1 Równania różniczkowe – pojęcie

1. Pojęcie równania różniczkowego – jest to pewne równanie funkcyjne, które zapisać można w postaci ogólnej
$$F\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1}$$
lub w postaci normalnej
$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}\big). \tag{2}$$
Rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu określa rząd równania różniczkowego.

2. Rozwiązania równania różniczkowego.
Niech dane jest równanie różniczkowe w postaci normalnej
$$y' = f(x, y).$$
Niech funkcja f jest ciągła i jest zdefiniowana następująco $f: \quad D \to \mathbb{R}$. Rozwiązaniem równania różniczkowego w przedziale $[a, b]$ jest funkcja $y(x)$ określona i różniczkowalna w tym przedziale, gdy spełnia dwa warunki
   - $\forall_x \in [a, b] \quad (x, y(x)) \in D$ – tzn., że wykres funkcji $y = y(x)$ musi być zawarty w obszarze D,
   - $\forall_x \in [a, b] \quad y' = f\big(x, y(x)\big)$ – tzn. że funkcja $y = y(x)$ spełnia zadane równanie różniczkowe na całym przedziale $[a, b]$. Rozwiązanie takie nazywa się całką ogólna lub rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego.

3. Przypadki rozwiązań równań różniczkowych.
   - Rozwiązania równań różniczkowych mogą być rzeczywiste, urojone, może ich nie być lub może być ich nieskończenie wiele. Przykład równania różniczkowego, które nie ma rozwiązań rzeczywistych
   $$1 + \big(\frac{dy}{dx}\big)^2 = 0 \quad \to \quad \big(\frac{dy}{dx}\big) = \sqrt{-1}.$$
   Jego rozwiązaniem jest funkcja $y(x) = ix$.
   - Rówanie różniczkowe, które nie ma rozwiązań
   $$e^{\frac{dy}{dx}} = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \ln 0.$$
   - Najczęściej mamy do czynienia z sytuacja w której istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania różniczkowego – są to całki ogólne, np. równanie
   $$y' = x^2$$
   ma rozwiązanie postaci $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, gdzie $C = const. \in \mathbb{R}$. Funkcja taka stanowi rozwiązanie równania niezależnie od wartości parametru $C \in \mathbb{R}$. Wartości jakie może przyjąć parametr jest nieskończenie wiele, a więc i rozwiązań można zbudować nieskończenie wiele. Dlatego mówi się, że rozwiązaniem r. r. jest cała rodzina krzywych.
   Powyższe r. r. jest równaniem pierwszego rzędu i jego rozwiązanie zależy jak widać od jednego parametru rzeczywistego. Rozwiązanie r. r. drugiego rzędu jest zależne od dwóch parametrów, np.
   $$y'' = x^2.$$
   Jego rozwiązaniem jest funkcja $y = \frac{1}{12}x^4 + C_1x + C_2$, gdzie $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy w tym miejscu dwa parametry, bo do rozwiązania takiego równania należało przeprowadzić dwa całkowania, a w każdym z nich pojawiła się stała całkowania.

4. Jeśli rozwiązanie r. r. można wyznaczyć przez wykonanie skończonej liczby całkowań, to mówi się, że jest to rozwiązanie przez kwadraturę. Nie wszystkie r. r. można rozwiązać przez kwadraturę. Np. równania Bessela. Metodą ich rozwiązywania jest wówczas postulowanie wyniki w postaci szeregu.

5. Całki szczególne.
   Całki ogólne to rozwiązania r. r. spełniające to równanie w ogólności. Zagadnieniem początkowym Cauchy'ego dla r. r. rzędu pierwszego nazywa się zagadnienie polegające na wyznaczeniu z całej rodziny rozwiązań (całki ogólnej) jednego rozwiązania spełniającego zadany warunek $y\big(x_0\big) = y_0$, gdzie $\big(x_0, y_0\big) \in D$. Innymi słowy, zagadnienie to sprowadza się do wyszukania rozwiązania przechodzącego przez zadany punkt $\big(x_0, y_0\big)$ należący do obszaru D. Zagadnienie Cauchy'ego złożone jest z równania różniczkowego i warunku początkowego. (interpretacja geometryczna!). Tak znalezione rozwiązanie r. r. nazywane jest całką szczególną.

2 Podstawowe typy równań różniczkowych

2.1

Najprostszym typem równania różniczkowego jest równanie, które w postaci normalnej można zapisać następująco

$$y' = f(x),$$

gdzie $f = f(x)$ jest pewną ciągłą funkcją argumentu (zmiennej niezależnej) x. Rozwiązanie takiego równania uzyskuje się poprzez całkowanie funkcji $f(x)$, tzn.

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

2.2

Inny prosty typ równania różniczkowego, to rówanie postaci

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0,$$

które można sprowadzić do nieco czytelniejszej postaci

$$y' + \frac{M(x)N(y)}{P(x)Q(y)} = 0,$$

lub równoważnie

$$y' + p(x)g(y) = 0, \tag{3}$$

które dla $g(y) = y$ staje się równaniem liniowym jednorodnym. Rówanie powyższej postaci można zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{1}{g(y)}y' = -p(x),$$

a jego rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = -\int p(x)dx.$$

Rzeczą istotną w równaniu (3) jest iloczyn funkcji $p(x)g(y)$ – tzn. możliwość rozseparowania od siebie funkcji zmiennej niezależnej x oraz funkcji zmiennej zależnej y. Jeśli taka separacja nie jest mozliwa,

nie jest bezpośrednio możliwe rozwiązanie podane powyżej.
Jeśli w równaniu (3) funkcji zmiennych x i y nie uda sie rozseparować, czyli gdy będzie miało ono postać

$$y' + p_1(x,y)g_1(x,y) = 0,$$

i nie będzie można go zapisać w postaci (3)

$$y' + p(x)g(y) = 0,$$

to próba naiwnego rozwiązania doprowadzi do równania np.

$$\int \frac{1}{p_1(x,y)}dy = -\int g_1(x,y)dx,$$

w którym dochodzi do całkowania funkcji $y = y(x)$ względem zmiennej x (czyli do całkowania funkcji niewiadomej – celem rozwiązania równania różniczkowego jest jej znalezienie) lub całkowania x względem y. W takich przypadkach należy różnymi sposobami, adekwatnymi do postaci równania, próbować równanie to sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych (3).

2.3 Równania o postaci sprowadzalnej do równań o zmiennych rozdzielonych

2.4

Równanie postaci

$$p_1(x,y)dx + g_1(x,y)dy = 0,$$

gdzie $p_1(x,y)$ i $g_1(x,y)$ są funkcjami jednorodnymi tego samego stopnia, można sprowadzić do równania

$$y' = f(\frac{y}{x}),$$

które rozwiązuje się przez podstawienie $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

2.5

Wiadomo jak rozwiązywać równania o zmiennych rozdzielonych, ale jak postepować z innymi, na pozór wiele bardziej złożonymi równaniami? Weźmy pod uwagę równanie różniczkowe postaci naturalnej

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{4}$$

lub jego postać szczególną

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}. \tag{5}$$

Wszystkie rozważania rozpatrzymy teraz dla tej postaci równania, ale tylko ze względów dydaktycznych. Wnioski jakie się pojawią mogą być stosowane w ogólności do wszystkich równań różniczkowych postaci (4).

Jak poradzić sobie z równaniem (5)? Widać, że podstawienie $u = \frac{y}{x}$ na nic się tu nie zda ze względu na stałe c_1 i c_2, które spowodują, że podzielenie mianownika i licznika przez x wygeneruje wyrazy postaci $\frac{c_1}{x}$ oraz $\frac{c_2}{x}$. Nie tędy więc droga. W takim razie dokonajmy zamiany zmiennych. Zapostulujmy wprowadzenie nowych zmiennych postaci

$$\begin{aligned} x &= \xi + \alpha, \\ y &= \eta + \beta. \end{aligned} \tag{6}$$

Warto podkreślić, że we współrzędnych x, y, x pełni rolę zmiennej niezależnej, natomiast y zmiennej zależnej, tzn. $y = y(x)$. W nowym układzie współrzędnych ξ, η, podobną rolę pełnią odpowiednio ξ oraz $\eta = \eta(\xi)$, natomiast α i β są stałymi. Równanie (5) wyrażone poprzez nowe zmienne przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} = \eta' &= \frac{a_1\xi + a_1\alpha + b_1\eta + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + a_2\alpha + b_2\eta + b_2\beta + c_2} \\ &= \frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Widać, że to równanie ma postać sprowadzalną do postaci równania o zmiennych rozdzielonych, ale pod warunkiem, że swobodne wyrazy stałe występujący w wyrażeniu powyżej będą równe zero, tzn.

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Wówczas równanie (7) przyjmuje postać

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta' = \frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\beta} = \frac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}},$$

które łatwo rozwiązać stosując podstawienie $u(\xi) = \frac{\eta}{\xi}$.
Uwaga: Podany sposób sprowadzenia równania postaci (4) możliwy jest tylko w przypadku gdy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Gdy warunek ten nie jest spełniony wówczas układ równań (8) jest **sprzeczny** (co natychmiast implikuje, że stałe w mianowniku i liczniku nie mogą być jednocześnie równe zero). W takim przypadku należy zauważyć rzecz następującą: zerowanie się powyższego wyznacznika jest równoważne równaniu

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad \to \quad a_1b_2 = a_2b_1,$$

z którego wynika

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda = const.$$

Wówczas $a_1 = \lambda a_2$ oraz $b_1 = \lambda b_2$ i dokonywanie podstawienia (6) nie jest konieczne, ponieważ równanie (5) można zapisać w postaci

$$y' = \frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

i równanie łatwo rozwiązać przez podstawienie $u(x) = a_2x + b_2y$.

2.6

Warto w tym miejscu zauważyć, że do do postaci równania o zmiennych rozdzielonych łatwo sprowadzić równanie o postaci

$$y' = f(ax + by + c).$$

Dokonuje się tego przez podstawienie $u(x) = ax + by + c$.

3 Równania różniczkowe liniowe i sprowadzalne do nich

3.1 Równania różniczkowe liniowe

3.1.1 Metoda redukcji równania

Metoda ta polega na sprowadzeniu równania liniowego

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{9}$$

do postaci równania

$$y' = f(x), \tag{10}$$

którego sposób rozwiązania (całkowanie) jest bardzo dobrze znany. Warto zauważyć, że pomnożenie równania (9) przez funkcję $e^{\int p(x)dx}$ prowadzi do równania

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lewa strona tego równania może być zapisana jako pochodna, tzn.

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = \left(ye^{\int p(x)dx}\right)'$$

w wówczas całe równanie przyjmuje postać

$$u'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}, \quad \text{gdzie} \quad u(x) = \left(ye^{\int p(x)dx}\right)$$

i dalej

$$u(x) = ye^{\int p(x)dx} = \int f(x)e^{\int p(x)dx}$$

3.1.2 Metoda uzmiennienia stałej

Proces rozwiązywania tą metodą podzielić można na dwa etapy. Etap pierwszy to rozwiązanie równania jednorodnego $y' + p(x)y = 0$. Etap drugi, to postulowanie rozwiązania równania niejednorodnego $y' + p(x)y = f(x)$ w oparciu o rozwiązanie równania jednorodnego, które to rozwiązanie zostało uzyskane w pierwszym etapie.

- Rozwiązanie równania jednorodnego
  Łatwo zauważyć, że równanie jednorodne to równanie o zmiennych rozdzielonych

  $$\frac{1}{y}y' = -p(x),$$

  którego rozwiązanie jest oczywiście postaci

  $$C \ln y = -\int p(x)dx \quad \to \quad y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{11}$$

- Postulowanie rozwiązania równania niejednorodnego
  Dysponując (11) rozwiązanie równania niejednorodnego można zapostulować w postaci

  $$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{12}$$

  czyli dokonując tzw. operacji *uzmiennienia stałej C* występującej w rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego. Warto w tym miejscu zauważyć, że postulując rozwiązanie w takiej postaci nie traci się nic na ogólności tego rozwiązania. Na tym etapie można wcale nie zakładać, by rozwiązanie równania niejednorodnego było w jakikolwiek sposób związane z rozwiązaniem równania jednorodnego. I taką właśnie dowolność zapewnia odpowiednia postać funkcji $C(x)$. Na tym etapie funkcja $C(x)$ jest niewiadomą, którą należy obliczyć.

Skoro funkcja (12) ma stanowić rozwiązanie równania niejedorodnego, to równanie to musi być dla niej spełnione. Należy więc rozwiązanie postulowane wstawić do równania niejednorodnego i na tej podstawie obliczyć $C'(x)$ i dalej $C(x)$

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx} \tag{13}$$

a z tego

$$C(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx + C. \tag{14}$$

Wówczas rozwiązanie równania niejednorodnego ma postać

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{p(x)dx}. \tag{15}$$

Uwaga: Sposób postulowania rozwiązania równania różniczkowego w określonej postaci jest w ogólności całkowicie poprawny. Problem jaki może się pojawić w tym miejscu polega jednak na rozwiązaniu równania różniczkowego po wstawieniu do niego rozwiązania postulowanego. W przypadku gdy rozwiązanie będzie miało postać rozwiązania równania jednorodnego z uzmienioną stałą, równaniem wynikowym będzie równanie o zmiennych rozdzielonych. W ogólności nie otrzymuje się takiego równania – otrzymać można natomiast równanie, którego nie można w łatwy sposób scałkować.

3.2 Równania Bernoulliego

Równanie Bernoulliego można w ogólności zapisać w postaci

$$y' + p(x)y = f(x)y^r, \tag{16}$$

gdzie $r \in \mathbb{R}/\{0,1\}$. Równanie to różni się od równania liniowego – które wiadomo jak rozwiązywać – jedynie funkcją y^r występującą po prawej stronie (16). Spróbujmy więc równanie Bernoulliego (16) sprowadzić do postaci równania różniczkowego liniowego. Pomnóżmy równanie (16) przez y^{-r}, tak aby wyraz y^r zniknął po prawej stronie tego równania. W efekcie uzyskujemy nowe równanie postaci

$$y'y^{-r} + p(x)yy^{-r} = f(x) \quad \rightarrow \quad \underbrace{y'y^{-r}} + p(x)\underbrace{y^{1-r}} = f(x). \tag{17}$$

Równanie to nie przypomina na razie równania liniowego. Warto jednak w tym miejscu zauważyć, że podkreślone klamrą wyrazy związane są ze sobą różniczką w sposób następujący

$$\left(y^{1-r}\right)' = (1-r)y^{-r}y'.$$

Natychmiast widać, że podstawienie $u = y^{1-r}$ spowoduje, że równanie (17) będzie miało postać równania różniczkowego liniowego. Dokonujemy więc podstawienia, otrzymując w efekcie równanie

$$\frac{1}{1-r}u' + p(x)u = f(x),$$

które po prostym przekształceniu widać, że jest równaniem liniowym

$$u' + (1-r)p(x)u = (1-r)f(x), \quad (1-r) = const. \tag{18}$$

Uwaga: Powyższa analiza obowiązuje jedynie dla przypadku $r \in \mathbb{R}/\{0,1\}$, ponieważ gdy $r = 0$ rówanie (16) staje się równaniem liniowym niejednorodnym, a gdy $r = 1$ równaniem liniowym jednorodnym.

3.3 Równania zupełne

Różniczka zupełna pewnej funkcji dwóch zmiennych $U = U(x, y)$ ma postać

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \tag{19}$$

gdzie

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{20}$$

z czego wynika, że funkcje $P = P(x, y)$ oraz $Q = Q(x, y)$ są funkcjami, które uzyskuje się poprzez różniczkowanie funkcji $U(x, y)$ wzlgędem odpowiednio x i y. Poza tym należy zauważyć, że w ogólności zachodzi (twierdzenie o pochodnej mieszanej)

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_{Q(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{P(x,y)} \tag{21}$$

z czego bezpośrednio wynika, że dla każdej rózniczki zupełnej funkcji dwóch zmiennych, różniczki postaci (19) zachodzi

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y). \tag{22}$$

Równania różniczkowe, których lewa strona jest różniczką zupełną pewnej funkcji $U = U(x, y)$ nazywane są równaniami różniczkowymi zupełnymi

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{23}$$

Rozwiązaniem takiego równania jest rodzina wszystkich krzywych

$$U(x, y) = C \tag{24}$$

co bezpośrednio wynika z postaci równania (23). Dla takich równań warunek (22) musi być oczywiście spełniony. Sprawdzenie tego warunku stanowi często najszybszą drogę określenia czy zadane równanie różniczkowe jest równaniem zupełnym.

3.3.1 Metoda rozwiązywania równań zupełnych

Jak zostało powiedziane powyżej, rozwiązaniem takiego równania różniczkowego jest rodzina krzywych $U(x, y) = C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$. Rozwiązanie sprowadza się więc do wyznaczenia funkcji $U = U(x, y)$. Jedną z metod jej wyznaczenia jest rozwiązanie układu równań (20) określających tę funkcję. Z pierwszego z równań (20) otrzymuje się

$$U = U(x, y) = \int P(x, y)dx + \phi(y). \tag{25}$$

Występująca powyżej funkcja $\phi(y)$ pełni rolę *stałej całkowania* względem zmiennej x. Funkcję $U(x, y)$ z niewiadomą funkcją $\phi(y)$ wstawia się następnie do drugiego z równań (20) z czego wyliczyć można pochodną $\frac{d\phi(y)}{dy}$ funkcji $\phi(y)$, a z tego przez całkowanie samą funkcję $\phi = \phi(y)$. Wstawienie $\phi(y)$ do (25) określa rozwiązanie równania zupełnego.

Uwaga: Wprowadzana klasyfikacja równań różniczkowych służy między innymi sformalizowaniu metod ich rozwiązywania. Przynależność danego równania różniczkowego do danego typu równań nie wyklucza przynależności do innego typu. Innymi słowy, na przykład równanie różniczkowe zupełne może być na przykład równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych. Równanie takie można wówczas rozwiązać jedną lub drugą metodą, traktując je jako równanie o zmiennych rozdzielonych lub równanie zupełne.

Przykład: Równanie $\frac{y}{x}dx + \ln x dy = 0$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, ponieważ można je zapisać w postaci $\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{x \ln x}$. Jednocześnie jest to równanie różniczkowe zupełne, w którym $P(x, y) = \frac{y}{x}$, a $Q(x, y) = \ln x$. Wybranie odpowiedniej drogi rozwiązania takiego równania może skrócić proces rozwiązywania.

3.3.2 Sprowadzanie określonych równań różniczkowych do postaci równań zupełnych – czynnik całkujący

W określonych przypadkach istnieje możliwość sprowadzenia równania różniczkowego do postaci równania różniczkowego zupełnego. Przypuśćmy, że równanie

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{26}$$

nie jest zupełne. Funkcja $\mu = \mu(x, y) \in C^1$ jest tzw. czynnikiem całkującym równania (26) gdy równanie

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = \widetilde{P}(x, y)dx + \widetilde{Q}(x, y)dy = 0 \tag{27}$$

jest równaniem różniczkowym zupełnym. W takiej sytuacji spełnione jest równanie

$$\frac{\partial \widetilde{P}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{Q}(x, y)}{\partial x},$$

które przekształcić można do postaci (przy pominięciu jawnej zależności od argumentów x i y)

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)$$

i dalej

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{28}$$

Ostatnie równanie, wykorzystując zależności

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

przepisać można w postaci

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y}P - \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x}Q = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \tag{29}$$

Równanie różniczkowe na czynnik całkujący znacznie się upraszcza, gdy rozpatrzyć dwa przypadki szczególne

- Załóżmy, że $\mu = \mu(x)$ jest funkcją tylko zmiennej x, tym samym równanie (29) ma postać

  $$\frac{1}{\mu}d\mu = \frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big)dx. \tag{30}$$

  Jego całkowanie prowadzi do czynnika całkującego $\mu = \mu(x)$ postaci

  $$\mu(x) = \exp\Big(\int \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})dx\Big) \tag{31}$$

- Załóżmy, że $\mu = \mu(y)$ jest funkcją tylko zmiennej y. W tym przypadku równanie (29) ma postać

$$\frac{1}{\mu} d\mu = \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dy. \tag{32}$$

  Całkowanie tego równania prowadzi do czynnika całkującego $\mu = \mu(y)$ postaci

$$\mu(y) = \exp\Big(\int \frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dy\Big) \tag{33}$$

Uwaga: Wyrażenia (31) oraz (33) zawierają jednocześnie warunki określające warunek istnienia czynnika całkującego postaci odpowiednio $\mu = \mu(x)$ i $\mu = \mu(y)$. Czynnik $\mu = \mu(x)$ istnieje wówczas gdy funkcja podcałkowa argumentu funkcji eksponencjalnej w wyrażeniu (31) jest funkcją tylko zmiennej x. Gdy funkcja podcałkowa argumentu funkcji eksponencjalnej w (33) jest funkcja jedynie zmiennej y wówczas $\mu = \mu(y)$.

Czynnik całkujący wyznaczyć też można nie czyniąc żadnego założenia co do jego zależności od tylko jednej zmiennej – wówczas wyznaczyć można postać ogólną czynnika całkującego $\mu = \mu(x, y)$. W tym celu przyjmijmy, że μ jest funkcją dwóch zmiennych x i y, ale jest to zależność pośrednia, tzn. $\mu = \mu\big(w(x, y)\big)$, gdzie $w = w(x, y)$. Wykorzystując następujące zależności

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dw}\frac{\partial w}{\partial y},$$

równanie (28) określające czynnik całkujący μ można przepisać w postaci

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dw}\frac{\partial w}{\partial y} P - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dw}\frac{\partial w}{\partial x} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

a po uproszczeniu

$$\frac{d(\ln \mu)}{dw} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial y} P - \frac{\partial w}{\partial x} Q} = F(x, y) = G\big(w(x, y)\big) = G(w).$$

Rozwiązanie powyższego równania prowadzi do czynnika całkującego μ

$$\ln \mu(w) = \int G(w) dw \quad \to \quad \mu(w) = e^{\int G(w) dw}. \tag{34}$$

Ponieważ postać $w = w(x, y)$ jest znana, tym samym znana jest jawna postać czynnika całkującego $\mu = \mu(x, y)$.

3.4 Równania Lagrange'a i Clairaut

Równania Lagrange'a[1] i Clairaut[2] są do siebie podobne, ale ich sposób rozwiązania różni się od siebie. Z tego właśnie powodu klasyfikuje się je jako dwa różne równania różniczkowe.

[2] Lagrange Joseph Louis de – wybitny francuski matematyk i fizyk teoretyk zyjący w latach 1736–1813. Jego najwybitniejsze osiągnięcia to sformułowanie równań mechaniki teoretycznej (równania Lagrange'a), rozwinięcie mechaniki nieba. Zajmował się badaniem ruchu Księżyca, Jowisza, Saturna oraz badaniem orbit komet. W obszarze jego wielu zainteresowań znalazła się też pewna klasa równań różniczkowych – równania Lagrange'a. Napoleon I, w imię zasług, mianował Lagrange'a Wielkim Oficerem Legii Honorowej, senatorem oraz Księciem Cesarstwa. Po jego śmierci, mowę pożegnalną na jego cześć wygłosił Pierre Simon Laplace.

[2] Clairaut Alexis Claude – francuski matematyk i astronom żyjący w latach 1713–1765. Prowadził badania w zakresie rachunku całkowego i różniczkowego. Wprowadził do matematyki takie pojęcia jak całka krzywoliniowa, różniczka zupełna, całka ogólna i osobliwa równania różniczkowego.

3.4.1 Równanie Lagrange'a

Równanie Lagrange'a to równanie, które można zapisać w postaci

$$y = \phi(y')x + \psi(y'), \quad \phi(y') \neq y'. \tag{35}$$

Cechą odróżniającą równanie Lagrange'a (oraz Clairaut) od równań omówionych wcześniej jest występowanie w równaniu nieliniowych funkcji pochodnej niewiadomej funkcji y.

Dla znalezienia rozwiązań równania (35) sprowadza się je do postaci równania różniczkowego liniowego niejednorodnego, którego sposób rozwiązywania jest już znany. W tym celu równanie (35) różniczkuje się względem zmiennej niezależnej x co prowadzi do równania

$$y' = \phi'(y')y''x + \phi(y') + \psi'(y')y''$$

które stosując podstawienie $y' = p(x)$ ma postać

$$p - \phi(p) = x\phi'(p)p' + \psi'(p)p'$$

i dalej, po niewielkich przekształceniach

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \phi(p)}{\phi'(p)x + \psi'(p)}.$$

Ostatnie równanie jak widać jest trudne do całkowania (nie jest to na przykład równanie o zmiennych rozdzielonych lub o postaci sprowadzalnej do równania o zmiennych rozdzielonych), ale łatwo zauważyć, że jego odwrócenie prowadzi do równania liniowego

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\phi'(p)}{p - \phi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)} \quad \rightarrow \quad x' - \frac{\phi'(p)}{p - \phi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}, \tag{36}$$

w którym niewiadomą jest funkcja $x = x(p)$. Ostatnie równanie rozwiązać można dowolną metodą odpowiednią dla równania liniowego niejednorodnego, np. przez uzmiennienie stałej. Rozwiązanie tego równania daje funkcję x postaci

$$x = A(p)C + B(p), \quad C = const. \tag{37}$$

gdzie funkcje $A(p)$ i $B(p)$ są funkcjami zależnymi od $\phi(p)$, $\phi'(p)$ oraz $\psi'(p)$ i są znane dla konkretnego równania różniczkowego postaci (35). Należy w tym miejscu zauważyć, że rozwiązaniem wyjściowego równania, a więc równania Lagrange'a, jest funkcja $y = y(x)$, a nie funkcja $x = x(p)$. Aby znaleźć postać funkcji y rozwiązanie (37) należy wstawić do równania (35) otrzymując

$$y = \phi(p)A(p)C + \phi(p)B(p) + \psi(p).$$

Samo powyższe wyrażenie nie może stanowić rozwiązania równania wyjściowego ponieważ w równaniu wyjściowym funkcja y nie zależy od parametru p. Rozwiązaniem równania wyjściowego (35) jest dopiero para

$$\begin{cases} y = \phi(p)A(p)C + \phi(p)B(p) + \psi(p) \\ x = A(p)C + B(p) \end{cases} \tag{38}$$

która stanowi tzw. rozwiązanie *parametryczne*, gdzie parametrem jest p. Rozwiązanie względem parametru p drugiego z tych równań i wstawienie tak uzyskanego rozwiązania do równania pierwszego, daje jawną postać funkcji $y = y(x)$.

Uwaga: Rozwiązanie ogólne (w postaci parametrycznej) równania Lagrange'a wyprowadzane jest przy założeniu $p - \phi(p) \neq 0$ (patrz wzór (36)). Rozpatrzenie przypadku odwrotnego, tzn. gdy $p = \phi(p)$ prowadzi do rozwiązań osobliwych równania (tzn. takich, których nie można wyprowadzić z rozwiązania ogólnego). Aby znaleźć rozwiązania osobliwe należy rozwiązania równania $p = \phi(p)$ wstawić do równania wyjściowego (35) uzyskując

$$y = p_i x + \psi(p_i), = \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{39}$$

gdzie n jest ilością pierwiastków rzeczywistych równania $p = \phi(p)$.

3.4.2 Równanie Clairaut

Równanie Clairaut jest przypadkiem szczególnym ogólniejszego równania Lagrange'a, i jest postaci

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{40}$$

z czego wynika, że równanie Lagrange'a staje się równaniem Clairaut dla $\phi(y') = y'$.

Różniczkowanie równania (40) względem zmiennej niezależnej x prowadzi do równania postaci

$$y' = y' + xy'' + \psi'(y')y''.$$

Wykorzystując podstawienie $y' = p(x)$ powyższe równanie można przepisać w postaci

$$\big(x + \psi'(p)\big)p' = 0,$$

które jest spełnione gdy $p' = 0$ lub $x + \psi'(p) = 0$. Rozpatrzmy te dwa przypadki

- $p' = 0$
  Równanie $p' = 0$ jest równaniem różniczkowym określającym funkcję $p = p(x)$ a jego rozwiązaniem jest $p = C_1$. Należy w tym miejscu przypomnieć, że zgodnie z wcześniej przyjętym oznaczeniem $p = y'$, zatem $y' = C_1$ z czego wynika, że $y = C_1x + C_2$. W ten sposób uzyskane zostało pewne rozwiązanie ogólne równania Clairaut. Jeśli jest to rozwiązanie, powinno ono spełniać równanie wyjściowe (40). Wstawienie takiego rozwiązania do (40) prowadzi do równania $C_2 = \psi(C_1)$, czyli do wyrażenia jednej ze stałych jako funkcji drugiej stałej. Tym samym rozwiązanie ogólne równania Clairaut ma postać funkcji liniowej

  $$y = C_1x + \psi(C_1). \tag{41}$$

- $x + \psi'(p) = 0$
  W tym przypadku $x = -\psi'(p)$. Wstawienie takiej postaci funkcji $x = x(p)$ do równania wyjściowego (40) prowadzi do funkcji y postaci

  $$y = -\psi'(p)p + \psi(p),$$

  która sama nie może stanowić rozwiązania równania wyjściowego. Rozwiązaniem jest dopiero para

  $$\begin{cases} y = -\psi'(p)p + \psi(p) \\ x = -\psi'(p) \end{cases} \tag{42}$$

  Najczęściej jest to rozwiązanie osobliwe równania Clairaut.

3.5 Równania rzędu drugiego

Równanie różniczkowe liniowe rzędu n-tego

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad y = y(t) \tag{43}$$

jest równaniem niejednorodnym. Równanie to staje się jednorodne gdy $f(t) \equiv 0$.
Wprowadzając oznaczenia

$$x_1 = y, \quad x_2 = x_1' = y', \quad x_3 = x_2' = y'', \quad \ldots, \quad x_n = x_{n-1}' = y^{(n-1)}, \tag{44}$$

otrzymujemy układ n równań rzędu pierwszego

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = y' \\ x_2' = x_3 = x_1'' = y'' \\ \vdots \\ x_n' = y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = -a_{n-1}x_n + \ldots + a_1 x_2 + a_0 x_1 \end{cases} . \tag{45}$$

Stosując notację wektorową można zapisać

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Równanie liniowe niejednornodne w zapisie macierzowym ma wówczas postać

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \mathbf{f}(t), \tag{46}$$

natomiast równanie jednorodne

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x}. \tag{47}$$

Wiadomo, że rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego (43) ma postać

$$y(t) = \sum_i C_i y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

gdzie y_i są rozwiązaniami szczególnymi tego równania. Poprzez analogię, rozwiązanie dla j-tego równania w (47) można zapisać jako

$$x_j = \sum_i C_i \vec{x}_{ji}.$$

W szczególności dla $j = 1$ z ostatniego wyrażenia otrzymuję

$$x_1 = \sum_i C_i \vec{x}_{1i} = \sum_i C_i y_i = y,$$

czyli rozwiązanie równania jednorodnego (43). Podobnie dla np. $j = 2$

$$x_2 = y' = \sum_i C_i x_{2i} = \sum_i C_i y_i'.$$

Rozwiązanie równania (46) otrzymać można metodą uzmiennienia stałych rozwiązania równania jednorodnego. Tym samym rozwiązanie j-tego równania niejednorodnego przyjmuje postać

$$x_j = \sum_i C_i(t) x_{ji}(t). \tag{48}$$

Różniczkowanie rozwiązania względem zmiennej niezależnej t daje

$$x'_j = \sum C'_i(t)x_{ji}(t) + \sum_i C_i(t)x'_{ji}(t). \tag{49}$$

Ponieważ (48) jest rozwiązaniem równania niejednorodnego dlatego równanie jest dla niego spełnione. Wstawienie wyrażeń (48) oraz (49) do j-tego równania z układu (46) prowadzi do wyrażenia

$$\sum_i C'_i(t)x_{ji}(t) + \sum_i C_i(t)x'_{ji}(t) = A_j \sum_i C_i(t)x_{ji}(t) + f_j(t)$$

i po oczywistym przekształceniu

$$\sum_i C'_i(t)x_{ji}(t) + \sum_i C_i(t)x'_{ji}(t) - A_j \sum_i C_i(t)x_{ji}(t) = f_j(t), \tag{50}$$

gdzie A_j jest j-tym wierszem macierzy $\mathbf{A}(t)$. Nietrudno zauważyć, że drugie i trzecie wyrażenie po lewej stronie powyższej równości daje się zapisać jako

$$C_1(t)\Big(x'_{j1}(t) - A_j x_{j1}(t)\Big) + C_2(t)\Big(x'_{j2}(t) - A_j x_{j2}(t)\Big) + \ldots + C_n(t)\Big(x'_{jn}(t) - A_j x_{jn}(t)\Big) = 0. \tag{51}$$

Ostatnia równość staje się oczywista gdy zauważyć, że funkcje $x_{ji}, i = 1, \ldots, n$ są całkami szczególnymi równania jednorodnego rzędu n (bo przecież $x_j = \sum_i C_i x_{ji}$ jest całką ogólną równania jednorodnego), a tym samym spełniają równania postaci $x'_{ji}(t) = A_j x_{ji}$, czyli wyrażenia w nawiasach równania (51). Uwzględnienie tych faktów pozwala zapisać równanie (50) następująco

$$\sum_i C'_i(t)x_{ji}(t) = f_j(t). \tag{52}$$

Warto w tym miejscu przypomnieć, że funkcje $C_i, i = 1, \ldots, n$ są niewiadomymi funkcjami występującymi w proponowanym rozwiązaniu równania niejednorodnego, a ich wyznaczenie jest konieczne do określenia rozwiązań równania niejednorodnego (w przyjętej metodzie uzmiennienia stałych). Układ (52) n równań z n niewiadomymi stanowi układ z którego można wyznaczyć postać funkcji $C_i(t)$

$$\left\{\begin{array}{l} C'_1(t)x_{11}(t) + \ldots + C'_n(t)x_{1n}(t) = C'_1(t)y_1(t) + \ldots + C'_n(t)y_n(t) = 0 \\ C'_1(t)x_{21}(t) + \ldots + C'_n(t)x_{2n}(t) = C'_1(t)y'_1(t) + \ldots + C'_n(t)y'_n(t) = 0 \\ \vdots \\ C'_1(t)x_{n1}t + \ldots + C'_n(t)x_{nn}(t) = C'_1(t)y_1^{(n-1)} + \ldots + C'_n(t)y_n^{(n-1)} = f(t) \end{array}\right. . \tag{53}$$

Wniosek: Dość długa analiza wykazała, że rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego niejednorodnego rzędu n jest funkcja postaci $y = \sum_i C_i(t)y_i(t)$, gdzie $y_i(t)$ są całkami szczególnymi równania jednorodnego (sprzężonego z równaniem niejednorodnym) natomiast funkcje C_i spełniają układ (53).

3.5.1 Wrońskian

Równanie różniczkowe n-tego rzędu posiada n różnych rozwiązań. Układ n rozwiązań szczególnych $y_1, y_2, \ldots, y_n$ równania liniowego jednorodnego jest tzw. *układem bazowym* lub *układem fundamentalnym* w przypadku gdy wyznacznik Wrońskiego (wrońskian) spełnia warunek

$$W(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y'_1(t) & \ldots & y'_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall_{t\in(a,b)}, \tag{54}$$

Uwaga:

- Nie każdy układ całek szczególnych równania różniczkowego stanowi jego układ bazowy. Z własności wyznacznika $\det(.)$ wynika, że jest on równy zeru gdy jego dwa wiersze lub dwie kolumny są liniowo zależne, tym samym z (54) wynika, że układem bazowym może być jedynie układ liniowo niezależnych całek szczególnych równania różniczkowego.
- Przedział (a, b) występujący w (54) jest przedziałem na którym całki są liniowo niezależne.
- Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego n-tego rzędu ma postać $y = \sum_i C_i y_i$ jedynie w przypadku gdy $\{y_i\}_{i=1}^{i=n}$ jest układem bazowym całek równania na przedziale (a, b).
- Układ $\{y_i\}_{i=1}^{i=n}$ jest układem *bazowym* lub *fundamentalnym* w tym sensie, że stanowi *bazę* dla wszystkich rozwiązań równania różniczkowego, lub inaczej – rozpina całą przestrzeń rozwiązań równania różniczkowego.

3.5.2 Równanie charakterystyczne równania różniczkowego

Dla danego równania różniczkowego liniowego jednorodnego rzędu n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

równaniem charakterystycznym jest równanie postaci

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{55}$$

W szczególności, dla równania rzędu drugiego

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

równanie charakterysytczne jest równaniem kwadratowym

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Ograniczając analizę jedynie do równania charakterystycznego równania różniczkowego rzędu drugiego (wnioski są prawdziwe w ogólności) można zauważyć, że równanie to ma

1. dwa różne pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, gdy wyróżnik $\Delta > 0$,
2. jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, gdy wyróżnik $\Delta = 0$,
3. dwa różne pierwiastki zespolone $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \in \mathbb{C}$, gdy wyróżnik $\Delta < 0$.

Rozwiązania równania charakterystycznego (pierwiastki charakterystyczne) determinują postać całek szczególnych równania jednorodnego – na ich podstawie wyznaczyć można układ bazowy całek równania różniczkowego, a tym samym określić rozwiązanie ogólne tego równania. I tak, dla poszczególnych przypadków wymienionych wyżej, całki szczególne równania jednorodnego mają postać

1. $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$,
2. $y_1(t) = e^{\lambda_0 t}$ $y_2(t) = te^{\lambda_0 t}$,
3. $y_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t$, $y_2 = e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t$, $y_3 = e^{\alpha_2 t}\cos\beta_2 t$, $y_4 = e^{\alpha_2 t}\sin\beta_2 t$

Wymienione całki stanowią odpowiednie układy bazowe całek równania różniczkowego.