym przypadkiem równania (1.205). Równanie (1.205) jest bardzo ważne w fizyce. Np. pierwszą zasadę termodynamiki zapisujemy

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V, \tag{1.206}$$

a w procesach adiabatycznych

$$\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = 0. \tag{1.207}$$

δQ oznacza wielkość przekazanego ciepła, $\mathrm{d}U$ - zmianę energii wewnętrznej, a $p\mathrm{d}V$ - pracę elementarną.

Wyrażenie P(x,y) d$x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ nazywa się formą Pfaffa I rzędu. Rozważmy funkcję dwóch zmiennych $u(x, y)$, niech ta funkcja posiada pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial u}{\partial y}$. Różniczką tej funkcji nazywamy wielkość

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{1.208}$$

Jeśli $\mathrm{d}u = 0$, to $u = const$. Porównując (1.205) i (1.208), otrzymujemy warunek zupełności

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1.209}$$

jest on skutkiem warunku Schwartza

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \tag{1.210}$$

Wyrażenie (1.209) jest warunkiem koniecznym całkowalności równania (1.205). Sformułujemy i udowodnimy warunek dostateczny. Rozważmy funkcję

$$u = \int_{x_o}^{x} P(x, y)\mathrm{d}x + \varphi(y). \tag{1.211}$$

Pokażemy, że jest ona rozwiązaniem równania (1.205). Obliczamy

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_o}^{x} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\mathrm{d}x + \varphi^{'}(y), \tag{1.212}$$

a po skorzystaniu z (1.209)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_o}^{x} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \varphi^{'}(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi^{'}(y). \tag{1.213}$$

Wiemy, że

$$Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.214}$$

Uwzględniamy to w (1.213) a następnie całkujemy po y:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\mathrm{d}y \tag{1.215}$$

i mamy

$$u(x, y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\mathrm{d}y = c. \tag{1.216}$$

Jest to całka rówania (1.205), $\mathrm{d}u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = c$. Wzór (1.216) jest warunkiem dostatecznym całkowalności równania (1.205). Zawiera trzy stałe x_0, y_0 i c. Wybór x_0 i y_0 prowadzi do zmiany, przeskalowania c.

Ćw.
Rozwiązać

$$\frac{2x - y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{2y + x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y = 0. \tag{1.217}$$

Rozwiązanie:

$$\ln(x^2 + y^2) - \mathrm{arctg}\frac{x}{y} = c. \tag{1.218}$$

Sposób dojścia do rozwiązania: wycałkować zgodnie z (1.216).

1.7 Metoda uzmiennienia stałych

Przy rozwiązywaniu równań niejednorodnych dowolnego rzędu stałe zastępujemy funkcjami $C_i(x)$.

1.8 Uwagi fizyczne o zagadnieniach brzegowych. Przykłady fizyczne i techniczne

Warunki brzegowe decydują o konkretnych wartościach stałcyh, występujących w rozwiązaniach. Równanie Newtona

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t). \tag{1.219}$$

Potrzebne są dwa warunki

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = v_0. \tag{1.220}$$

Równanie jest drugiego rzędu, w rozwiązaniu pojawią się dwie stałe

$$x = \varphi(t, C_1, C_2). \tag{1.221}$$

Załóżmy, że czas $t \in [0, \infty)$. Wartości stałych C_1 i C_2 uzyskamy z układu równań

$$x(0) = \varphi(0, C_1, C_2). \tag{1.222}$$

$$\dot{x}(0) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{1.223}$$

Przykład
Przewodnictwo cieplne w zagadnieniach jednowymiarowych. Mamy pręt, którego początek umieszczamy w punkcie $x = 0$ i temperaturze T_1 a koniec w $x = L$ i T_2. Wzdłuż pręta będzie przepływać ciepło, zajdzie propagacja. Po pewnym czasie proces stanie się stacjonarny - ustabilizuje się i rozkład temperatury T nie będzie zależał od czasu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \tag{1.224}$$

Strumień ciepła, czyli ilość ciepła przepływającą przez jednostkową powierzchnię, oznaczamy jako q. Zgodnie z prawem Fouriera

$$q = -\kappa(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \tag{1.225}$$

κ - współczynnik przewodnictwa cieplnego. W stanie stacjonarnym w dowolnym miejscu wartość strumienia ze strony lewej i prawej będą jednakowe, temperatura nie będzie zależała od czasu, a tylko od położenia x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\kappa(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = 0. \tag{1.226}$$

W ogólności pręt może być niejednorodny, dlatego założyliśmy, że κ jest funkcją x. Przekształcamy powyższe równanie

$$\kappa\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{1.227}$$

Oznaczmy

$$y = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}. \tag{1.228}$$

Mamy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\kappa^{'}}{\kappa} \tag{1.229}$$

a stąd

$$\mathrm{d}y = -\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\,\mathrm{d}x \tag{1.230}$$

czyli

$$y = -\int\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\,\mathrm{d}x + C_1 \tag{1.231}$$

i

$$y = -\ln\kappa + C_1 \tag{1.232}$$

a ze wzoru (1.228) widzimy, że

$$T = \int y\,\mathrm{d}x + C_2. \tag{1.233}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe

$$T(0) = T_1, \qquad T(L) = T_2, \tag{1.234}$$

założmy, że $\kappa = const$, a więc $\kappa^{'} = 0$, dostajemy

$$T(x) = C_1x + C_2, \tag{1.235}$$

przy czym

$$C_2 = T_1, \tag{1.236}$$

a ponieważ

$$T(L) = C_1L + T_1 = T_2, \tag{1.237}$$

stąd

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}. \tag{1.238}$$