Metody Matematyczne Fizyki 2003

Andrzej Sitarz

ROZDZIAŁ 1

Równania różniczkowe hipergeometryczne

Rozważamy równania rózniczkowe zwyczajne drugiego rzędu postaci:

$$p(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + q(x)\frac{d\phi(x)}{dx} + \lambda\phi(x) = 0, \tag{0.1}$$

gdzie p i q są wielomianami stopnia najwyżej drugiego. Równanie takie jest szczególnym przypadkiem równania postaci:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \tau(x)\frac{d\phi(x)}{dx} + \sigma(x)\lambda\phi(x) = 0, \tag{0.2}$$

gdzie $\tau(x)$ oraz $\sigma(x)$ są funkcjami wymiernymi postaci:

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{1-a_1-a_2}{x-x_1} + \frac{1-b_1-b_2}{x-x_2} + \frac{1-c_1-c_2}{x-x_3},\\ \sigma(x) &= a_1a_2\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{(x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3)} + b_1b_2\frac{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)^2(x-x_3)}\\ &\quad + c_1c_2\frac{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2}.\end{aligned} \tag{0.3}$$

gdzie x_1, x_2, x_3 mogą być dowolnymi liczbami zespolonymi (włącznie z $x = \infty$).
Na przykład, jeśli $x_1 = 0$ a $x_2 = \infty$ a $a_1 = c_1 = 0$, dostajemy (po wyeliminowaniu członów znikających) równanie postaci:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \left(\frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} + \frac{ab}{x(1-x)}\right)\frac{d\phi(x)}{dx} = 0, \tag{0.4}$$

przy oznaczeniach $c = 1 - a_2$, $a = b_1$,$b = b_2$ oraz $c_2 = c - a - b$ - jest to równanie hipergeometryczne.
Rozważmy nast'epujęace przykłady równań tego typu (): zauważmy, iż używając translacji w zmiennej x, przeskalowania całego równania lub przeskalowania x możemy sprowadzić równanie do postaci kanonicznej, to jest ustalić współczynnik przy najwyższej potędze x w $p(x)$, bądź przeskalować pierwiastek wielomianu tak by był w $x = 0$.

1. (równanie o stałych współczynnikach)

- $p(x) = 1$, $q(x) = c$.

  Rozwiązania, które znajdujemy w sposób standardowy są postaci:

  $$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},$$

  gdzie λ_i są pierwiastkami równania kwadratowego: $\lambda_i^2 + c\lambda_i + \lambda = 0$. a jeśli jest jeden pierwiastek podwójny λ_0:

  $$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x},$$

2. (równanie Hermite'a)

- $p(x) = 1$, $q(x) = -2x$, $\lambda = 2a$:

3. (równanie hipergeometryczne typu ${}_0F_1$)

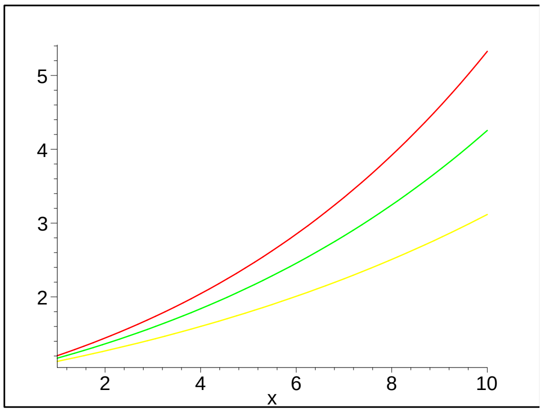
- $p(x) = x$, $q(x) = c$, $\lambda = -1$:

  Dla przypadku c różnego od liczby całkowitej ujemnej rozwiązanie wyraża się za pomocą funkcji hipergeometrycznej typu ${}_0F_1(c; x)$ określonej jako:

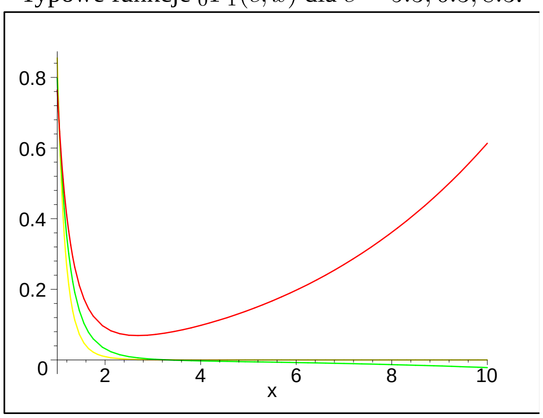
$$ {}_0F_1(c;x) = \Gamma(c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\Gamma(n+c)}, $$

drugim rozwiązaniem podstawowym jest:

$$ x^{2-c}{}_0F_1(2-c;x). $$



Typowe funkcje ${}_0F_1(c;x)$ dla $c = 5.3, 6.3, 8.3.$



Typowe funkcje $x^{2-c}{}_0F_1(2-c;x)$ dla $c = 5.3, 6.3, 8.3.$

Jeśli c jest liczbą ałkowitą, jedno z rozwiązań jest dobrze określone, natomiast drugie jest osobliwe. Stosujemytedy metodę Frobeniusa.

4.(równanie hipergeometryczne konfluentne)

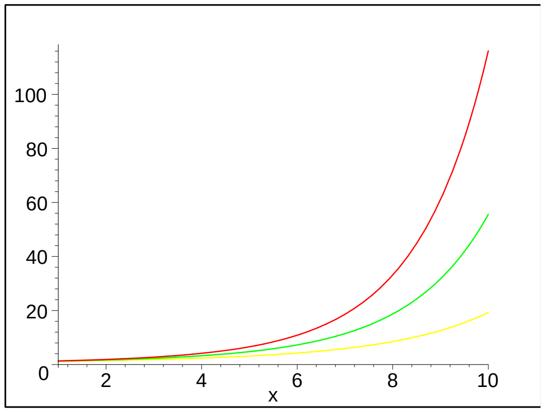
- $p(x) = x$, $q(x) = (c - x)$, $\lambda = -a$

Dla przypadku c różnego od liczby całkowitej ujemnej rozwiązanie podstawowe jest postaci:

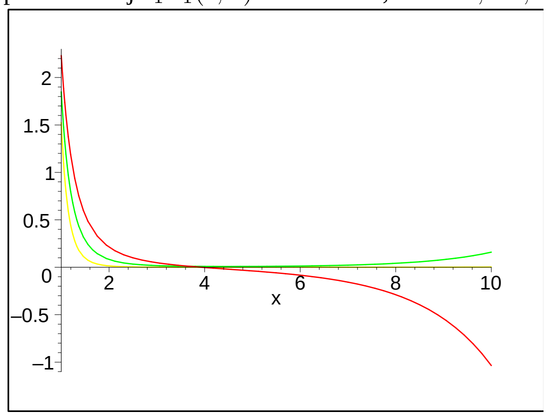
$$ {}_1F_1(a,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n+c)}\frac{x^n}{n!}, $$

Analogicznie znajdujemy drugie rozwiązanie:

$$ x^{1-c}{}_1F_1(a-c+1, 2-c;x) $$



Typowe funkcje ${}_1F_1(c;x)$ dla $a = 1.5$, $c = 5.3, 6.3, 8.3$.



Typowe funkcje $x^{1-c}{}_1F_1(a-c+1, 2-c; x)$ dla $a = 1.5$, $c = 5.3, 6.3, 8.3$.

Rozwiązania w postaci funkcji hipergeometrycznej są dobrze określone jeśli c nie jest

5. (równanie jednorodne Eulera)

- $p(x) = x^2$, $q(x) = bx$, $\lambda = -a$,:

To równanie ma rozwiązania podstawowe postaci:

$$x_1^{\lambda}, \quad x_2^{\lambda},$$

gdzie λ_1, λ_2 są pierwiastkami równania kwadratowego:

$$\lambda_i(\lambda_i - 1) + 2b\lambda_1 - 2a = 0.$$

Jeśli λ_0 jest pierwiastkiem podwójnym to rozwiązaniami podstawowymi są:

$$x_0^{\lambda}, \quad \log(x)x_0^{\lambda},$$

6. (równanie hipergeometryczne $(2,0)$)

- $p(x) = x^2$, $q(x) = 1 + (1 + a + b)x$, $\lambda = ab$,

7. (równanie hipergeometryczne)

- $p(x) = x(1-x)$, $q(x) = c - (1 + a + b)x$, $\lambda = -ab$,

Rozwiązania podstawowe są postaci:

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} x^n,$$

oraz

$$x^{1-c}{}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; x).$$

0.1. Metoda Frobeniusa. Rozważmy szereg określający rozwiązanie równania (**??**):

$$F(s,x) = x^s \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

Wyrazy o najniższych potęgach x pochodzą od członów:

$$p(x)s(s-1)a_0 x^{s-2} + q(x)sa_0 x^{s-1} + x^s a_0,$$

a zatem aby istniało rozwiązanie musimy założyć (dla przykładu), iż $p(x)$ jest postaci $x + \ldots$ podczas gdy $q(x)$ jest postaci $a + x + \ldots$... Dla pozostałych współczynników dostajemy relacje rekurencyjne, które – jak zakładamy potrafimy rozwiązać dostając efektywnie $a_n(s)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.
Warunkiem istnienia rozwiązania jest by s spełniało:

$$s(s-1) + sa = 0.$$

Jeśli jednak współczynniki $a_n(s)$ są osobliwe dla jednego z pierwiastków (na przykład $s = 0$) możemy próbować szukać rozwiązania postaci:

$$\left(\partial_s s F(s,x)\right)_{s=0}$$

Na przykład jeśli rozwiązanie dla równania typu ${}_0F_1$ z $\mathbb{Z} \ni c = -k < 0$ mamy:

$$a_n(s) = \frac{\Gamma(s-k)}{\Gamma(n+s-k)}$$

Rozwijając w szereg dla małych s mamy, dla $n < k$:

$$a_n(s) = \frac{(n-k)!}{k!} + o(s),$$

podczas gdy dla $n \geq k$

$$a_n(s) = \frac{1}{k!(n-k-1)!}\frac{1}{s} + c(n,k) + o(s).$$

gdzie $c(n,k)$ jest funkcją n, k:

$$c(n,k) = \left(\partial_s \frac{1}{(s+n-k-1)(s+n-k-2)\cdots(s+1)(s-1)\cdots(s-k+1)(s-k)}\right)_{s=0}$$

Możemy teraz obliczyć $\left(\partial_s s F(s,x)\right)_{s=0}$ (licząc po kolei $\left(\partial_s s a_n(s) x^{n+s}\right)_{s=0}$), (tutaj dla $n \geq k$):

$$\begin{aligned}\left(\partial_s s a_n(s) x^{n+s}\right)_{s=0} = \\ = n\ln(x) x^n \tfrac{1}{k!(n-k-1)!} + c(n,k)x^n.\end{aligned}$$

0.2. Własności funkcji hipergeometrycznej.

Jeśli ${}_2F_1(a,b,c;x)$ jest rozwiązaniem równania hipergeometrycznego to:

- $x^{1-c}{}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$ jest rozwiązaniem niezależnym
- ${}_2F_1(a,b,a+b+1-c;1-x)$, $(1-x)^{c-a-b}{}_2F_1(c-b, c-a, 1+c-a-b; 1-x)$ są rozwiązaniami (wokół $x = 1$).
- $x^{-a}{}_2F_1(a, a-c+1, a-b+1; \frac{1}{x})$, $x^{-b}{}_2F_1(b, b-a+1, b-a+1; \frac{1}{x})$ są rozwiązaniami (wokół $x = \infty$).
- pochodna funkcji hipergeometrycznej:

$$\frac{d^n}{dx^n}{}_2F_1(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)}{}_2F_1(a+n, b+n, c+n; x)$$

- Przykłady funkcji hipergeometrycznych:

$$_2F_1(-a, b, b; x) = (1-x)^a,$$

$$_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; x^2) = \frac{1}{x}\text{arc sin}x,$$

$$_2F_1(1, 1, 3; -x) = \frac{2}{x^2}(\log(1+x) + x\log(1+x) - 1).$$

$$x_1F_1(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2) = \in_0^x e^{-t^2}dt = \text{Erf}(x), \quad \textit{funkcja błędu)}$$

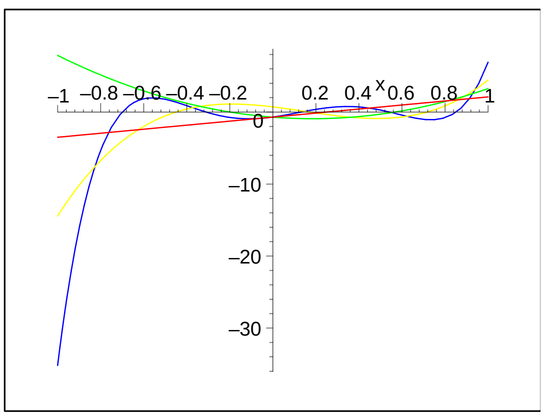
Całkowe przedstawienie funkcji hipergeometrycznej konfluentnej:

$$_1F_1(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt.$$

Szczególne przypadki funkcji hipergeometrycznej konfluentnej dla parametrów całkowitych (i połówkowych) omawiamy poniżej.

0.3. Wielomiany Jacobiego. Wielomiany Jacobiego stanowią szczególny przypadek funkcji hipergeometrycznej dla parametru a całkowitego:

$$J_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; \frac{1-x}{2}).$$



Wielomiany Jacobiego na przedziale $[-1, 1]$, $n = 1, 2, 3, 5$ dla $\alpha = 1.1, \beta = 2.5$,

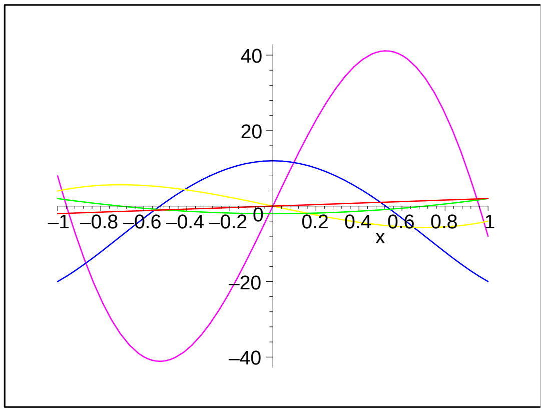
Wielomiany Jacobiego spełniają równanie:

$$(1-x^2)J_n^{\alpha,\beta}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha - \beta + 2)x)J_n^{\alpha,\beta}(x)' + (n+\alpha+\beta+1)J_n^{\alpha,\beta}(x) = 0.$$

0.4. Wielomiany Hermite'a i Laguerre'a.

Wielomiany Hermite'a są specjalnymi typami funkcji hipergeometrycznej konfluntnej (a raczej kombinacjami liniowymi rozwi'azań podstawowych) dla połowkowego parametru a:

$$H_n(x) = 2^n \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-n}{2})} {}_1F_1(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}; \sqrt{2}x) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{n}{2})} {}_1F_1(\frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}; \sqrt{2}x) \right).$$



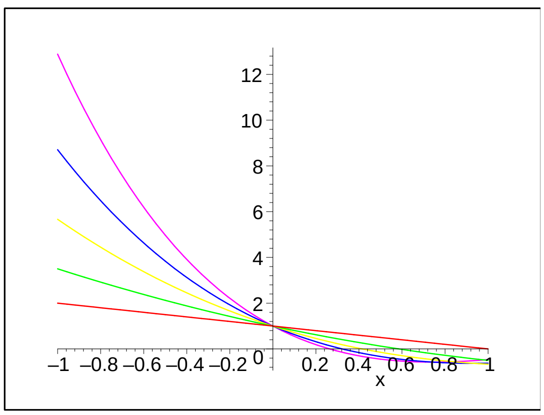
Wielomiany Hermite'a na przedziale $[-1, 1]$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Funkcje postaci $f_n(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2} H_n(x)$ są rozwiązaniami równania:

$$f_n''(x) + (\frac{1-n}{2} - \frac{1}{4}x^2) f_n = 0.$$

Wielomiany Laguerre'a są zdefiniowane jako:

$$L_n^\mu(x) = \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\mu+1)} {}_1F_1(-n, \mu+1; x).$$



Wielomiany Laguerre'a ($\mu = 0$) na przedziale $[-1, 1]$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$

0.5. Funkcje Bessela. Równanie Bessel'a:

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + 9x^2 - m^2) u(x) = 0.$$

po podstawieniu: $u(x) = x^m e^{-ix} v(x)$ prowadzi do równania:

$$x v'' + ((2m+1) - 2ix) v' - i(2m+1) v = 0.$$

którego rozwiązaniami są funkcje Bessela pierwszego rodzaju:

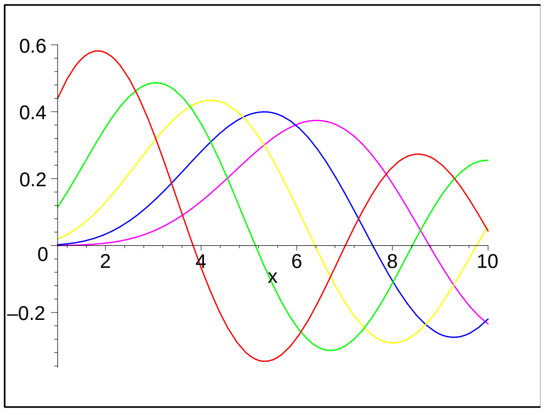
$$J_m(x) = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m e^{-ix} {}_1F_1(m + \frac{1}{2}, 2m+1; 2ix).$$

$J_m(x)$ oraz $J_{-m}(x)$ są dwoma niezależnymi rozwiązaniami za wyjątkiem sytuacji kiedy m jest całkowite, wtedy:

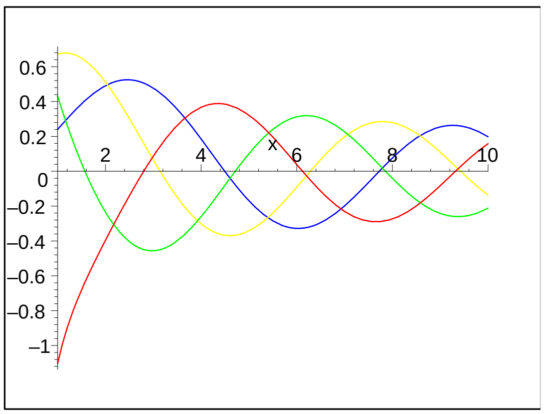
$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

Postać całkowa unkcji Bessela:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} t^{-m-1} dt.$$



Całkowite funkcje Bessel'a na przedziale $[1, 10]$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$

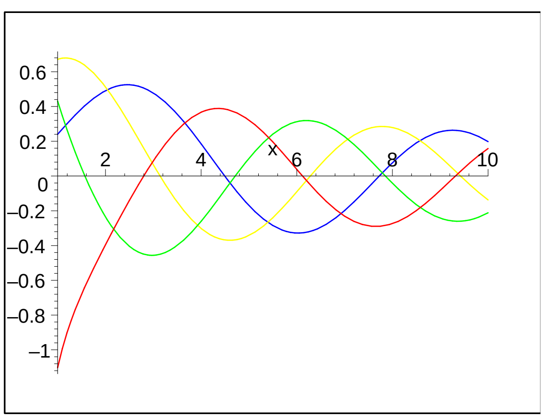


Połowkowe funkcje Bessel'a na przedziale $[1, 10]$, $n = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

Funkcje Hankel'a s'a kombinacjami liniowymi funkcji Bessel'a:

$$J_m(x) = \frac{1}{2}\left(H_m^{(1)}(x) + H_m^{(2)}(x)\right).$$

$$J_{-m}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{m\pi i}H_m^{(1)}(x) + e^{-m\pi i}H_m^{(2)}(x)\right).$$



Funkcje Hankel'a na przedziale $[-5, 5]$, $n = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

Ich asymptotyka w nieskończoności jest postaci:

$$H_m^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix}e^{-im\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$H_m^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix} e^{-im\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}}.$$