Fizyka, II rok FS, FiTKE, IS
Równania różniczkowe i całkowe, Zestaw 1a

1. Proszę zdefiniować pojęcia:
   równania różniczkowego, całki ogólnej i szczególnej równania różniczkowego, zagadnienia początkowego Cauchy'ego, równania o zmiennych rozdzielonych, liniowego, Bernoulliego, zupełnego etc. etc. (zagadnienia teoretyczne przedstawione na ćwiczeniach).

2. Proszę sprawdzić, czy dana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego
   (a) $y(x) = \sqrt{1+x^2}$, $(1+x^2)y' = xy$;
   (b) $r(\varphi) = \frac{C}{\cos^2\varphi}$, $\cos\varphi \frac{dr}{d\varphi} - 2r\sin\varphi = 0$;
   (c) $y(x) = 3\sin x - 4\cos x$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$;
   (d) $y = x^2\exp(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$;
   (e) $x(t) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.
   (f) $y = e^x + e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^3 - 5$, $y^{(3)} - y = x^3 - 1$;
   (g) $y = \sin\big(\cos(x)\big)$, $y'' + \cos(x)\cdot\cos\big(\cos x\big) = y$
   (h) $y = \ln\cos x + e^x\ln x$, $y'' - y' - \frac{e^x}{x} = -\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{\cos^2 x}$
   (i) $y = \arcsin x$, $y'' + (y')^3 - \frac{x+1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$

3. Proszę sprawdzić, że całką ogólną równania
$$y' = \frac{2x+y}{x-2y}$$
   jest rodzina krzywych danych równaniem
$$\ln\left(x^2+y^2\right) - \arctan\frac{y}{x} - C = 0.$$

4. Proszę wyznaczyć całki ogólne podanych równań
   (a) $y' = \sin^3 x$,
   (b) $y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$,
   (c) $y''' = -\cos x$,
   (d) $y' = \frac{\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}$

5. Proszę znaleźć całkę ogólną, a następnie całkę szczególną równania różniczkowego spełniającego podane warunki początkowe
   (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $y(0) = 0$;
   (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}$, $y(e) = 1$;
   (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$;
   (d) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

6. Wyznaczyć całkę ogólną równania różniczkowego postaci
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{\sin x},$$
   a następnie całkę szczególną spełniającą warunek

(a) $y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1$,
(b) $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

7. Wyznaczyć całkę ogólną (w postaci uwikłanej lub jawnej) równania różniczkowego postaci
   (a) $xy\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y^2$;
   (b) $y' = x^2\left(y^2 - 1\right)$;
   (c) $\left(y^2 + 1\right)dx - \left(x^2 + 1\right)dy = 0$
   (d) $y' = \frac{2x+y}{x-2y}$. W tym przypadku, po wyznaczeniu całki ogólnej należy następnie
      i. znaleźć rozwiązanie przechodzące przez punkt $P(1,0) \in D$,
      ii. wyrazić to rozwiązanie (całkę szczególną) we współrzędnych biegunowych.
   (e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;
   (f) $y' = -\frac{\cot y}{x^2}$;
   (g) $y - xy' = a\left(1 + x^2 y'\right)$;
   (h) $2x\sqrt{1 - y^2}dx + ydy = 0$, na jakim obszarze $\mathbf{D} = \{(x,y)\} \in \mathbb{R}^2$ określone jest to równanie?
   (i) $xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2}$, dla $x \neq 0$; proszę wskazać rozwiązanie osobliwe tego równania,
   (j) $\left(x + y - 2\right)dx + \left(x - y + 4\right)dy = 0$
   (k) $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$;
   (l) $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$
   (m) $y' = \left(x + y\right)^2$;
   (n) $y' = \cos(x - y)$;
   (o) $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$;
   (p) $(2x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0$;
   (q) $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y + 2)dy = 0$;
   (r) $y(\ln y - \ln x)dx - xdy = 0$;
   (s) $y' = \frac{2x^2y+y^3}{2x^3-xy^2}$;
   (t) $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$
   (u) $y' = (ax + by + c)^2$
   (v) $y' = 3x - 2y + 5$
   (w) $dy = e^{x+y}dx$

8. Udowodniono, że prędkość ochładzania ciała jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatury ciała T i temperatury otoczenia T_{ot} (ze współczynnikiem proporcjonalności równym $-\alpha$), w którym ciało to się znajduje. Proszę znaleźć zależność temperatury stygnącego ciała od czasu, tzn. $T = T(t)$ oraz wykazać, że temperatura tego ciała dąży do osiągnięcia temperatury otoczenia.

9. Ciało o temperaturze $180\,\mathrm{deg}$ umieszczone jest w środowisku o stałej temperaturze równej $60\,\mathrm{deg}$. Po jednej minucie temperatura ciała obniżyła się do $120\,\mathrm{deg}$. Po ilu minutach temperatura tego ciała spadnie do wartości $90\,\mathrm{deg}$?
   Wskazówka: Skorzystać z wyniku poprzedniego zadania.

10. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego
    (a) $\left(1 + e^x\right)yy' = e^x$, $y(0) = 1$;
    (b) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(x^2y - y\right)dy = 0$, $y(0) = 1$;

Pytania, komentarze, uwagi: `bwolf@rudy.mif.pg.gda.pl`

Odpowiedzi:
(4a) $y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$,
(4b) $y = e^x + \frac{1}{\sqrt{x}} + C_1 x + C_2$,
(4c) $y = \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$,
(4d) $y = \frac{1}{6}\left(1 + 2\ln x\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\ln x} + C$,
(6) Całka ogólna: $y(x) = e^{C\cdot\tan\frac{x}{2}}$, całki szczególne: (6a): $y(x) = 1$; (6b): $y(x) = e^{\tan\frac{x}{2}}$
(7a) $\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right) = Cx^2$;
0 **(7b)** $\frac{y-1}{y+1} = Ce^{\frac{2}{3}x^3}$;
(7c)
(7d) $\arctan\frac{y}{x} - \ln\left(x^2 + y^2\right) = C$; (7(d)i) $\arctan\frac{y}{x} - \ln\left(x^2 + y^2\right) = 0$, **(7(d)ii)** $\varphi - \ln r^2 = 0 \quad \to \quad r = e^{\frac{\varphi}{2}}$;
(7e) $\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + C = 0$;
(7f) $\cos y = Ce^{-\frac{1}{x}}$
(7g) $y = \frac{Cx}{1+ax} + a$.
(7h) $x^2 - \sqrt{1 - y^2} = C$. Równanie określone jest na prostokącie $\mathbf{P} = \{(x, y) : x \in (-\infty, \infty), 1 - y^2 > 0\}$
(7i) Całka ogólna: $y = x\left((Cx + 1)^2 + 1\right)$. Z warunku $(u - 1) \neq \sqrt{u-1}$, gdzie $u = \frac{y}{x}$, który pojawia się w trakcie rozwiązywania równania, wynika, że rozwiązaniami równania są też funkcje $y = x$ oraz $y = 2x$. Pierwsze z nich może być obliczone z całki ogólnej (rodziny krzywych będących rozwiązaniami) gdy przyjąć parametr $C = 0$ – jest to więc całka szczególna podanego równania. Drugie rozwiązanie $y = 2x$ nie może być wyznaczone z całki ogólnej (nie można dobrać wartości parametru C), jest to zatem całka osobliwa podanego równania różniczkowego.
(7j) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$;
(7k) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$, $y \neq 0$;
(7l) $y + 3x + 2\ln\left|x + y - 1\right| = C$;
(7m) $\arctan(x + y) - x = C$;
(7n) $\cot\left(\frac{x-y}{2}\right) + x = C$;
(7o) $x^2 + y^2 = Cy$;
(7p) $C - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3y-1}{\sqrt{2}(3x+1)} - \frac{1}{2}\ln\left(2\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2\right) = 0$;
(7q) $3x + 6y - 12\ln|2x + 3y + 7| = C$;
(7r) $y = xe^{Cx+1}$;
(7s) $\frac{x^2}{y^2} + \ln\left(xy\right) = C$;
(7t) $y + 2 = Ce^{\arctan\frac{y+2}{x-3}}$;
(7u) $ax + by + c = \sqrt{\frac{a}{b}}\tan\left(\sqrt{ab}x + C\right)$;
(8)

$$T = T_{ot} + C_1 e^{-\alpha t}.$$

Widać, że dla $t \to \infty$ zachodzi $T \to T_{ot}$.
(10a) $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}\left(1 + e^x\right)$;
(10b) $y^2 + 1 = \frac{2}{1-x^2}$;