Fizyka, II rok FS, FiTKE, IS
Równania różniczkowe i całkowe, Zestaw 1b

1. Proszę wyznaczyć całkę ogólną następujących równań różniczkowych
   (a) $y' + ay = e^{mx}$,
   (b) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$,
   (c) $y' + 2xy = 2x^3y^3$,
   (d) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,
   (e) $y' - y\tan x = \frac{1}{\cos x}$,
   (f) $xy' + y = 3x^2$,
   (g) $x^2y' - y = x^2e^{x-\frac{1}{x}}$,
   (h) $xy' - y\ln y = y\ln x$,
   (i) $2ydx + \big(y^2 - 2x\big)dy = 0$,
   (j) $\big(1 + y^2\big)dx = \big(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\big)dy$,
   (k) $3y^2y' + y^3 + x = 0$,
   (l) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$,
   (m) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$,
   (n) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + a\sin 2y}$, $a = const.$,
   (o) $y' + \big(\cos x\big)y = \frac{1}{2}\sin 2x$,
   (p) $\big(x + y\big)dx + \big(x + 2y\big)dy = 0$;
   (q) $xdx + ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$;
   (r) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$;
   (s) $\frac{2x\left(1-e^y\right)dx}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{e^y\,dy}{1+x^2} = 0$;

2. Proszę wyznaczyć całkę ogólną następujących równań Lagrange'a lub Clairauta
   (a) $y - xy' + \sqrt{1+y'^2}$;
   (b) $y = xy' + y'$;

(c) $2y\big(y'+2\big)=xy'^2$;

(d) $y=-xy'+y'^2$

(e) $y=\big(1+y'\big)x+y'^2$;

(f) $y'^2+\big(x-2\big)y'-y+1=0$;

(g) $y=2y'x+\frac{1}{y'}$;

(h) $y=y'+\sqrt{1-y'^2}$;

(i) $y=xy'^2+y'^3$;

3. Proszę wyznaczyć czynnik całkujący danego równania różniczkowego, a następnie wyznaczyć całkę ogólną równania zupełnego.

   (a) $\big(\frac{x}{y}+1\big)dx+\big(\frac{x}{y}-1\big)dy=0$

   (b) $\big(\sin y-3x^2\cos y\big)\cos y dx+xdy=0$

   (c) $\big(x^2y^3+y\big)dx+\big(x^3y^2-x\big)dy=0$

   (d) $x\sin y+y\cos y+(x\cos y-y\sin y)y'=0$

Odpowiedzi:

(1a) $y(x)=\frac{1}{m+a}e^{mx}+C_1e^{-ax}$, gdy $m+a\neq 0$ oraz $\big(x+C_0\big)e^{mx}$, gdy $m+a=0$;
(1b) $y(x)=\big(x+C_1\big)\tan\frac{x}{2}$;
(1c) $y^2=\frac{1}{C_1e^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}}$;
(1d) $y(x)=\big(x^2+C\big)e^{-x^2}$;
(1e) $y(x)=\big(x+C\big)\frac{1}{\cos x}$;
(1f) $y(x)=x^2+\frac{C}{x}$;
(1g) $y(x)=e^{-\frac{1}{x}}\big(e^x+C\big)$;
(1h) $y(x)=\frac{1}{x}\frac{1}{e}e^{Cx}$;
(1i) $x(y)=-\frac{1}{2}y^2+Cy$;
(1j) $x(y)=\frac{C_0-\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$;
(1k) $y^3(x)=-x+1+Ce^{-x}$;
(1l) $y(x)=x^4\big(\ln\sqrt{x}+C\big)^2$;
(1m) $y(x)=\frac{1}{6}x^4+C_0\frac{1}{x^2}$;
(1o) $y(x)=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$;
(1p) $\frac{1}{2}x^2+xy+y^2=C$;
(1q) $\frac{1}{2}x^2+\arctan\frac{x}{y}+\frac{1}{2}y^2=C$;
(1r) $\sqrt{1+x^2+y^2}-\arctan\frac{x}{y}=C$;
(1s) $\frac{-\left(1-e^y\right)}{1+x^2}=C$;
(2a) $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$ lub rozwiązanie osobliwe $x^2+y^2=1$;
(2b) $y=Cx+C$;
(2c) $y=\frac{(x-C)^2}{C}$ lub $y=0$ lub $y=-4x$;
(2d) Rozwiązanie dane parametrycznie (gdzie p jest parametrem)

$$\begin{cases} x(p)=\frac{2}{3}p+Cp^{-\frac{1}{2}}, \\ y(p)==\frac{1}{3}p^2-Cp^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

(2e) Rozwiązanie dane parametrycznie

$$\begin{cases} x(p) = Ce^{-p} - 2p + 2, \\ y(p) = Ce^{-p}\big(1+p\big) - p^2 + 2 \end{cases}$$

(2f) $y = Cx + \big(C-1\big)^2$ lub rozwiązanie osobliwe $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$;
(2g) Rozwiązanie dane parametrycznie

$$\begin{cases} x(p) = \frac{1}{p^2}\ln|p| + \frac{C}{p^2}, \\ y(p) = 2px + \frac{1}{p} \end{cases}$$

(2h) Rozwiązanie dane parametrycznie

$$\begin{cases} x(p) = \ln|p| - \arcsin p + C, \\ y = p + \sqrt{1-p^2} \end{cases}$$

(2i) Rozwiązanie dane parametrycznie

$$\begin{cases} x(p) = \frac{\frac{3}{2}p^2 - p^3}{(1-p)^2} + \frac{C}{(1-p)^2}, \\ y(p) = xp^2 + p^3 \end{cases}$$

oraz dwa rozwiązania osobliwe: $y = 0$, $y = x + 1$.
(3a) $\mu = \mu(y) = Cy$, rozwiązanie ogólne: $\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 = C$;
(3b) $\mu = \mu(y) = \frac{C}{\cos^2 y}$, rozwiązanie ogólne: $x\tan y - x^3 = C$;
(3c) $\mu = \mu(w(x,y)) = \frac{C}{w(x,y)} = \frac{C}{xy}$, rozwiązanie ogólne: $\frac{1}{2}x^2y^2 + \ln|x| - \ln|y| = C$;
(3d) np. $\mu = \mu(x) = Ce^x$, rozwiązanie ogólne: $xe^x \sin y - e^x \sin y + e^x y \cos y = C$;

Pytania, komentarze, uwagi proszę przesyłać na adres: bwolf@rudy.mif.pg.gda.pl