Fizyka, II rok FS, FiTKE, IS
Równania różniczkowe i całkowe, Zestaw 1c

1. Sprawdzić czy funkcje są liniowo niezależne na podanym przedziale (a,b)

   (a) $y_1 = x$, $y_2 = 5x$; $(a,b) = (-\infty, \infty)$,

   (b) $y_1 = f(x)$, $y_2 = c \cdot f(x)$; $(a,b) = (r_1, r_2)$, $c, r_1, r_2 = const.$, $r_1 < r_2$,

   (c) $y_1 = x^2$, $y_2 = \sin x$; $(a,b) = (0, \frac{\pi}{2})$

2. Dane jest równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego postaci

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad y = y(x). \tag{1}$$

   Udowodnić, że

   (a) funkcja $y(x) = e^{\lambda x}$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (1) wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi równość

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{2}$$

   (b) funkcje $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ i $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ stanowią układ bazowy rozwiązań równania różniczkowego (1), gdy $\lambda_1 \neq \lambda_2$ są pierwiastkami równania charakterystycznego (2) równania (1),

   (c) funkcje $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$ i $y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$ stanowią układ bazowy rozwiązań równania różniczkowego (1), gdy λ_0 jest pierwiastkiem podwójnym równania charakterystycznego (2) równania (1),

   (d) funkcje $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ stanowią układ bazowy rozwiązań równania różniczkowego (1), gdy $\lambda = \alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego (2) równania (1).

3. Dane jest równanie różniczkowe liniowe niejednorodne rzędu drugiego

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f_1(x) + f_2(x) = f(x),$$

   lub zapisane równoważnie

$$L_2(y) = f_1(x) + f_2(x) = f(x), \quad L_2(y) = \Big(\frac{d^2}{dx^2} + a_1\frac{d}{dx} + a_0\Big)y.$$

   Proszę udowodnić, że funkcja postaci $y = y_{f_1} + y_{f_2}$ jest rozwiązaniem tego równania, gdy y_{f_1} jest całką szczególną równania $L_2(y) = f_1(x)$, a funkcja y_{f_2} całką szczególną równania $L_2(y) = f_2(x)$.

4. Udowodnić, że równanie różniczkowe postaci

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

   można przez zamianę zmiennych $y(x) \to y(t)$, $t = t(x)$ sprowadzić do równania różniczkowego o stałych współczynnikach tylko wówczas, gdy zachodzi

$$\frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} + \frac{q'(x)}{2q(x)^{\frac{3}{2}}} = C = const.$$

5. Udowodnić, że równanie Eulera rzędu drugiego

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \quad y = y(x) \tag{3}$$

   czyli równanie różniczkowe rzędu drugiego o współczynnikach funkcyjnych, można sprowadzić do równania różniczkowego o współczynnikach stałych przez dokonanie zamiany zmiennych postaci

$$x = e^r, \quad y = y(x) \to y = y(r(x)) = y(r),$$

   gdzie r jest zmienna niezależną.

6. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ruch ciała o masie m zawieszonego w ośrodku o współczynniku tłumienia p na nieważkiej sprężynie o stałej sprężystości k, opisany jest przez tzw. *równanie oscylatora* postaci

$$mx'' + px + kx = f(t), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{4}$$

gdzie $f(t)$ jest siłą wymuszająca (dla drgań swobodnych $f(t) \equiv 0$), natomiast ω_0 jest częstością drgań własnych wykonywanych przec ciało.
Proszę wyznaczyć funkcję $x = x(t)$ opisująca ruch ciała dla następujących przypadków

(a) ciało wykonuje drgania swobodne (bez wymuszeń) w ośrodku bez tłumienia, tzn. $p \equiv 0$. Przyjąć warunki początkowe postaci

$$x(t=0) = A_0, \quad v(t=0) = 0,$$

gdzie $v = v(t)$ jest prędkością drgającego ciała,

(b) Przyjąć, że $x(0) = v(0) = 0$. Pozostałe założenia tak jak w przypadku poprzednim,

(c) na ciało działa wymuszająca siła harmoniczna postaci $f(t) = F\sin(\omega t)$, $F = const.$. Ruch odbywa się w ośrodku bez tłumienia $p \equiv 0$. Przyjąć, że częstość siły wymuszającej ω jest różna od częstości drgań własnych ω_0, tzn. $\omega \neq \omega_0$. Przyjąć warunki początkowe

$$x(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

(d) w tym przypadku rozpatrzyć rezonans, tzn. $\omega = \omega_0$. Reszta założeń tak jak w punkcie poprzednim. Dokonać krótkiej analizy przypadku $t \to \infty$,

(e) rozpatrzyć ruch swobodny (bez wymuszeń) w ośrodku o współczynniku tłumienia $p_m > 2\omega_0$, gdzie $p_m = \frac{p}{m}$, p – współczynnik tłumienia;

7. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (liniowego o stałych współczynnikach) postaci

(a) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

(b) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$;

(c) $y'' - 4y - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = 0$;

(d) $y'' - 2y' + y = 4e^x$;

(e) $y'' + 5y' + 6y = xe^{3x}$;

(f) $y'' + 3y' + 2y = 4$;

(g) $y'' + 4y = \sin 2x$. Rozwiązać metodą przewidywań oraz metodą uzmiennienia stałych. W drugiej metodzie skorzystać z następującego faktu: $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{8}\cos x \sin x + \frac{1}{8}x + C_0$.

(h) $y'' + 4y = \cos^2 x$;

(i) $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$;

(j) $y'' + 9y = 2x\sin x + xe^{3x}$

(k) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

(l) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

(m) $y'' - y = x^2 - x + 1$. Rozwiązać metodą uzmiennienia stałych oraz metodą przewidywań.

8. Proszę rozwiązać (podać całki ogólne) równań Eulera postaci

(a) $x^2y'' - xy' + y = 0$;

(b) $x^2y'' + xy' + y = \sin\big(\ln x\big)$;

(c) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$;

(d) $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$;

Odpowiedzi

(6a) Drgania ciała opisane są funkcją okresową z okresem równym częstości własnej ω_0, tzn. $x = x(t) = A_0 \cos \omega_0 t$;

(6b) ciało nie wykonuje drgań, $x(t) = 0$;

(6c) ruch jest złożeniem dwóch ruchów okresowych o częstościach ω i ω_0. Drgania opisane są funkcją $x(t) = -\frac{F_m}{\omega_0^2 - \omega}\Big(\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \sin\omega t\Big)$, gdzie $F_m = \frac{F}{m}$;

(6d) ruch ciała opisany jest równaniem $x(t) = \frac{F_m}{2\omega_0^2}\sin\omega_0 t - \frac{F_m}{2\omega_0} t\cos\omega_0 t$. Amplituda wychyleń ciała dąży do nieskończoności w granicy $t \to \infty$;

(6e) jest to przypadek eksponencjalnego zaniku drgań (ośrodek o dużej tłumienności)

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-p_m - \sqrt{p_m^2 - 4\omega_0^2}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-p_m + \sqrt{p_m^2 - 4\omega_0^2}}{2}t};$$

(7a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$;

(7b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$;

(7c) $y = \Big(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln\big(e^{2x}+1\big) + C_3\Big)e^{2x} + \Big(-\frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{8}\ln\big(e^{2x}+1\big) + C_4\Big)$;

(7d) $y(x) = 2x^2 e^x + e^x\big(C_3 x + C_4\big)$;

(7e) $y(x) = C_3 e^{-2x} + C_4 e^{-3x} + \frac{e^{3x}}{900}\big(-11 + 30x\big)$;

(7f) $y(x) = C_3 e^{-x} + C_4 e^{-2x} + 2$;

(7g) $y(x) = C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$;

(7h) $y(x) = C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x \sin 2x$;

(7i) $y(x) = C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 e^{-x}$;

(7j) $y(x) = C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x + \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos x + e^{3x}\big(\frac{1}{18}x - \frac{1}{54}\big)$;

(7k) $y(x) = C_3 \sin x + C_4 \cos x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$;

(7l) $y(x) = C_3 \sin x + C_4 \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x\cos x$;

(7m) $y(x) = C_3 e^{x} + C_4 e^{-x} - x^2 + x - 3$;

(8a) $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x$;

(8b) $y(x) = C_3 \cos\ln x + C_4 \sin\ln x - \frac{1}{2}\ln(x)\cos x$;

(8c) $y(x) = \frac{1}{2}x + C_1 x^2 + C_2 x^3$;

(8d) $y(x) = -\frac{1}{9}x^2 \ln x + \frac{C_1}{x} + C_2 x^5$;

Pytania, uwagi, komentarze proszę przesyłać na adres: bwolf@rudy.mif.pg.gda.pl