Zadanie

Znaleźć rozwiązanie $y = y(x)$ równania różniczkowego postaci

$$y - xy' = 0 \tag{1}$$

Rozwiązanie

Oczywiście jest to równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx,$$

którego całkowanie prowadzi do wyrażenia

$$\ln|y| + C_1 = \ln|x| + C_2 \quad \rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C_2 - C_1 = C_3 \tag{2}$$

i dalej

$$\left|\frac{y}{x}\right| = e^{C_3} = C_4 > 0. \tag{3}$$

Rozwiązując powyższe równanie (3) należy rozpatrzyć dwa przypadki

- pierwszy:

  $$\frac{y}{x} > 0, \quad \frac{y}{x} = C_4.$$

  Dla kompletności, łatwo zauważyć, że przypadek ten odpowiada sytuacji gdy: $y > 0$ i $x > 0$ lub $y < 0$ i $x < 0$. W tym przypadku rozwiązanie $y = y(x)$ ma postać $y(x) = y = C_4 x$, gdzie oczywiście $C_4 > 0$.

- drugi:

  $$\frac{y}{x} < 0, \quad \frac{y}{x} = -C_4.$$

  Odpowiada to sytuacji gdy: $y > 0$ i $x < 0$ lub $y < 0$ i $x > 0$. Rozwiązaniem $y = y(x)$ jest funkcja $y = -C_4 x$, $C_4 > 0$.

Jak nietrudno zauważyć rozpatrzenie dwóch przypadków daje dwie rodziny krzywych, które są rozwiązaniami równania różniczkowego (1). Są to rodziny (rozwiązania ogólne): $y = C_4 x$ oraz $y = -C_4 x$, przy czym $C_4 > 0$. I znowu łatwo jest sprawdzić, że dla $C_4 \in (0, \infty)$ rodzina krzywych $y = C_4 x$ pokrywa pierwszą i trzecią *ćwiartkę* kartezjańskiego układu współrzędnych, natomiast rodzina $y = -C_4 x$ *ćwiartkę* drugą i czwartą – tym samym rodziny pokrywają cały układ współrzędnych (wykresy żadnej pary rozwiązań nie nakładają się na siebie).

Pytanie: W jaki sposób obie rodziny krzywych przedstawić jako jedną rodzinę?

Odpowiedź: Jako rodzinę krzywych postaci $y = y(x) = Cx$, przy czym $C \in \mathbb{R} - \{0\}$. Z takiej ogólnej rodziny wygenerować można dowolną krzywą z rodzin $y = C_4 x$ i $y = -C_4 x$, $C_4 > 0$ (dla $C > 0$ będzie to pierwsza rodzina, dla $C < 0$ rodzina druga).

Wnioski:

1. Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego (1) ma postać $y = Cx$, $C \in \mathbb{R} - \{0\}$.
2. Rozpatrywanie dwóch rozwiązań równania (3) pomimo, że jest ścisłe, często jest pomijane. Przy takim podejściu konieczne jest jednak zdawanie sobie sprawy z argumentacji pominięcia rozwiązania ścisłego – dwa przypadki rozwiązania *wpisane* są w dowolność stałej C. Gdy równanie (3) nie będzie rozwiązywane w sposób ścisły, to na tym etapie należy przyjąć, że występująca tam stała $C_4 \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. Obie opisane rodziny krzywych dają to samo rozwiązanie w tym sensie, że można je wyprowadzić z jednego rozwiązania ogólniejszego.

4. Taki sam wynik zostanie uzyskany gdy równanie różniczkowe (1) zostanie scałkowane do postaci (patrz: (2))

$$\ln \left| C_3 y \right| = \ln |x|, \quad C_3 > 0.$$

W tym jednak przypadku konieczne jest rozpatrzenie czterech przypadków szczególnych:

- $y > 0, x > 0$
- $y > 0, x < 0$
- $y < 0, x > 0$
- $y < 0, x < 0$

Ostatecznie rozwiązanie (1) będzie można przedstawić w zwartej postaci $y(x) = y = Cx$, $C \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Pytanie: Co z przypadkiem $C = 0$ wyłączonym z rodziny rozwiązań ogólnych?

Odpowiedź: Funkcja $y = Cx\big|_{C=0} = 0$ stanowi rozwiązanie równania (1) więc przy podanym wyżej rozwiązaniu ogólnym – stanowi ono rozwiązanie osobliwe.

Pytania, uwagi? Proszę na adres: bwolf@rudy.mif.pg.gda.pl

12.11.2003